

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-243-256

**Линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации<sup>1</sup>**

А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, А. М. Атаян

**Александр Иванович Сухинов** — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).

*e-mail: sukhinov@gmail.com*

**Александр Евгеньевич Чистяков** — доктор физико-математических наук, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).

*e-mail: cheese\_05@mail.ru*

**Елена Анатольевна Проценко** — кандидат физико-математических наук, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (г. Таганрог).

*e-mail: eapros@rambler.ru*

**Ася Михайловна Атаян** — аспирант, Донской государственный технический университет (г. Ростов-на-Дону).

*e-mail: atayan24@mail.ru*

**Аннотация**

Работа посвящена определению диапазона значений сеточного числа Пекле, при котором предложенная схема, представляющая линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации, обладает лучшей точностью по сравнению с употребительными схемами, в том числе модификациями схемы «кабаре» с ограничителями. В статье получено ограничение на шаг по времени для разностной схемы с весами при котором погрешность расчетов находится в приемлемом диапазоне. Показано, что предложенная схема, построенная на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами  $2/3$  и  $1/3$  соответственно, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации точнее схемы «кабаре» с ограничителями решает задачу конвекции при малых числах Куранта. Рассчитан диапазон чисел Пекле, при котором предложенная аппроксимация оператора конвективного переноса будет эффективна. На основании вышесказанного сделаны выводы о том, что предложенная модификация схемы «кабаре» для численного решения задачи диффузии-конвекции обладает лучшей точностью по сравнению с другими схемами, для значений сеточного числа Пекле в диапазоне  $2 \leq Pe \leq 20$ , что позволяет применять данный класс схем для численного решения задач вычислительной океанологии.

*Ключевые слова:* задача переноса, схема «крест», схема «кабаре», линейно-взвешенная комбинация, повышение точности.

*Библиография:* 25 названий.

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 19-07-00623).

**Для цитирования:**

А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, А. М. Атаян Линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 4, с. 243–256.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

---

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-243-256

**Linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error**

A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko, A. M. Atayan

**Alexander Ivanovich Sukhinov** — Corresponding member of the RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Don State Technical University (Rostov-on-Don).

*e-mail: sukhinov@gmail.com*

**Alexander Evgenjevich Chistyakov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Don State Technical University (Rostov-on-Don).

*e-mail: cheese\_05@mail.ru*

**Elena Anatolevna Protsenko** — PhD in Physico-mathematical sciences, Taganrog Institute named after A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State Economic University (RSUE) (Taganrog).

*e-mail: eapros@rambler.ru*

**Asya Mikhaylovna Atayan** — PhD student, Don State Technical University (Rostov-on-Don).

*e-mail: atayan24@mail.ru*

**Abstract**

The work is devoted to determining the range of grid Peclet number values, for which the proposed scheme, representing a linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error, has higher accuracy than conventional schemes, including modifications Upwind Leapfrog difference scheme with limiters. The article obtained a limit on the time step for a difference scheme with weights at which the calculation error is in an acceptable range. It is shown that the proposed scheme, based on the basis of a linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weighting coefficients  $2/3$  and  $1/3$ , respectively, obtained by minimizing the approximation error more precisely, the Upwind Leapfrog difference scheme with limiters solves the convection problem for small Courant numbers. Thus, the proposed modification of the Upwind Leapfrog difference scheme for the numerical solution of the diffusion-convection problem has higher accuracy than other schemes, for the values of the grid Peclet number in the range  $2 \leq Pe \leq 20$ , which allows you to use this class of schemes for the numerical solution of problems of computational oceanology.

*Keywords:* transfer problem, Upwind Leapfrog difference scheme, Standard Leapfrog difference scheme, linear-weighted combination, increase accuracy.

*Bibliography:* 25 titles.

**For citation:**

A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko, A. M. Atayan, 2019, "Linear combination of the Upwind and Standard Leapfrog difference schemes with weight coefficients, obtained by minimizing the approximation error", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 243–256.

## 1. Введение

При численном решении задач транспорта взвесей в мелководных водоемах [1, 2, 3] на основе центрально-разностных схем возникает проблема, связанная с падением точности для больших значений сеточного числа Пекле [4, 5]. Одним из вариантов решения данной проблемы является измельчение шага по пространственной сетке, что влечет за собой увеличение трудоемкости. Например, при решении трехмерной задачи диффузии-конвекции для уменьшения числа Пекле в два раза необходимо уменьшить шаги по пространству в два раза, а по времени в четыре раза. Таким образом, трудоемкость возрастает в 32 раза. Другим подходом к решению данного класса задач является применение других разностных схем, например, схемы «кабаре». Схемы «кабаре» были разработаны для решения задач аэроакустики [6, 7]. В работе [8] предложено использовать линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест». В работе [9] рассчитаны оптимальные коэффициенты для данной схемы из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации [10, 11, 12]. Целью данной работы является определение диапазона значений сеточного числа Пекле, при котором предложенная схема, представляющая линейную комбинацию схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами, полученными из условия минимизации порядка погрешности аппроксимации, обладает лучшей точностью по сравнению с употребительными схемами, в том числе модификациями схемы «кабаре» с ограничителями.

## 2. Точность решения задачи теплопроводности

**Постановка задачи.** Рассмотрим случай уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами:

$$q'_t = \mu q''_{xx} + f, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

$$q(x, t)|_{t=0} = q^0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$q(0, t) = q_0(t), \quad q(l, t) = q_l(t), \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Предполагаем необходимую гладкость функций, входящих в соотношения (1)-(3), и согласованность начальных и граничных условий.

**Аналитическое решение уравнения диффузии.** Найдем аналитическое решение задачи (1) при определенных предположениях. Будем предполагать, что функции и можно представить в виде конечных сумм - разложений по конечному тригонометрическому базису:

$$q \simeq \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)}(t) \sin(\omega m x), \quad f \simeq \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)} \sin(\omega m x), \quad (4)$$

где  $\omega = \pi/l$ ,  $C_m^{(f)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\omega m x) dx$ ,  $C_m^{(q)} = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin(\omega m x) dx$ .

Следует отметить, что в случае табличного способа задания  $u_0$ , например, на пространственной сетке, ряд будет ограничен  $N$  гармоникой и для восстановления непрерывной функции применяется интерполяционный тригонометрический полином, где  $N$  – количество дискретных значений функции.

Далее рассматриваются функции, имеющие производную порядка  $\alpha$ , удовлетворяющие неравенству  $f^{(\alpha)}(x) \leq K$ , с периодом  $2\pi$ . Имеет место оценка остаточного члена ряда (4) для любого натурального  $\alpha$ :

$$\sup |r| = \frac{4K \ln n}{\pi^2 n^\alpha} + O(1/n^\alpha),$$

где

$$r = u(x/\omega, t) - \sum_{m=1}^{N-1} C(t) \sin(mx).$$

Функции  $u$  и  $f$  подставим в уравнение теплопроводности (1) и в результате несложных преобразований получим:

$$\left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)} \sin(\omega mx) \right)'_t = \mu \left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(q)} \sin(\omega mx) \right)''_{xx} + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Меняя порядок действия операций дифференцирования и суммирования, и вычисляя производную по пространственной переменной, приходим к равенству:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \left( C_m^{(q)}(t) \right)'_t \sin(\omega mx) = \sum_{m=1}^{N-1} \mu C_m^{(q)} (-\omega^2 m^2 \sin(\omega mx)) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega mx)$  для отличающихся друг от друга  $m$ , получаем:

$$\left( C_m^{(q)}(t) \right)'_t = -\mu \omega^2 m^2 C_m^{(q)} + C_m^{(f)}. \quad (5)$$

Решение уравнения (5) примет вид:

$$C_m^{(q)}(t) = \left( C_m^{(q)}(0) - \frac{C_m^{(f)}}{\mu \omega^2 m^2} \right) e^{-\mu \omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{\mu \omega^2 m^2}. \quad (6)$$

После преобразований, с учетом заданных начальных и граничных условий получаем следующее представление для функции решения [13]:

$$q = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \left( C_m^{(q)}(0) - \frac{C_m^{(f)}}{\mu \omega^2 m^2} \right) e^{-\mu \omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{\mu \omega^2 m^2} \right) \sin(\omega mx). \quad (7)$$

**Разностная схема для уравнения теплопроводности.** Для численного решения задачи (1) покроем расчетную область равномерной сеткой:

$$w_h = \{t^n = n\tau, x_i = ih; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}; N_t\tau = T, N_x h = l\},$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространству,  $M$  – верхняя граница по времени,  $N$  – количество узлов по пространству.

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} = \mu \frac{q_{i+1}^{n+\sigma} - 2q_i^{n+\sigma} + q_{i-1}^{n+\sigma}}{h^2} + f_i, \quad (8)$$

где  $q_i^{n+\sigma} = \sigma q_i^{n+1} + (1 - \sigma) q_i^n$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  – вес схемы.

Необходимое условие устойчивости, полученное на основе метода гармоник, приводит к следующему неравенству [14]:

$$\gamma = \frac{\tau \mu}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получили. Несмотря на то, что данная оценка является жестким ограничением для явных разностных схем, на практике шаг по времени необходимо брать ещё меньше.

*Модельная задача I.* Требуется найти решение уравнения

$$q'_t = \mu q''_{xx}, \quad \mu = 1 \text{ м}^2/\text{с}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l, \quad q(t, 0) = 0$$

с начальными условиями:  $q^0(x) = \theta(20 - x) - \theta(10 - x)$ , где  $\theta(x)$  – функция Хэвисайда.

Параметры расчетной сетки: шаг по времени находится в диапазоне от 0,001 до 10 с, шаг по пространству  $h = 1$  м, длина интервала по времени  $T$  равна 60 с. На рисунке 1 представлена погрешность решения модельной задачи I на основе схемы (8), 1 – схема с весами ( $\sigma = 0.5$ ), 2 – явная схема. Погрешность вычислений рассчитывается по формуле  $\Psi = \sqrt{\sum_i (\tilde{q}_i - q_i)^2 / \sum_i q_i^2}$ , где  $q_i$  – точное значение решения задачи диффузии в узле  $i$ ,  $\tilde{q}_i$  – численное решение, зависящее от величины шага по времени. По горизонтальной оси отложена величина шага по времени  $\tau_0$  отнесенного к величине  $\tau_{\max}$  ( $\tau_0 = \tau / \tau_{\max}$ ).

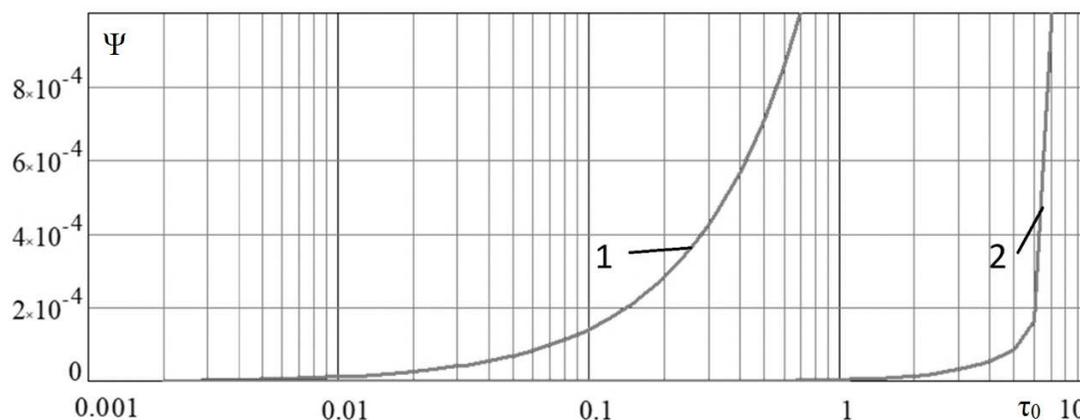


Рис. 1: Функция зависимости погрешности аппроксимации от шага по времени. 1 – для явной схемы, 2 – для схемы с весами

Для того чтобы относительная погрешность явной схемы была равна 0.01 % необходимо величину  $\tau_0$  брать равной 0.0717, в случае использования предложенной схемы с весами параметр  $\tau_0$  равен 5.1858.

*Модельная задача II.* Рассмотрим задачу, возникающую при моделировании транспорта взвеси в мелководных водоемах [15, 16]. Требуется найти решение двумерного уравнения диффузии для области, вытянутой в одном направлении

$$q'_t = \mu_x q''_{xx} + \mu_y q''_{yy}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l_x, \quad 0 < y < l_y, \\ \mu_x = 100 \text{ м}^2/\text{с}, \quad \mu_y = 0.5 \text{ м}^2/\text{с}, \quad l_x = 2000 \text{ м}, \quad l_y = 5 \text{ м}$$

с начальными условиями:

$$q(x, y, t)|_{t=0} = (\theta(1100 - x) - \theta(900 - x))(\theta(3 - y) - \theta(2 - y)), \quad 0 \leq x \leq l_x, \quad 0 \leq y \leq l_y$$

и граничными условиями в форме Дирихле.

Параметры расчетной сетки: шаги по пространству  $h_x = 100$  м и  $h_y = 0.5$  м, длина интервала по времени  $T$  равна 600 с. На рисунке 2 представлены решения модельной задачи II на основе: 1 – схемы с весами, 2 – явной схемы.

Из рисунков 1, 2 видим, что погрешность достижения для явной схемы ограничение на шаг по времени существенно меньше, чем для схемы с весами. Для того чтобы относительная погрешность явной схемы была равна одному проценту необходимо величину  $\tau_0$  брать равной 0.01376, в случае использования предложенной схемы с весами параметр  $\tau_0$  равен 0.34844.

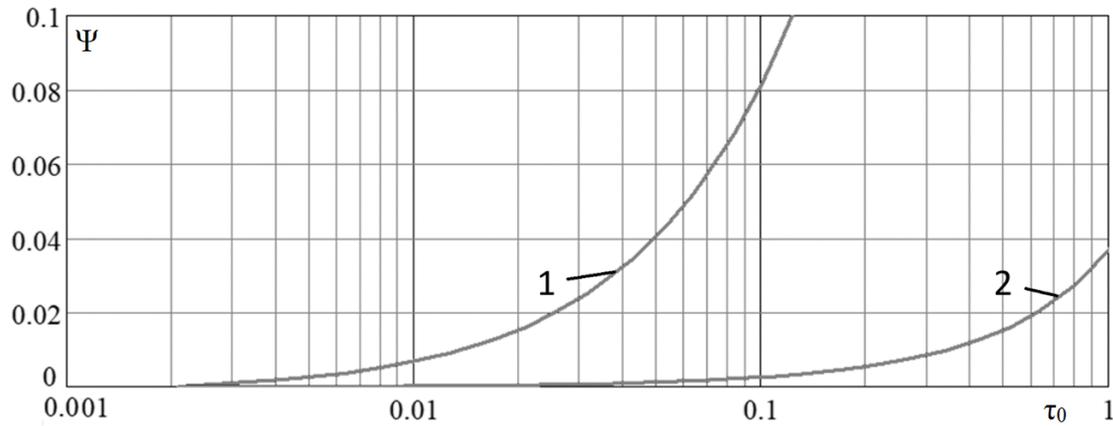


Рис. 2: Функция зависимости погрешности аппроксимации от шага по времени. 1 – для явной схемы, 2 – для схемы с весами

**Замечание 1.** Явная схема имеет устойчивое решение при ограничении  $\tau \leq O(h^2)$  [17], а схема с весами при  $\sigma \geq 0.5$  не имеет ограничений на шаг по времени. На практике для того, чтобы погрешность расчетов, на основе разностной схемы (8) с весом  $0 \leq \sigma \leq 1$ , находилась в приемлемом диапазоне необходимо использовать следующее ограничение на шаг по времени:  $\tau \leq \Delta \cdot (\sum_{i=1}^r 2\mu_i/h_i^2)^{-1}$ , где  $r$  – размерность пространства. Параметр  $\Delta$  описывает отношение шага, который необходимо брать для того чтобы точность расчетов находилась в приемлемом диапазоне  $\tau$ , к шагу полученному из ограничения на устойчивость явной схемы  $\tau_{\max}$ , при этом имеет место оценка  $\tau_0 \leq \Delta$ . При решении задач диффузии-конвекции необходимо находить значения  $\Delta$  иначе, если шаг  $\tau$  берется слишком большим, то погрешность будет велика, а если маленьким, то велики вычислительные трудозатраты. Для явной схемы параметр  $\Delta$  рекомендуется брать равным 0.01, а для схемы с весом  $\sigma = 0.5$  параметр  $\Delta$  можно брать равным 0.3.

### 3. Решение задачи переноса на основе схемы «кабаре»

Рассмотрим уравнение переноса [18, 19]

$$q'_t + uq'_x = 0, \quad (9)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $q(0, x) = q^0(x)$ ,  $q(t, 0) = 0$ ,  $u = const$ .

Введем равномерную расчетную сетку

$$\omega = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau,$$

где

$$\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

$$\omega_\tau = \{t^n | n = 0, 1, \dots, T\}, \tau = t^{n+1} - t^n = const.$$

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы: – схема «кабаре» [20]:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0, u \geq 0; \quad (10)$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0, u < 0;$$

– схема «крест» («чехарда»):

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0. \tag{11}$$

**Замечание 2.** Известно, что решение задачи (9) на основе центральных разностных схем не устойчиво при этом для решения данного класса задач показала свою эффективность схема «кабаре» с ограничителями [20].

Для решения задачи (9) будем использовать схему, построенную на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, полученными в результате минимизации погрешности аппроксимации

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 0, \quad u \geq 0, \tag{12}$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} \right) + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 0, \quad u < 0.$$

*Модельная задача III.* Рассмотрим задачу движения фронта концентраций [19, 21]. Требуется найти решение уравнения

$$q'_t + uq'_x = 0, \quad u = 0.5m/s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq l, \quad q(t, 0) = 0$$

с начальными условиями:  $q^0(x) = \theta(70 - x) - \theta(60 - x)$ .

На рис. 3. представлены значения погрешностей в норме  $L_1$  ( $\Psi^n = \sum_i \psi_i^n h$ ,  $\psi_i^n = |q_i^n - q(x_i, t^n)|$ , где  $q(x_i, t^n)$  – точное решение задачи (9) в узле  $i$ ,  $q_i^n$  – численное решение на временном шаге  $n$ ,  $n = T$ ) численного решения модельной задачи III на основе предложенной схемы (12), а также схем «крест» и «кабаре» с ограничителями в зависимости от значений чисел Куранта ( $c = |u| \tau/h$ ). Длина интервала по времени  $T$  равна 100 с. Шаг по времени  $\tau$  принимал значения 0.02 с до 2 с. Числа Куранта находятся в диапазоне от 0.01 до 1.

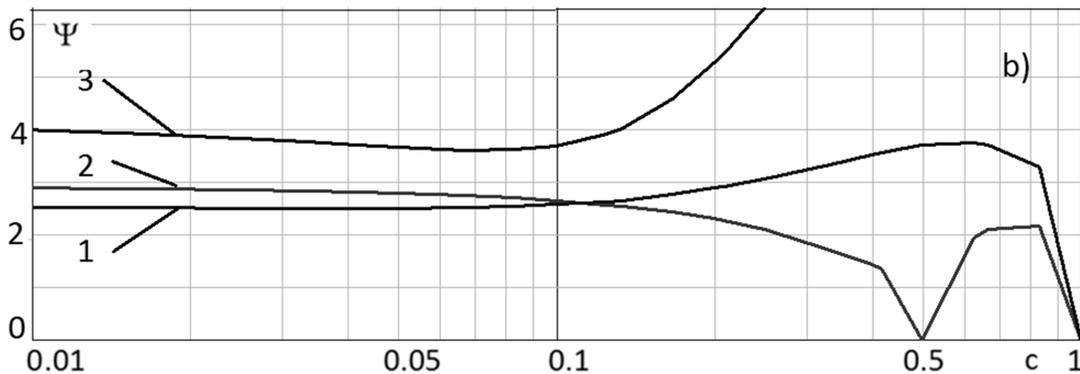


Рис. 3: Значения погрешностей численного решения модельной задачи III в зависимости от значений чисел Куранта. 1 – схемы, построенной на основе линейной комбинации разностной схемы «кабаре» и «крест» с весовыми коэффициентами 2/3 и 1/3 соответственно, 2 – схемы «кабаре» с ограничителями и 3 – схемы «крест» с ограничителями

**Замечание 3.** Из результатов расчета модельной задачи III видно, что предложенная схема (12) точнее схемы «кабаре» с ограничителями решает задачу конвекции при малых

числах Куранта ( $c = |u|\tau/h \leq 0.1$ ). Из результатов расчета задачи диффузии следует, что для явных схем имеет место ограничение  $\tau \leq \Delta \cdot \tau_{\max}$ ,  $\tau_{\max} = h^2/2\mu$ ,  $\Delta = 0.01$ . Из данных оценок следует,  $\Delta|u|h/2\mu \leq 0.1$ , где  $Pe = |u|h/\mu \leq 0.1/\Delta = 20$ , где  $Pe$  – сеточное число Пекле [13]. В данном диапазоне чисел Пекле будет эффективна предложенная аппроксимация оператора конвективного переноса (рассмотрен случай отсутствия монотонности схем, построенных на основе центрально-разностных аппроксимациях  $Pe > 2$ ).

#### 4. Решение задачи конвекции-диффузии

Рассмотрим уравнение конвекции-диффузии [22, 23]:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, \quad (13)$$

где  $t \in [0, T]$ ,  $x \in [0, l]$ , с граничными и начальными условиями:

$$q(0, x) = q^0(x), q(t, 0) = q(t, l) = 0, u = const.$$

Аппроксимация задачи (13) с учетом разностного аналога оператора конвективного переноса (12) запишем в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} \right) + \\ & + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, \quad u \geq 0, \\ & \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{4}{3} \left( \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} \right) + \\ & + \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{3\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{3h} = 2\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}, \quad u < 0. \end{aligned} \quad (14)$$

*Модельная задача IV.* Требуется найти решение уравнения:

$$q'_t + uq'_x = \mu q''_{xx}, u = 0.5 \text{ м/с}, \mu = const, 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$$

с начальными и граничными условиями:

$$q^0(x) = \theta(70 - x) - \theta(60 - x), q(t, 0) = q(t, l) = 0.$$

Решение модельной задачи IV может быть представлено в виде [13]:

$$q(t, x) = \sum_{m=1}^{N-1} c_m^0 e^{-\mu\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x), c_m^0 = \frac{2}{L} \int_0^l q^0(x + ut) \sin(\omega m x) dx, \omega = \frac{\pi}{l}.$$

На рисунке 4 представлены графики функции погрешности  $\Psi^n$  решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и схемы «кабаре» с ограничителями решения в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле. Параметры расчетной сетки: шаг по пространству  $h = 1$  м, шаг по времени  $\tau = 0.02$  с, пространственный интервал  $L = 200$  м, величина интервала по времени  $T$  равна 100 с, коэффициент диффузии находится в диапазоне от  $5 \times 10^{-4}$  до  $0.5$  м<sup>2</sup>/с.

**Замечание 4.** Из результатов расчета модельной задачи IV видно, что предложенная схема (14) имеет незначительную погрешность в диапазоне чисел Пекле  $Pe \leq 20$ .

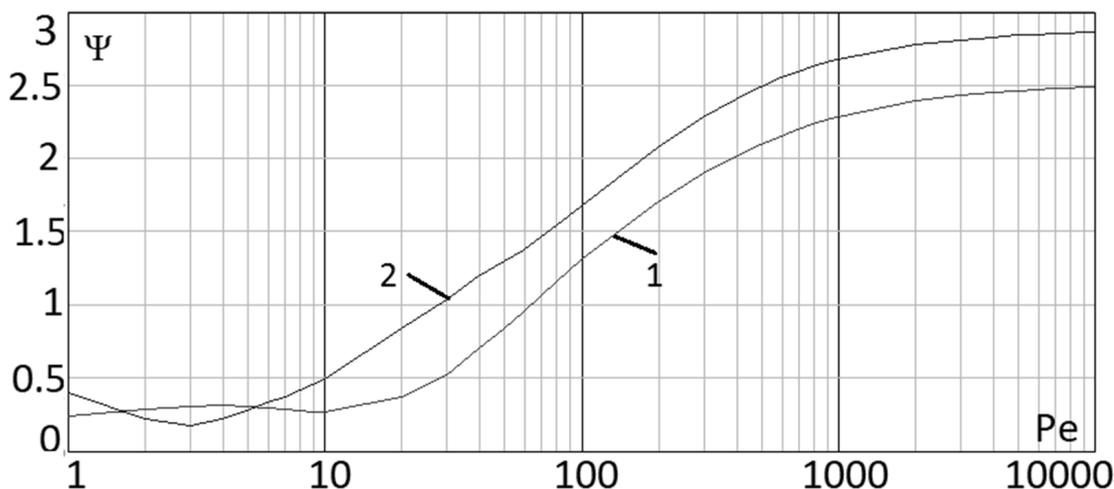


Рис. 4: Графики функции погрешности  $\Psi^n$  решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и схемы «кабаре» с ограничителями решения в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле

Аппроксимация задачи (13) на основе явных центрально разностных схемах запишется в виде [24, 25]:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = \mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2}. \quad (15)$$

На рисунке 5 представлены графики функции погрешности  $\Psi^n$  решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и центрально-разностной схемы (15) в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле. Параметры расчетной сетки: шаг по пространству  $h=1\text{м}$ , шаг по времени  $\tau=0.02$ , пространственный интервал  $L = 200$  м, величина интервала по времени  $T$  равна 100 с, коэффициент диффузии находится в диапазоне от  $5 \times 10^{-3}$  до  $5 \text{ м}^2/\text{с}$ .

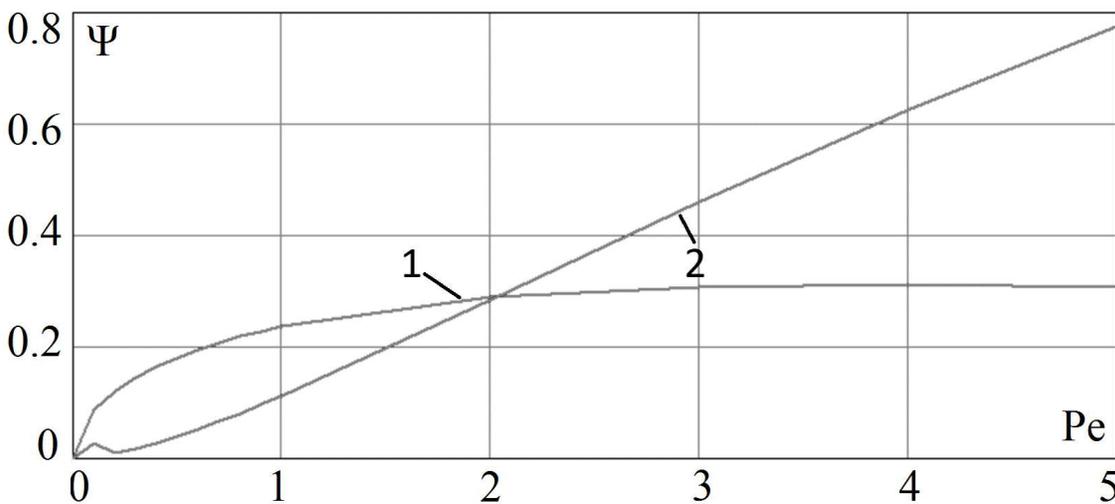


Рис. 5: Графики функции погрешности  $\Psi^n$  решения модельной задачи IV на основе разностной схемы (14) и центрально-разностной схемы (15) в норме  $L_1$ , зависящей от сеточного числа Пекле

**Замечание 5.** Из результатов расчета модельной задачи IV видно, что центрально-разностная схема (15) имеет меньшую погрешность в диапазоне чисел Пекле от 0 до 2 по

сравнению с предложенной разностной схемой (14). На основании вышесказанного можно сделать вывод, что предложенная модификация схемы «кабаре» (14) обладает лучшей точностью по сравнению с другими рассмотренными в статье схемами для численного решения задачи диффузии-конвекции при следующих значениях сеточного числа Пекле:  $2 \leq Pe \leq 20$ .

## 5. Заключение

Явная схема имеет устойчивое решение при ограничении на шаг по времени  $\tau \leq O(h^2)$ , схема с весами безусловно устойчива для  $\sigma \geq 0.5$ . На практике для того, чтобы погрешность расчетов, на основе разностной схемы с весами при  $0 \leq \sigma \leq 1$  была приемлемой можно ориентироваться на следующее ограничение на шаг по времени:  $\tau \leq \Delta \cdot (\sum_{i=1}^r 2\mu_i/h_i^2)^{-1}$ , где  $r$  – размерность пространства, параметр есть отношение вида  $\tau/\tau_{\max}$ , при этом имеет место оценка  $\tau_0 \leq \Delta$ . При решении задач диффузии-конвекции следует предварительно находить значения  $\Delta$ . В противном случае для шагов, существенно превышающих рекомендованное значение  $\tau$ , погрешность будет слишком велика, а если использовать значительно меньшие шаги по времени следует ожидать существенного увеличения вычислительных затрат. Для явной схемы параметр  $\Delta$  рекомендуется брать равным 0.01, а для схемы с весом  $\sigma = 0.5$  параметр  $\Delta$  можно брать равным 0.3.

Для численного решения задачи конвекции на основе схем «кабаре» с ограничителями получено улучшение точности. Из результатов расчета модельной задачи III видно, что предложенная модификация схемы «кабаре» точнее, чем схема «кабаре» с ограничителями при малых числах Куранта ( $c \leq 0.1$ ). Из результатов численного решения задачи диффузии следует, что для явных схем имеет место ограничение  $\tau \leq \Delta \cdot \tau_{\max}$ ,  $\tau_{\max} = h^2/2\mu$ ,  $\Delta = 0.01$ . Из данных оценок следует, что построенная линейная комбинация схемы «кабаре» и «крест» имеет превосходство по точности при значениях сеточного числа Пекле, вплоть до 20 ( $Pe \leq 20$ ).

Численное решение модельной задачи IV показало, что центрально-разностная схема имеет меньшую погрешность для сеточного числа Пекле от 0 до 2 по сравнению с предложенной разностной схемой. На основании вышесказанного можно сделать вывод, что предложенная модификация схемы «кабаре» для численного решения задачи диффузии-конвекции обладает лучшей точностью по сравнению с другими схемами, рассматриваемыми в статье для значений сеточного числа Пекле в диапазоне  $2 \leq Pe \leq 20$ , что позволяет применять данный класс схем для численного решения задач вычислительной океанологии.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alekseenko E. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. // *Computers and Fluids*. – 2013. – 77, P. 24-35.
2. А. В. Никитина, А. И. Сухинов, Г. А. Угольницкий, А. Б. Усов, А. Е. Чистяков, М. В. Пучкин, И. С. Семенов, “Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря”, *Матем. моделирование*, 28:7 (2016), 96–106.
3. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. В. Алексеенко, “Численная реализация трехмерной модели гидродинамики для мелководных водоемов на супервычислительной системе”, *Матем. моделирование*, 23:3 (2011), 3–21.
4. А. И. Сухинов, Д. С. Хачунц, А. Е. Чистяков, “Математическая модель распространения примеси в приземном слое атмосферы прибрежной зоны и ее программная реализация”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 55:7 (2015), 1238–1254.

5. А. И. Сухинов, Ю. В. Белова, А. Е. Чистяков, “Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле”, Выч. мет. программирование, 18:4 (2017), 371–380.
6. Thomas, J.P. and Roe P.L., "Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics," AIAA paper 93-3382-CP, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6– 9, 1993.
7. S. C. Chang, X. Y. Wang, and C. Y. Chow, New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element—Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).
8. В. Ю. Глотов, В. М. Головизнин, “Схема КАБАРЕ для двумерной несжимаемой жидкости в переменных “скорость–давление””, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 53:6 (2013), 898–913.
9. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А., “ О разностных схемах кабаре и крест ”, Выч. мет. программирование, 20:2 (2019), 170-181.
10. А. А. Самарский, “О регуляризации разностных схем”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7:1 (1967), 62–93.
11. А. А. Самарский, “Классы устойчивых схем”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 7:5 (1967), 1096–1133.
12. Р. П. Федоренко, “Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2:6 (1962).
13. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, М. В. Якобовский, “Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации”, Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ., 5:1 (2016), 47–62.
14. П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский, “Разностные схемы для задач конвекции-диффузии на нерегулярных сетках”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 40:5 (2000), 726–739; Comput. Math. Math. Phys., 40:5 (2000), 692–704.
15. Sukhinov A. Modelling of oil spill spread / Sukhinov A., Chistyakov A., Nikitina A., (...), Korovin I., Schaefer G. // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760176, P. 1134-1139.
16. Sukhinov A.I. Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill / Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Semenyakina A.A., Chistyakov A.E. // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – 1576, P. 308-319.
17. Б. Н. Четверушкин, “Пределы детализации и формулировка моделей уравнений сплошных сред”, Матем. моделирование, 24:11 (2012), 33–52; Boris N. Chetverushkin, “Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations”, Math. Models Comput. Simul., 5:3 (2013), 266–279.
18. Sukhinov A.I. Solution of the problem of biological rehabilitation of shallow waters on multiprocessor computer system / Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Levin I.I., (...), Nikitina A.V., Semenyakina A.A. //5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760175, P. 1128-1133.
19. В. А. Гуцин, “Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации”, Матем. моделирование, 28:2 (2016), 6–18.

20. В. М. Головизнин, А. А. Самарский, “Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной”, Матем. моделирование, 10:1 (1998), 86–100.
21. М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин, “Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики”, Матем. моделирование, 26:1 (2014), 17–32.
22. И. В. Абалакин, А. Н. Антонов, И. А. Граур, Б. Н. Четверушкин, “Использование алгебраической модели турбулентности для расчета нестационарных течений в окрестности выемок”, Матем. моделирование, 12:1 (2000), 45–56.
23. Buzalo N. Mathematical modeling of microalgae-mineralization-human structure within the environment regeneration system for the biosphere compatible city / Buzalo N., Ermachenko P., Vock T., (...), Zhmenya E., Zakharchenko N. // Procedia Engineering. – 2014. – 85, P. 84-93.
24. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. Ф. Тимофеева, А. В. Шишениа, “Математическая модель расчета прибрежных волновых процессов”, Матем. моделирование, 24:8 (2012), 32–44.
25. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models (Book Chapter) // Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. // Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications. – 2005. – P. 231-238.

## REFERENCES

1. Alekseenko E. Coastal hydrodynamics in a windy lagoon / Alekseenko E., Roux B., Sukhinov A., Kotarba R., Fougere D. // Computers and Fluids. – 2013. – 77, P. 24-35.
2. A. Nikitina, A. I. Sukhinov, G. A. Ugolnitsky, A. B. Usov, A. E. Chistyakov, M. Puchkin, I. S. Semenov, “Optimal control of sustainable development in biological rehabilitation of the Azov Sea”, Math. Models Comput. Simul., 9:1 (2017), 101–107.
3. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. V. Alekseenko, “Numerical realization of three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on high-performance system”, Math. Models Comput. Simul., 3:5 (2011), 562–574.
4. A. I. Sukhinov, D. S. Khachunts, A. E. Chistyakov, “A mathematical model of pollutant propagation in near-ground atmospheric layer of a coastal region and its software implementation”, Comput. Math. Math. Phys., 55:7 (2015), 1216–1231.
5. Sukhinov A.I. Solution of the matter transport problem at high Peclet number / A. I. Sukhinov, Yu. V. Belova, A. E. Chistyakov // Vychisl. Metody Programm. – 2017. – v. 18, No 4. – P. 371-380.
6. Thomas, J.P. and Roe P.L., "Development of Non-Dissipative Numerical Schemes for Computational Aeroacoustics," AIAA paper 93-3382-CP, presented at the 11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6– 9, 1993.
7. S. C. Chang, X. Y. Wang, and C. Y. Chow, New Developments in the Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element—Applications to Two-Dimensional Time-Marching Problems, NASA TM 106758 (NASA, December 1994).

8. V. Yu. Glotov, V. M. Goloviznin, “CABARET scheme in velocity-pressure formulation for two-dimensional incompressible fluids”, *Comput. Math. Math. Phys.*, 53:6 (2013), 721–735.
9. Sukhinov A., Chistyakov A., Protsenko E., Upwind and standard leapfrog difference schemes, *Vychisl. Metody Programm.* 20:2 (2019), 170-181.
10. A. A. Samarskii, “Regularization of difference schemes”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 7:1 (1967), 79–120.
11. A. A. Samarskii, “Classes of stable schemes”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 7:5 (1967), 171–223.
12. R. P. Fedorenko, “The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 2:6 (1963), 1355–1365.
13. Sukhinov A.I. Accuracy of the numerical solution of the equations of diffusion-convection using the difference schemes of second and fourth order approximation error / A. I. Sukhinov, A. E. Chistakov, M. V. Iakobovskii // *Vestn. YuUrGU. Ser. Vych. Matem. Inform.* – 2016. – Vol.5. – № 1. – P. 47-62.
14. Samarskii A. A., Numerical methods for solving convection-diffusion problems / A. A. Samarskiy, P. N. Vabischevich. – M.: Ed. URSS, 1998. – 248 P. 64.
15. Sukhinov A. Modelling of oil spill spread / Sukhinov A., Chistyakov A., Nikitina A., (...), Korovin I., Schaefer G. // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760176, P. 1134-1139.
16. Sukhinov A.I. Complex of models, explicit regularized schemes of high-order of accuracy and applications for predictive modeling of after-math of emergency oil spill / Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Semenyakina A.A., Chistyakov A.E. // *CEUR Workshop Proceedings.* – 2016. – 1576, P. 308-319.
17. Boris N. Chetverushkin, “Resolution limits of continuous media models and their mathematical formulations”, *Math. Models Comput. Simul.*, 5:3 (2013), 266–279.
18. Sukhinov A.I. Solution of the problem of biological rehabilitation of shallow waters on multiprocessor computer system / Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Levin I.I., (...), Nikitina A.V., Semenyakina A.A. // 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision, ICIEV 2016. – 2016. – 7760175, P. 1128-1133.
19. Valentin A. Gushchin, “On a one family of quasimonotone finite-difference schemes of the second order of approximation”, *Math. Models Comput. Simul.*, 8:5 (2016), 487–49.
20. Goloviznin V. M. Finite difference approximation of convective transport equation with space splitting time derivative / V. M. Goloviznin, A. A. Samarskii // *Matem. Mod.*, 10:1 (1998), 86–100.
21. M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin, “Application of the RKDG method for gas dynamics problems”, *Math. Models Comput. Simul.*, 6:4 (2014), 397–407.
22. Abalakina I. V. Application of the algebraic turbulent model to the unsteady flow simulation around a cavity / I. V. Abalakina, A. N. Antonova, I. A. Graura, B. N. Chetverushkin // *Matem. Mod.* – 2000. – v. 12. – No 1. – P. 45-56.

23. Buzalo N. Mathematical modeling of microalgae-mineralization-human structure within the environment regeneration system for the biosphere compatible city / Buzalo N., Ermachenko P., Bock T., (...), Zhmenya E., Zakharchenko N. // *Procedia Engineering*. – 2014. – 85, P. 84-93.
24. A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. F. Timofeeva, A. V. Shishenya, “Mathematical model for calculating coastal wave processes”, *Math. Models Comput. Simul.*, 5:2 (2013), 122–129.
25. Sukhinov A.I. Reconstruction of 2001 Ecological Disaster in the Azov Sea on the Basis of Precise Hydrophysics Models (Book Chapter) // Sukhinov A.I., Sukhinov A.A. // *Parallel Computational Fluid Dynamics 2004: Multidisciplinary Applications*. – 2005. – P. 231-238.

Получено 12.06.2019 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.