ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-227-242

Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей

А. С. Самсонов

Алексей Сергеевич Самсонов — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Аннотация

В статье рассматриваются вопросы трансцендентности и алгебраической независимости, формулируются и доказываются теоремы для некоторых элементов прямых произведений p-адических полей, а также, теорема об оценке многочлена от таких элементов. Пусть $\mathbb{Q}_p$ — пополнение $\mathbb{Q}$ по p-адической норме, поле Ω_p — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1p_2\dots p_n$ — произведение различных простых чисел, а пополнение $\mathbb{Q}$ по g-адической псевдонорме это кольцо $\mathbb{Q}_g$, иными словами $\mathbb{Q}_{p_1}\oplus\dots\oplus\mathbb{Q}_{p_n}$. Рассматривается кольцо $\Omega_g \cong \Omega_{p_1}\oplus\dots\oplus\Omega_{p_n}$, содержащее $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца. Вопросы о трансцендентности и алгебраической независимости над $\mathbb{Q}_g$ элементов Ω_g привели к результатам полученным в статье. При соблюдении некоторых условий можно делать соответствующие выводы для чисел вида $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, где $a_j \in \mathbb{Z}_g$, а неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность.

Ключевые слова: p-адические числа, g-адические числа, трансцендентность, алгебраическая независимость.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:
А. С. Самсонов. Арифметические свойства элементов прямых произведений p-адических полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 227–242.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.464 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-227-242

Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements

A. S. Samsonov

Aleksei Sergeevich Samsonov — postgraduate, department of number theory, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: dontsmoke@inbox.ru

Abstract

The article considers the transcendence and algebraic independence problems, introduce statements and proofs of theorems for some kinds of elements from direct product of p-adic fields and polynomial estimation theorem. Let $\mathbb{Q}_p$ be the p-adic completion of $\mathbb{Q}$, Ω_p be the completion of the algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$, $g = p_1 p_2 \ldots p_n$ be a composition of separate prime numbers, $\mathbb{Q}_g$ be the g-adic completion of $\mathbb{Q}$, in other words $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$. The ring $\Omega_g \cong \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$, contains a subring $\mathbb{Q}_g$. The transcendence and algebraic independence over $\mathbb{Q}_g$ are under consideration. Here are appropriate theorems for numbers like $\alpha = \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j g^{r_j}$, where $a_j \in \mathbb{Z}_g$, and non-negative rational numbers r_j increase to strictly unbounded.

Keywords: p-adic numbers, g-adic numbers, transcendence, algebraic independence.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
A. S. Samsonov, 2020, "Arithmetic properties of direct product of p-adic fields elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 227–242.

1. Введение

Используются следующие обозначения:

1. p — простое число, $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение различных простых чисел;
2. $\mathbb{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел, $\mathbb{Z}_g$ — кольцо целых g-адических чисел;
3. $|x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p x}$ — p-адическая норма, если $x = 0$, считаем, что $\operatorname{ord}_p x = \infty$;
4. $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, это пополнение поля рациональных чисел по p-адической норме;
5. $|x|_g$ — g-адическая псевдонорма, $\mathbb{Q}_g$ — кольцо g-адических чисел, пополнение множества рациональных чисел по g-адической псевдонорме;
6. Ω_p, оно же $\mathbb{C}_p$ — пополнение алгебраического замыкания $\mathbb{Q}_p$.

По аналогии со случаем p-адических чисел, мы хотим построить некое кольцо Ω_g, которое будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$. Поскольку $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, имеет смысл рассмотреть множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. С одной стороны, в подобном расширении уравнения типа $(1,0)x = (0,1)$ не имеют решений. С другой стороны, оно уже является прямой суммой полей, каждое из которых алгебраически замкнуто и полно. Поэтому, кольцо Ω_g будет расширением кольца $\mathbb{Q}_g$ изоморфным $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.

2. Вспомогательные конструкции

Определение 1. *Пусть $\omega_p(x) = g^{-\operatorname{ord}_p x}$ — норма эквивалентная p-адической.*

Согласно [20], с. 12, это действительно так (см. также [4]).

Утверждение 1. *Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — нормированные пространства, с неархимедовыми нормами $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно, тогда*

$$\mu(b_1, \ldots, b_n) = \max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n))$$

является неархимедовой псевднонормой пространства $B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$.

Замечание 1. *Более правильно писать $\mu((b_1, \ldots, b_n))$, однако, здесь и далее мы будем опускать излишние скобки в тех случаях, когда это не вызывает разночтений.*

Для доказательства утверждения 1 проверим свойства неархимедовой псевдонормы:

1. $\mu(b_1, \ldots, b_n) = 0 \Leftrightarrow \max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) = 0 \Leftrightarrow$
$$\mu_1(b_1) = 0, \ldots, \mu_n(b_n) = 0 \Leftrightarrow b_1 = 0, \ldots, b_n = 0 \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) = 0;$$

2. $\mu((b_1, \ldots, b_1)(c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1c_1, \ldots, b_nc_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1c_1), \ldots, \mu_n(b_nc_n)) = \max(\mu_1(b_1)\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n)\mu_n(c_n)) \leqslant$$
$$\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)) \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n)) = \mu(b_1, \ldots, b_n)\mu(c_1, \ldots, c_n);$$

3. $\mu((b_1, \ldots, b_n) + (c_1, \ldots, c_n)) = \mu(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n) =$
$$\max(\mu_1(b_1 + c_1), \ldots, \mu_n(b_n + c_n)) \leqslant \max(\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1)), \ldots, \max(\mu_n(b_n), \mu_n(c_n))) =$$
$$\max(\mu_1(b_1), \mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(b_n), \mu_n(c_n)) =$$
$$\max(\max(\mu_1(b_1), \ldots, \mu_n(b_n)), \max(\mu_1(c_1), \ldots, \mu_n(c_n))) = \max(\mu(b_1, \ldots, b_n), \mu(c_1, \ldots, c_n)).$$

Определение 2. *Пусть ω_g — псевдонорма на пространстве $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, заданная следующим соотношением:*

$$\omega_g(b_1, \ldots, b_n) = \max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)).$$

Это определение корректно в силу утверждения 1.

Определение 3. *Обозначим $\varphi : \mathbb{Q}_g \to \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — прямой изоморфизм колец, а $\psi : \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n} \to \mathbb{Q}_g$ — обратный.*

Замечание 2. *Описание изоморфизма $\mathbb{Q}_g \cong \mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ см. в [22], с. 59.*

Рассмотрим $\mathbb{Q}_g$ и $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ — пространства с псевдонормами $|\ |_g$ и ω_g соответственно.

Утверждение 2. *Изоморфизмы φ и ψ сохраняют псевдонормы.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{Q}_g$, $\varphi(a) = (b_1, \ldots, b_n)$, докажем, что $|a|_g = \omega_g(b_1, \ldots, b_n)$. При $a = 0$ равенство очевидно. При $a \neq 0$ имеет место представление: $a = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k g^k$, где a_k — g-адические цифры, $a_m \neq 0$. Заметим, что для любого $k \in \mathbb{Z}$ и различных простых чисел p и q, число $q^k \in \mathbb{Z}_p$, $\omega_p(q^k) = 1$. Тогда $b_i = \sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k p_1^k \ldots p_n^k = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_{i,k} p_i^k$, где $c_{i,k} \in \mathbb{Z}_{p_i}$. Следовательно $\omega_{p_i}(b_i) \leqslant g^{-m}$, а поскольку a_m не может делиться одновременно на каждое из чисел $p_1, \ldots, p_n$, то хотя бы в одном из случаев достигается равенство. Значит $\max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n)) = g^{-m} = |a|_g$.

Утверждение 3. *Множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$ — кольцо, которое содержит кольцо $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$ в качестве подкольца. Более того, поскольку можно продолжить нормы $\omega_{p_1}, \ldots, \omega_{p_n}$, неархимедова псевдонорма $\omega_g(b_1, \ldots, b_n) = \max(\omega_{p_1}(b_1), \ldots, \omega_{p_n}(b_n))$ тоже имеет продолжение на $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*

Содержание этого утверждения очевидно.

Замечание 3. *Пространство $\mathbb{Q}_g$ представляет из себя множество $\{\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ пробегает множество $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$, а в силу утверждения 2, это множество наследует не только алгебраическую структуру, но и псевдонорму от $\mathbb{Q}_{p_1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}_{p_n}$.*

Теперь мы построим пространство Ω_g. В силу предыдущего замечания, мы можем дополнить множество $\mathbb{Q}_g$ недостающими элементами и обозначить их $\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ пробегает множество $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Более того, продолжение изоморфизма ψ, которое мы построим, будет отображать элементы $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, поэтому совпадение обозначений не приведет к конфликту.

Определение 4. *Пусть $\Omega_g = \{\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)\}$, где $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ пробегает $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$. Алгебраическую структуру и псевдонорму заимствуем из кольца $\Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*

Утверждение 4. *Справедливы следующие заключения.*

1. *Кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.*
2. *Существует продолжение изоморфизма $\psi : \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n} \to \Omega_g$ и продолжение обратного изоморфизма $\varphi : \Omega_g \to \Omega_{p_1} \oplus \ldots \oplus \Omega_{p_n}$.*
3. *Продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.*

Доказательство.

1. В силу замечания 3 и определения 4, очевидно, что кольцо Ω_g содержит $\mathbb{Q}_g$ в качестве подкольца, неархимедова псевдонорма на кольце Ω_g продолжает g-адическую псевдонорму кольца $\mathbb{Q}_g$.
2. Продолжение изоморфизма ψ определим следующим образом, пусть ψ отображает элемент $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ в $\psi(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Такое отображение будет изоморфизмом в силу определения 4. Изоморфизм φ продолжим, как обратный к ψ.
3. В силу предыдущего пункта и определения 4, продолженные изоморфизмы по-прежнему будут сохранять псевдонормы.

Определение 5. *Пусть число $\alpha = \psi(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \Omega_g$. Тогда, обозначим*

$$\operatorname{ord}_g \alpha = \min(\operatorname{ord}_{p_1} \beta_1, \ldots, \operatorname{ord}_{p_n} \beta_n).$$

Замечание 4. *Справедливо следующее соотношение*

$$|\alpha|_g = \omega_g(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \max(\omega_{p_1}(\beta_1), \ldots, \omega_{p_n}(\beta_n)) = g^{-\min(\operatorname{ord}_{p_1} \beta_1, \ldots, \operatorname{ord}_{p_n} \beta_n)} = g^{-\operatorname{ord}_g \alpha}.$$

Определение 6. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, обозначим $m^r \in \Omega_g$ — число $\psi(m^r, \ldots, m^r) \in \Omega_g$.*

Это обозначение не противоречиво, числа $m^r \in \mathbb{Q}_g$ совпадают с числами $\psi(m^r, \ldots, m^r)$.

Замечание 5. *Если $\alpha \in \Omega_g$, то $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, где $\beta_k \in \Omega_{p_k}$. Аналогично, если $\alpha \in \mathbb{Q}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Q}_{p_k}$, если $\alpha \in \mathbb{Z}_g$, то $\beta_k \in \mathbb{Z}_{p_k}$.*

Замечание 6. *Любой многочлен $G \in \mathbb{Q}_g[x]$ можно представить в виде*

$$G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n), \text{ где } P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x]$$

и вычислить по формуле

$$G(\alpha) = \psi(P_1(\beta_1), P_2(\beta_2), \ldots, P_n(\beta_n)), \text{ где } \alpha \in \Omega_g,\ \alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Аналогично, если $G \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m]$, то $P_k \in \mathbb{Q}_{p_k}[x_1, \ldots, x_m]$.

Определение 7. *Обозначим $U_p := \{\beta \in \mathbb{Q}_p : |\beta|_p = 1\}$. Обозначим $U_g := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ |\beta_k|_{p_k} = 1\}$.*

Определение 8. *Обозначим $\mathbb{Z}_g^* := \{\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_g : \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_k \neq 0\}$.*

Определение 9. *Обозначим $0_k := \{G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] : P_k \equiv 0\}$. Обозначим $\widehat{0} := \bigcup\limits_{k=1}^{n} 0_k$.*

Определение 10. *Пусть $\alpha \in \Omega_g$, $\alpha = \psi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$. Будем называть α глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g, если для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и любого многочлена $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x] \backslash \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_k) \neq 0$.*

Определение 11. *Пусть $\alpha_i \in \Omega_g$, $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, $i = 1, \ldots, m$. Будем называть α_i глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g, если для любого $k \in \{1, \ldots, n\}$ и любого многочлена $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ выполняется неравенство $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) \neq 0$.*

3. Первая теорема

Лемма 1. *Пусть*
1) числа r_k и s_k, где $k = 0, 1, 2, \ldots$ являются неотрицательными и рациональными, $r_0, r_1, r_2, \ldots$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ последовательность;
2) существует бесконечное множество номеров j таких, что число r_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_0, \ldots, r_j$ и чисел s_k;
3) числа r'_k такие, что разность $r'_k - r_k$ является неотрицательным целым числом, аналогично для $s'_k - s_k$;
4) неубывающая последовательность t_k является упорядоченной r'_k.

Тогда существует бесконечное множество номеров j таких, что число t_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_j$ и чисел s'_k.

Замечание 7. *Последовательность r'_k стремится к $+\infty$, поэтому неубывающая t_k существует, а четвертый пункт условия является корректным.*

Доказательство. Предположим противное, тогда множество подходящих номеров конечно. Пусть номер n_0 последний из таких, что число t_{n_0} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0-1}$ и чисел s'_k. Если нет ни одного подходящего номера, пусть $n_0 = 0$. Поскольку t_{n_0+1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Получается, что t_{n_0+2} как линейная комбинация с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0+1}$ и чисел s'_k, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k. Таким образом, каждое следующее число в последовательности t_m, при $m > n_0$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_0, \ldots, t_{n_0}$ и чисел s'_k.

Рассмотрим числа $t_0, \ldots, t_{n_0}$ как элементы последовательности r'_k, среди них есть элемент r'_{k_0} с самым большим индексом. Поскольку t_k, очевидно, стремится к $+\infty$, существует номер $n_1 > n_0$ такой, что любое из чисел t_m, при $m > n_1$, больше любого из $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$. Это означает, что для номеров $m > n_1$, в последовательности t_m не встречаются числа $r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$, но любое число $t_m = r'_{k_1}$, является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_0}$ и чисел s'_k, поскольку $m > n_1 > n_0$, причем $k_1 > k_0$, поскольку $m > n_1$. Значит, номер k_1 такой, что число r'_{k_1} является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, r'_1, \ldots, r'_{k_1-1}$ и чисел s'_k. Соответственно, номера, не являющихся таковыми, можно искать при $m \leqslant n_1$, всего их может быть не более чем n_1. Но противоречие в том, что в силу второго и третьего пунктов из условий леммы, существует бесконечное множество номеров j таких, что число r'_{j+1} не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r'_0, \ldots, r'_j$ и чисел s'_k.

Теорема 1. *Пусть $g = p_1 \ldots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}}, \text{ где } a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2 \ldots.$$

Пусть
1) для любого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $i = 1, \ldots, m$ существует бесконечное множество номеров j таких, что число $r_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, r_{i,0}, \ldots, r_{i,j}$ и чисел $r_{l,k}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
3) не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Предположим противное, тогда числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ не являются глобально алгебраически независимыми над $\mathbb{Q}_g$ элементами Ω_g при некотором $m \geqslant 1$. При $m = 1$ подразумеваем, что число α_1 не является глобально трансцендентным над $\mathbb{Q}_g$ элементом Ω_g. Следовательно, считая $\alpha_i = \psi(\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, существуют $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и $G = \psi(P_1, P_2, \ldots, P_n) \in \mathbb{Q}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \widehat{0}$ такие, что $P_k(\beta_{1,k}, \ldots, \beta_{m,k}) = 0$. Значит, числа $\beta_{i,k}$ представляют собой алгебраически зависимые над $\mathbb{Q}_{p_k}$ элементы Ω_{p_k}. Но $a_{i,j} = \psi(b_{i,j,1}, b_{i,j,2}, \ldots, b_{i,j,n})$, откуда

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_{i,j}}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку $a_{i,j} \in \mathbb{Z}_g^*$, воспользуемся тем, что $(p_k/g) \in \mathbb{Z}_{p_k}$ и освободим коэффициенты от целых степеней p_k

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{r'_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Воспользуемся леммой 1 для каждого $i = 1, \ldots, m$ и получим

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b'_{i,j,k} g^{t_{i,j}}, \text{ где } b'_{i,j,k} \in U_{p_k}, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Поскольку не существует номеров i, j_1, j_2 таких, что разница $r_{i,j_1} - r_{i,j_2}$ является целым числом, для каждого $i = 1, \ldots, m$ неотрицательные рациональные числа $t_{i,j}$ образуют возрастающую

и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность, и существует бесконечное множество номеров j таких, что число $t_{i,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{i,0}, \ldots, t_{i,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k' = 0, 1, 2, \ldots$

Переобозначим $p_k = p$, $\beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}}$, $b_{i,j} \in U_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$

$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$, $i = 1, \ldots, m$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_i = \operatorname{ord}_p C_i$. Без ограничения общности $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$.

Рассмотрим C_i как суммы одночленов, $C_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} A_{i,j} g^{s_{i,j}}$, где $A_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$, а числа $s_{i,j}$ представляют собой линейные комбинации чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Можно считать, что никакие два из чисел $s_{i,j}$ не могут отличаться на целое число, иначе слагаемые можно объединить по общей степени. Также, числа $A_{i,j}$ можно считать свободными от степеней p, иначе можно воспользоваться тем, что $(p/g) \in \mathbb{Z}_p$. Для каждого i среди чисел $s_{i,j}$ можно выбрать минимальное, поскольку существует лишь конечное множество линейных комбинаций чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами не превосходящих любое наперед заданное число. Не умаляя общности, пусть числа $s_{i,0}$ будут этими минимальными. Поскольку $\operatorname{ord}_p A_{i,j} g^{s_{i,j}} = s_{i,j}$, то $c_i = \operatorname{ord}_p C_i = \operatorname{ord}_p A_{i,0} g^{s_{i,0}} = s_{i,0}$, следовательно числа c_i представляют собой линейные комбинации конечного набора из чисел 1 и $t_{i',j'}$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Для каждой пары $i, i' = 1, \ldots, m$ обозначим через $N_{i,i'}$ наибольший из номеров j' таких, что число $t_{i',j'}$ входит в вышеупомянутую линейную комбинацию для c_i с положительным коэффициентом. Положим $N_0 = \max_{i,i'=1,\ldots,m} N_{i,i'}$.

Для любой совокупности натуральных чисел n_i, $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{t_{i,j}}, \ \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{t_{i,j}}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

Для $i = 1$ существует бесконечное множество чисел j таких, что число $t_{1,j+1}$ не является линейной комбинацией с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0}, \ldots, t_{1,j}$ и чисел $t_{l,k'}$, где $l \neq i$, $l = 1, \ldots, m$, $k' = 0, 1, 2, \ldots$ Из этого бесконечного множества выберем число $j = n_1$ так, чтобы выполнялись неравенства $n_1 > N_0$ и $t_{1,n_1+1} > c_1$.

Поскольку, по условию теоремы, при любом $i = 1, \ldots, m$ последовательность $t_{i,j}$, возрастая, стремится к $+\infty$ при $j \to +\infty$, можно выбрать числа $n_2, \ldots, n_m$ так, чтобы имели место неравенства

$$c_1 + t_{1,n_1+1} < c_2 + t_{1,n_2+1} < \ldots < c_m + t_{m,n_m+1}.$$

Поскольку $c_1 \geqslant \ldots \geqslant c_m$, то $t_{1,n_1+1} < t_{2,n_2+1} < \ldots < t_{m,n_m+1}$.

Коэффициенты многочлена $P^*((x_1-\beta_1),\ldots,(x_m-\beta_m))$ можно выразить в виде многочленов с целыми рациональными коэффициентами от чисел $\beta_1,\ldots,\beta_m$ и коэффициентов многочлена $P(x_1,\ldots,x_m)$. Если степень многочлена P по совокупности переменных $\deg P \geqslant 2$, то $\deg P = \deg P^*$, в остальных случаях многочлен P^* равен тождественно нулю. Таким образом, $\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2\operatorname{ord}_p(-\overline{B}_{1,n_1}) = 2t_{1,n_1+1}$.

Заметим, что $\operatorname{ord}_p(-\sum\limits_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i}) = c_1 + t_{1,n_1+1} < 2t_{1,n_1+1}$. Таким образом

$$\operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) = \operatorname{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\ldots,-\overline{B}_{m,n_m})) = c_1 + t_{1,n_1+1}.$$

С другой стороны, очевидно, что $t_{1,n_1+1} = \operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\ldots,\underline{B}_{m,n_m}) - c_1$ представляет собой линейную комбинацию с целыми коэффициентами чисел $1, t_{1,0},\ldots,t_{1,n_1},\ldots,t_{m,0},\ldots,t_{m,n_m}$, что противоречит выбору n_1.

4. Вторая теорема

Теорема 2. *Пусть $g = p_1\ldots p_n$ — произведение n различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_j},\ \text{где } a_{i,j} \in Z_g,\ i = 1,\ldots,m,\ j = 0,1,2\ldots.$$

Пусть
1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) $\varphi(a_{i,j}) = (b_{i,j,1}, b_{i,j,2},\ldots,b_{i,j,n})$, для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и для любого n_0, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m,k} := \det(b_{i,n_l,k})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1,k} & \ldots & b_{1,n_m,k} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1,k} & \ldots & b_{m,n_m,k} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{1}$$

3) для каждого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует возрастающая функция $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_n - c_k(n) \to +\infty,\ \text{при } n \to \infty,$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяющих неравенству 1, выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_{p_k} \delta_{n_1,\ldots,n_m,k} \leqslant c_k(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0,\ldots,r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

Тогда числа α_i представляют собой глобально алгебраически независимые над $\mathbb{Q}_g$ элементы Ω_g.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, из предположения противного получается, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$P_k(\beta_{1,k},\ldots,\beta_{m,k}) = 0,$$

$$\beta_{i,k} = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i,j,k} g^{r_j}, \text{ где } b_{i,j,k} \in \mathbb{Z}_{p_k},\ i = 1, \ldots, m,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Переобозначим $p_k = p$, $\beta_{i,k} = \beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}$, $b_{i,j} \in \mathbb{Z}_p$. Числа β_i являются алгебраически зависимыми над $\mathbb{Q}_p$ элементами Ω_p, а $P(x_1, \ldots, x_m)$ является отличным от нуля многочленом с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$ наименьшей степени по совокупности переменных таким, что $P(\beta_1, \ldots, \beta_m) = 0$.

Также, адаптируем остальные условия теоремы:
1) неотрицательные рациональные числа r_j образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого n_0, существуют натуральные числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ такие, что $n_1 > n_0$ и

$$\delta_{n_1,\ldots,n_m} := \det(b_{i,n_l})_{i,l=1,\ldots,m} = \begin{vmatrix} b_{1,n_1} & \ldots & b_{1,n_m} \\ \ldots & & \ldots \\ b_{m,n_1} & \ldots & b_{m,n_m} \end{vmatrix} \neq 0; \tag{2}$$

3) существует возрастающая функция $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ такая, что

$$r_n - c(n) \to +\infty, \text{ при } n \to \infty, \tag{3}$$

и для любого набора натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяющих неравенству 2, выполняется неравенство

$$\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1);$$

4) для любого номера j число r_{j+1} не является суммой линейной комбинации чисел $r_0, \ldots, r_j$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа.

$$P(x_1, \ldots, x_m) = P((x_1 - \beta_1) + \beta_1, \ldots, (x_m - \beta_m) + \beta_m) =$$

$$= P(\beta_1, \ldots, \beta_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)(x_i - \beta_i) + P^*((x_1 - \beta_1), \ldots, (x_m - \beta_m)),$$

обозначим $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m)$.

Поскольку степень многочлена $\frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m)$ по совокупности переменных ниже, чем степень $P(x_1, \ldots, x_m)$, в силу определения последнего, $C_i = \frac{\partial P}{\partial x_i}(\beta_1, \ldots, \beta_m) \neq 0$. Обозначим $c_0 = \min\limits_i \operatorname{ord}_p C_i$.

Для любой совокупности натуральных чисел n_i, $i = 1, \ldots, m$ обозначим

$$\underline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=0}^{n_i} b_{i,j} g^{r_j},\ \overline{B}_{i,n_i} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j} g^{r_j}.$$

Тогда

$$P(\underline{B}_{1,n_1}, \ldots, \underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i \overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1}, \ldots, -\overline{B}_{m,n_m}).$$

В силу определения $\overline{B}_{i,n_i}$, получаем

$$-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} = -\sum_{i=1}^{m} C_i \sum_{j=n_i+1}^{\infty} b_{i,j}g^{r_j} = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} g^{r_j}(-\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}) = \sum_{j=n_i+1}^{\infty} d_j g^{r_j},$$

где использовано обозначение

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j}.$$

Пусть числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ удовлетворяют неравенству 2. Среди чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ есть отличные от нуля, иначе система уравнений $\sum\limits_{i=1}^{m} C_i b_{i,j} = 0$, $j = n_1, \ldots, n_m$ имеет нетривиальное (поскольку $C_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$) решение $C_1, \ldots, C_m$, что противоречит неравенству 2.

Рассмотрим при произвольных $N_0 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$, удовлетворяющих неравенству 2, равенства

$$d_j = -\sum_{i=1}^{m} C_i b_{i,j},\ j = n_1, \ldots, n_m,$$

как систему линейных уравнений относительно неизвестных $C_1, \ldots, C_m$. Применяя к ней правило Крамера, получаем, что числа $C_1\delta, \ldots, C_m\delta$ являются линейными комбинациями чисел $d_{n_1}, \ldots, d_{n_m}$ с коэффициентами из $\mathbb{Z}_p$. Значит для любого $i = 1, \ldots, m$ справедливо неравенство:

$$\min_j \operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant \operatorname{ord}_p C_i\delta.$$

С другой стороны, поскольку $\operatorname{ord}_p \delta_{n_1,\ldots,n_m} \leqslant c(n_1)$, получаем

$$\min_i(\operatorname{ord}_p C_i\delta) = c_0 + \operatorname{ord}_p \delta \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Это значит, что среди чисел $\operatorname{ord}_p d_{n_j}$ есть хотя бы одно такое, что

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1).$$

Из соотношения 3 следует, что существует натуральное число N_0 такое, что при $n_1 \geqslant N_0$ выполняется неравенство $c_0 + c(n_1) < r_{n_1}$. Значит,

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} \leqslant c_0 + c(n_1) < r_{n_1} \leqslant r_{n_j}.$$

Откуда получаем неравенство

$$\operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j}.$$

Поскольку $\operatorname{ord}_p d_l \geqslant 0$, $r_l \to \infty$, величина $\operatorname{ord}_p d_l + r_l \to \infty$, при $l \to \infty$. Следовательно, для любого натурального числа n_j среди чисел $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ при $l \geqslant n_j$ существует наименьшее. Более того, если для l значение $\operatorname{ord}_p d_l + r_l$ минимальное, то

$$\operatorname{ord}_p d_l + r_l \leqslant \operatorname{ord}_p d_{n_j} + r_{n_j} < 2r_{n_j} \leqslant 2r_l.$$

Учитывая все сказанное, существует достаточно большое l такое, что некоторое число $l+1$ — наибольшее из конечного числа номеров, при котором достигается вышеупомянутое наименьшее значение для $\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}$. Тогда

$$\operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1} < 2r_{l+1}.$$

Рассмотрим равенство

$$P(\underline{B}_{1,n_1},\dots,\underline{B}_{m,n_m}) = -\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\dots,-\overline{B}_{m,n_m}) =$$

$$= -\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\dots,-\overline{B}_{m,n_m}),$$

при выбранном значении l. $P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\dots,-\overline{B}_{m,n_m})$ либо равен нулю, либо состоит из слагаемых, порядки которых не меньше, чем $2r_{l+1}$ (как и в предыдущей теореме). Поэтому

$$\operatorname{ord}_p P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\dots,-\overline{B}_{m,n_m}) \geqslant 2r_{l+1}.$$

Первый член ряда

$$\sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j}$$

имеет наименьший порядок ввиду выбора l. Следовательно,

$$\operatorname{ord}_p \sum_{j=l+1}^{\infty} d_j g^{r_j} = r_{l+1} + \operatorname{ord}_p d_{l+1}.$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\operatorname{ord}_p P(\underline{B}_{1,n_1},\dots,\underline{B}_{m,n_m}) = \operatorname{ord}_p(-\sum_{i=1}^{m} C_i\overline{B}_{i,n_i} + P^*(-\overline{B}_{1,n_1},\dots,-\overline{B}_{m,n_m})) = \operatorname{ord}_p d_{l+1} + r_{l+1}.$$

Левая часть этого равенства представляет собой линейную комбинацию с неотрицательными целыми коэффициентами чисел $r_0,\dots,r_l$, а $\operatorname{ord}_p d_{l+1}$ представляет собой линейную комбинацию чисел $1, r_0,\dots,r_l$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Таким образом, число r_{l+1} представляет собой сумму линейной комбинации чисел $r_0,\dots,r_l$ с целыми коэффициентами и неположительного целого числа вопреки условиям теоремы.

5. Третья теорема

Теорема 3. *Пусть $g = p_1\dots p_n$ — произведение различных простых чисел,*

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} g^{r_{i,j}},\ \alpha_i \in \Omega_g,\ a_{i,j} \in U_g,\ i = 1,\dots,m.$$

Пусть
1) для любого $i = 1,\dots,m$ положительные рациональные числа $r_{i,j}$ образуют возрастающую и стремящуюся к $+\infty$ при $j \to +\infty$ последовательность;
2) для любого $d \in \mathbb{N}$ существует $N_1 = N_1(d) \in \mathbb{N}$ такое, что для любого целого $N \geqslant N_1$, не могут одновременно выполняться следующие соотношения:

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad D_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant 2d, \quad \sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| > 0;$$

3) $r_j = \max\{r_{1,j},\dots,r_{m,j}\}$, для любых натуральных чисел d и h существует $N_2 = N_2(d,h) \in \mathbb{N}$ такое, что неравенство

$$r_{i,N+1} > h + dr_N$$

выполняется для любого $i = 1, \ldots, m$ и для любого натурального $N \geqslant N_2$;

Если многочлен $G = \psi(P_1, \ldots, P_n) \in \mathbb{Z}_g[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, а при некотором $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, $\deg G = \deg P_{k_0}$ и любой коэффициент B_{k_0} многочлена P_{k_0} таков, что либо $B_{k_0} = 0$, либо $\operatorname{ord}_{p_{k_0}} B_{k_0} \leqslant h$. Тогда неравенство

$$|G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|_g \geqslant g^{-h-dr_N}$$

выполняется при $N \geqslant \max(N_1, N_2)$.

Доказательство. Сведем рассуждение к p-адическому случаю. $G = \psi(P_1, \ldots, P_n)$, $\alpha_i = \psi(\alpha_{i,1}, \ldots, \alpha_{i,n})$, для каждого $i = 1, \ldots, m$. Достаточно показать, что для $k = k_0$ справедливо неравенство:

$$\operatorname{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N.$$

Тогда $\operatorname{ord}_g G(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \min\limits_k \operatorname{ord}_{p_k} P_k(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{m,k}) \leqslant h + dr_N$, а это и надо доказать.

Переобозначим многочлен и соответствующие компоненты, далее будем рассматривать условия теоремы в следующем контексте:
a) $P = P_{k_0}$, $p = p_{k_0}$, $P \in \mathbb{Z}_p[x_1, \ldots, x_m] \backslash \{0\}$, $\deg P = d$;
b) любой ненулевой коэффициент B этого многочлена таков, что $\operatorname{ord}_p B \leqslant h$;
c) $\beta_i = \alpha_{i,k_0}$, $\beta_i = \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_{i,j} g^{r_{i,j}}$, $\beta_i \in \Omega_p$, $b_{i,j} \in U_p$, $i = 1, \ldots, m$.

Тогда, достаточно доказать, что

$$\operatorname{ord}_p P(\beta_1, \ldots, \beta_m) \leqslant h + dr_N \quad \text{или} \quad |P(\beta_1, \ldots, \beta_m)|_p \geqslant p^{-h-dr_N}.$$

Проверим, что в случае $d = 0$ теорема справедлива. Действительно, если $P = B$, тогда $|P|_p = |B|_p = p^{-\operatorname{ord}_p B} \geqslant p^{-h}$. Далее будем считать, что $d > 0$.

Мы воспользуемся следующими леммами.

Лемма 2. *Пусть p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, числа $R_1, \ldots, R_m \in \mathbb{Q}$ различны, а p-адическая норма любого из чисел $B_1, \ldots, B_m \in \Omega_p$ равна единице, тогда*

$$|B_1 g^{R_1} + \ldots + B_m g^{R_m}|_p = p^{-\min\limits_i R_i}.$$

Лемма 3. *Для любого $N \geqslant N_1 = N_1(d)$ выполнено неравенство:*

$$|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-h-dr_N},$$

где $\beta_{i,N} = \sum\limits_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}}$.

Доказательство. Любой, отличный от нуля, многочлен от m переменных представляет из себя сумму одночленов. Для удобства, будем считать одночлены каждого многочлена упорядоченными следующим образом. Одночлен $x_1^{j_1} \ldots x_m^{j_m}$ будет идти раньше одночлена $x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$, если $j_1 + \ldots + j_m > l_1 + \ldots + l_m$, а в случае равенства, если существует $s \in \{0, \ldots, m-2\}$ такое, что $j_1 = l_1, \ldots, j_s = l_s$, $j_{s+1} > l_{s+1}$.

Попробуем подставить числа $x_i = \beta_{i,N}$ в многочлен, для любого $l_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ мы получим

$$\beta_{i,N}^{l_i} = \left(\sum_{j=0}^{N} b_{i,j} g^{r_{i,j}} \right)^{l_i},$$

а это число представляет из себя сумму членов вида:

$$Bg^{l_{i,N}r_{i,N}+\ldots+l_{i,0}r_{i,0}},$$

где $B \in \mathbb{Z}_p$, $l_{i,N}, \ldots, l_{i,0} \in \mathbb{N}_0$, $l_{i,N} + \ldots + l_{i,0} = l_i$. Таким образом, при подстановке $(x_1, \ldots, x_m) \to (\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ каждый одночлен $x_1^{l_1} \ldots x_m^{l_m}$ будет представлен суммой членов вида:

$$Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}, \tag{4}$$

где $C \in \mathbb{Z}_p$ и $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$. Многочлен P является суммой одночленов, таким образом, $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ будет представлен суммой членов вида 4, а поскольку $\deg P = d$, значит $\sum\limits_{j=0}^{N}\sum\limits_{i=1}^{m} l_{i,j} = \sum\limits_{i=1}^{m} l_i \leqslant d$.

Пусть $B_0 x_1^{d_1} \ldots x_m^{d_m}$, где $B_0 \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$, $d_1 + \ldots + d_m = d \in \mathbb{N}$, первый одночлен в представлении P. Разумеется, мы используем ранее упомянутый порядок одночленов. При подстановке $(x_1, \ldots, x_m) \to (\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})$, этот одночлен станет суммой, которая содержит выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$, где $\widetilde{B_0} \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$, $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0$. Попробуем привести подобные члены в сумме $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$ по соответствующим степеням g и покажем, что выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы. Действительно, поскольку они имеют вид $Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}$, где $C \in \mathbb{Z}_p$, $\sum\limits_{j=0}^{N} l_{i,j} = l_i$, значит при приведении подобных членов порядки коэффициентов будут целыми числами. Тогда, если выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ взаимно уничтожится с другими членами суммы, значит есть хотя бы один член вида $Cg^{\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j}r_{i,j}}$ такой, что выражение

$$\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} + \sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N} - \operatorname{ord}_p C - \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j} r_{i,j}$$

является целым числом, откуда

$$\sum_{i=1}^{m} D_{i,N} r_{i,N} + \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{m} D_{i,j} r_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

где, для $i = 1, \ldots, m$, мы полагаем $D_{i,N} := d_i - l_{i,N}$ и $D_{i,j} := -l_{i,j}$, для $j = 0, \ldots, N-1$. Но это противоречит условию теоремы поскольку

$$\sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} |D_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{m} d_i + \sum_{j=0}^{N}\sum_{i=1}^{m} l_{i,j} \leqslant 2d$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} |D_{i,N}| = \sum_{i=1}^{m} |d_i - l_{i,N}| > 0.$$

Поскольку, последняя сумма обнуляется только если $l_{i,N} = d_i$, $i = 1, \ldots, m$, а это может произойти только в том случае, если мы рассмотрели выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ дважды.

Поскольку $\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} = \operatorname{ord}_p B_0 \leqslant h$, используя лемму 2 и тот факт, что выражение $\widetilde{B_0} g^{\sum_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}}$ не может взаимно уничтожиться с другими членами суммы $P(\beta_{i,N}, \ldots, \beta_{m,N})$, получаем

$$|P(\beta_{1,N}, \ldots, \beta_{m,N})|_p \geqslant p^{-\operatorname{ord}_p \widetilde{B_0} - \sum\limits_{i=1}^{m} d_i r_{i,N}} \geqslant p^{-h-dr_N},$$

как и предполагалось.

Продолжим доказательство теоремы.

Заметим, что

$$P(\beta_1,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{i,N},\ldots,\beta_{m,N})=$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i-1,N},\beta_i,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i,N},\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)\right).$$

$|P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i-1,N},\beta_i,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{i,N},\beta_{i+1},\ldots,\beta_m)|_p\leqslant|\beta_i-\beta_{i,N}|_p$, поскольку все числа β_i и $\beta_{i,N}$ имеют p-адическую норму меньше единицы, $\deg P=d>0$, а коэффициенты многочлена лежат в $\mathbb{Z}_p$. Более того:

$$|\beta_i-\beta_{i,N}|_p=p^{-r_{i,N+1}}<p^{-h-dr_N},$$

последнее неравенство в силу условия 3 выполняется при $N\geqslant N_2$. Таким образом

$$|P(\beta_1,\ldots,\beta_m)-P(\beta_{1,N},\ldots,\beta_{m,N})|_p<p^{-h-dr_N}.$$

Используя это неравенство и лемму 3 получим:

$$|P(\beta_1,\ldots,\beta_m)|_p\geqslant p^{-h-dr_N}$$

для любого $N\geqslant\max(N_1,N_2)$, что и требовалось доказать.

6. Заключение

Данная статья, как исследование, продолжает некоторые работы П. Бундшу и В. Г. Чирского. Доказанные теоремы обобщают некоторые результаты из [5], [6], [7] в том смысле, что для частного случая $g=p$ уже были доказаны в соответствующих формулировках.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams W. Transcendental numbers in the p-adic domain // Amer. J. Math., 1966, V. 88, P. 279–307.

2. Amice Y. Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris, 1975.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse, 2004, V. XIII, №2, P. 241–260.

4. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1985.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I // Arch. Math., 2002, V. 79, P. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II // ActaArithm., 2004, V. 113, №4, P. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$ // Moscow Journ. of Comb. and Number Th., 2015, V. 5, iss. 1-2, P. 14–20.

8. Чирский В. Г. Метод Зигеля-Шидловского в p-адической области. // Фундаментальная и прикладная математика. 2005, Т. 11, №6, С. 221–230.

9. Chirskii V. G. Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$ // Russian Journ. of Math. Physics, 2013, V. 20, №2, P. 149–154.

10. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады академии наук, 2014, Т. 459, №6, С. 677–679.

11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Изв. РАН. Сер. мат., 2014, Т. 78, №6, С. 193—210.

12. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Моск. ун-та, Сер.1, мат., мех., 2015, №1, С. 59–61.

13. Чирский В. Г. Арифметические свойства целых полиадических чисел // Чебышёвский сборник, 2015, Т. 16, вып. 1, С. 254–264.

14. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Изв. РАН. Сер. мат., 2017, Т. 81, №2, С. 215—232.

15. Chirskii V. G. Topical problems of the theory of transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko // Russian Journ. of Math. Physics, 2017, V. 24, №2, P. 153–171.

16. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических f-рядов // Доклады академии наук, 2018, Т. 483, №3, С. 257—259.

17. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series // Doklady Mathematics, 2018, V. 98, №3, P. 589-–591.

18. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers // Russian Journ. of Math. Physics, 2019, V. 26, №3, P. 286–305.

19. Chirskii V. G. Arithmetic properties of generalized hypergeometric series // Russian Journ. of Math. Physics, 2020, V. 27, №2, P. 175–184.

20. Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции; пер. с англ. В. В. Шокурова, под ред. Ю. И. Манина. М.: Мир, 1982.

21. Mahler K. Uber transzendente p-adische Zahlen // Compos. Math. 1935, V. 2, P. 259–275.

22. Mahler K. p-adic numbers and their functions; second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.

23. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

REFERENCES

1. Adams W. 1966, “Transcendental numbers in the p-adic domain”, *Amer. J. Math.*, vol. 88, pp. 279–307.

2. Amice Y. 1975, Les nombers p-adiques. Presses Universitaires de France, Paris.

3. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou J. 2004, “Effective estimates for global relations on Euler-type series”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, vol. XIII, no. 2, pp. 241–260.

4. Borevich Z. I., Shafarevich I. R. 1985, Teoriya Chisel, [The theory of numbers], third edition. “Nauka”, Moscow.

5. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2002, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, I”, *Arch. Math.*, vol. 79, pp. 345–352.

6. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2004, “On the algebraic independence of elements from $\mathbb{C}_p$ over $\mathbb{Q}_p$, II”, *ActaArithm.*, vol. 113, no. 4, pp. 309–326.

7. Bundschuh P., Chirskii V. G. 2015, “Estimating polynomials over $\mathbb{Z}_p$ at points from $\mathbb{C}_p$”, *Moscow Journ. of Comb. and Number Th.*, vol. 5, iss. 1–2, pp. 14–20.

8. Chirskii V. G. 2005, “Siegel—Shidlovskii method in p-adic domain”, *Fundamental and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 6, pp. 221–230.

9. Chirskii V. G. 2013, “Values of Analytic functions at points of $\mathbb{C}_p$”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 20, no. 2, pp. 149–154.

10. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of poliadic series with periodic coefficients”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 459, no. 6, pp. 677–679.

11. Chirskii V. G. 2014, “Arithmetic properties of hypergeometric series with irrational parameters”, *Izv. RAN. Ser. mat.*, vol. 78, no. 6, pp. 193—210.

12. Chirskii V. G. 2015, “On the arithmetic properties of Euler-type series”, *Vestnik Mosk. Univ. Ser.1, mat., mech.*, no. 1, pp. 59–61.

13. Chirskii V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integer numbers”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, no. 1, pp. 254–264.

14. Chirskii V. G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients”, *Izv. RAN. Ser. mat.* vol. 81, no. 2, pp. 215–232.

15. Chirskii V. G. 2017, “Topical problems of the theory of Transcendental numbers: Developments of approaches to tyeir solutions in the works of Yu.V. Nesterenko”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 24, no. 2, pp. 153–171.

16. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi akademii nauk*, vol. 483, no. 3, pp. 257–259.

17. Chirskii V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric f-series”, *Dokladi Mathematics*, vol. 98, no. 3, pp. 589–591.

18. Chirskii V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 26, no. 3, pp. 286–305.

19. Chirskii V. G. 2020, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric series”, *Russian Journ. of Math. Physics*, vol. 27, no. 2, pp. 175–184.

20. Koblitz N. 1982, p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions, 2nd ed.

21. Mahler K. 1935, “Uber transzendente p-adische Zahlen”, *Compos. Math.*, vol. 2, pp. 259–275.

22. Mahler K. 1981, p-adic numbers and their functions, second edition, Cambridge University Press, Cambridge.

23. Shidlovskii A. B. 1987, Transcendentnie chisla, [Transcendental numbers], “Nauka”, Moscow.

Получено 19.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.