ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций

О. Г. Ровенская, О. А. Новиков

Ольга Геннадиевна Ровенская — кандидат физико-математических наук, Донбасская государственная машиностроительная академия (г. Краматорск, Украина).
e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com

Олег Александрович Новиков — кандидат физико-математических наук, Донбасский государственный педагогический университет (г. Славянск, Украина).
e-mail: sgpi@slav.dn.ua

Аннотация

Работа посвящена вопросам приближения периодических функций высокой гладкости средними арифметическими сумм Фурье. Наиболее естественным и простым примером линейного процесса аппроксимации периодических непрерывных функций действительной переменной является приближение елементами последовательности частичных сумм ряда Фурье. Известно, что последовательности частичных сумм ряда Фурье не являются равномерно сходящимися на всем пространстве C 2π-периодических непрерывных функций. Поэтому значительное число работ данного направления посвящено изучению аппроксимативных свойств других методов приближения, которые для заданной функции f образуются с помощью некоторых преобразований частичных сумм ее ряда Фурье, и позволяют построить последовательности тригонометрических полиномов, которые равномерно сходятся для каждой функции $f \in C$. В частности, на протяжении последних десятилетий интенсивно изучаются суммы Валле Пуссена и суммы Фейера. В настоящее время в публикациях этой тематики накоплено значительное количество фактического материала. Одним из наиболее важных направлений в этой области является изучение асимптотического поведения верхних граней уклонений средних арифметических сумм Фурье по различным классам периодических функций. Методы исследования интегральных представлений уклонений тригонометрических полиномов, которые порождаются линейными методами суммирования рядов Фурье, возникли и получили свое развитие в работах С.М. Никольского, С.Б. Стечкина, Н.П. Корнейчука, В.К. Дзядыка и их учеников.

Целью работы является систематизация известных результатов, касающихся приближения классов периодических функций высокой гладкости средними арифметическими сумм Фурье, и представление новых фактов, полученных для их частных случаев.

В работе изучено аппроксимативные свойства сумм Фейера на классах периодических функций, которые можно регулярно продолжить в соответствующую полосу комплексной плоскости. Получена асимптотическая формула для верхних граней уклонений в равномерной метрике сумм Фейера на классах интегралов Пуассона. Полученная формула обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова-Никольского без дополнительных условий.

Ключевые слова: асимптотическое равенство, сумма Фейера, интеграл Пуассона.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
О. Г. Ровенская, О. А. Новиков. О приближении средними Фейера классов аналитических периодических функций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 218–226.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-218-226

On approximation of classes of analytic periodic functions by Fejer means

O. G. Rovenska, O. A. Novikov

Olga Gennadievna Rovenskaya — PhD, Donbas State Engeneering Academy (Kramatorsk, Ukraine).
e-mail: rovenskaya.olga.math@gmail.com
Oleg Alexandrovich Novikov — PhD, Donbass State Pedagogical University (Slavyansk, Ukraine).
e-mail: sgpi@slav.dn.ua

Abstract

The paper is devoted to the approximation of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums. The simplest and natural example of a linear process of approximation of continuous periodic functions of a real variable is the approximation of these functions by partial sums of the Fourier series. However, the sequences of partial Fourier sums are not uniformly convergent over the entire class of continuous 2π-periodic functions. In connection with this, a significant number of papers is devoted to the study of the approximative properties of other approximation methods, which are generated by certain transformations of the partial sums of Fourier series and allow us to construct sequences of trigonometrical polynomials that would be uniformly convergent for each function $f \in C$. In particular, over the past decades, de la Vallee Poussin sums and Fejer sums have been widely studied. Today, publications have accumulated a large amount of factual material. One of the most important directions in this field is the study of the asymptotic behavior of upper bounds of deviations of arithmetic means of Fourier sums on different classes of periodic functions. Methods of investigation of integral representations of deviations of trigonometric polynomials generated by linear methods of summation of Fourier series, were originated and developed in the works of S.M. Nikolsky, S.B. Stechkin, N.P. Korneichuk, V.K. Dzadyk and others.

The aim of the work is to systematize known results related to the approximation of classes of periodic functions of high smoothness by arithmetic means of Fourier sums and to present new facts obtained for particular cases.

and to present new approximative properties of Fejer sums on the classes of periodic functions that can be regularly extended into the corresponding strip of the complex plane. Under certain conditions, we obtained asymptotic formulas for upper bounds of deviations in the uniform metric of Fejer sums on Poisson integrals classes. The deduced formula provides a solution of the corresponding Kolmogorov-Nikolsky problem without any additional conditions.

Keywords: asymptotic equation, Fejer sum, Poisson integral.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
O. G. Rovenska, O. O. Novikov, 2020, "On approximation of classes of analytic periodic functions by Fejer means", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 218–226.

1. Введение

Пусть $C^q_{\beta,\infty}$ — множество непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$, которые с точностью до константы можно задать с помощью свертки

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^q_\beta(x+t)P^q_\beta(t),$$

где

$$P^q_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt + \frac{\beta\pi}{2}), \quad q \in (0;1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

— ядро Пуассона, функция $f^q_\beta(t)$ почти всюду удовлетворяет условию $|f^q_\beta(t)| \leq 1$. Известно, (напр., [1, с. 31]) что классы $C^q_{\beta,\infty}$ содержат функции $f(x)$, для которых возможно аналитическое продолжение $f(z) = f(x+iy)$ в полосу комплексной плоскости

$$|\mathrm{Im}\ z| \leqslant \ln\frac{1}{q}.$$

Суммы Валле Пуссена для заданной функции $f \in L$ определяются соотношением

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

где $S_n(f;x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции f. В случае, когда $p = 1$ суммы Валле Пуссена совпадают с суммами Фурье, а при $p = n$ — с суммами Фейера функции f

$$V_{n,n}(f;x) = \sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

Вопросы, связанные с исследованием асимптотического поведения верхних граней уклонений тригонометрических полиномов $V_{n,p}(f;x)$ и их частных случаев на классах интегралов Пуассона, изучались во многих работах. В 1946 г. С.М. Никольским [2] было получено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};S_n\right) = \sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}} ||f(x) - S_n(f;x)||_C = \frac{8K(q)}{\pi^2}q^n + O(1)\frac{q^n}{n},$$

где

$$K(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода, $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n. В 1980 г. С.Б. Стечкин [3] уточнил этот результат:

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};S_n\right) = \frac{8K(q)}{\pi^2}q^n + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и q. Отметим, что приведенные равенства являются асимптотически точными при любых значениях параметров, которые они содержат. Аналогичные задачи для классов периодических функций $C^q_\beta H_\omega$, которые

учитывают более тонкие свойства функций по сравнению с классами $C^q_{\beta,\infty}$, были решены А.И. Степанцом в работах [4, 5].

Асимптотическая формула для верхних граней уклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^q_{\beta,\infty}$ в случае $n-p\to\infty$, $p\to\infty$ получена в работе В.И. Рукасова, С.О. Чайченко [6] (также [7])

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\sup_{f\in C^q_{\beta,\infty}}||f(x)-V_{n,p}(f;x)||_C=$$

$$=\frac{4}{\pi(1-q^2)}\frac{q^{n-p+1}}{p}+O(1)\left[\frac{q^n}{(1-q^2)p}+\frac{q^{n-p+1}}{(1-q)^3(n-p)p}\right],$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, p, q.

В 2004 г. А.С. Сердюк [8] доказал более общую формулу

$$\mathcal{E}\left(C^q_{\beta,\infty};V_{n,p}\right)=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{4}{\pi^2}K_{q,p}+O(1)\left(\frac{q}{(n-p+1)(1-q)^s}\right)\right),$$

где

$$K_{q,p}=\int\limits_0^\pi\frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt+q^{2p}}}{1-2q\cos pt+q^2}dt,\quad s=s(p)=\begin{cases}1, & p=1,\\ 3, & p=2,3,\dots,\end{cases}$$

$O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, p и q. В случае произвольного $p=1,2,\dots,n$ поведение величины $K_{q,p}$ определяется следующим соотношением, полученным в [9]:

$$K_{q,p}=2\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}K(q^p).$$

Вопросы приближения классов интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена рассмотрены в работах [10, 12, 11].

В работе [13] (также [14]) авторами получено асимптотическое равенство для верхних граней уклонений сумм Фейера на классах аналитических функций $C^q_{\beta,\infty}$ в случае $\beta=0$ и $q\in(0;q_0]$, $q_0=\sqrt{2+\sqrt5-2\sqrt{2+\sqrt5}}\approx0,346$

$$\mathcal{E}\left(C^q_{0,\infty},\sigma_n\right)=\sup_{f\in C^q_{0,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C=\frac{4q}{\pi n(1+q^2)}+O(1)\frac{q^n}{n},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n.

На классах аналитических функций изучались аппроксимативные свойства и других приближающих методов [15, 16, 17].

В данной работе получено асимптотическое равенство для величин

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right)=\sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||f(x)-\sigma_n(f;x)||_C.$$

2. Результат

Имеет место следующая теорема.

Теорема. *Пусть $q\in(0;1)$. Тогда при $n\to\infty$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty},\sigma_n\right)=\frac{4q}{\pi n(1-q^2)}+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3},\tag{1}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q.

Доказательство.
Обозначим

$$\delta_n(f;x) = f(x) - \sigma_n(f;x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\rho_k(f;x), \tag{2}$$

где

$$\rho_k(f;x) = f(x) - S_k(f;x).$$

Учитывая, что $f \in C^q_{1,\infty}$ величина $\rho_m(f;x)$ может быть представлена в виде

$$\rho_m(f;x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\sum_{k=m+1}^{\infty} q^k \sin kt dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+m+1}\sin(k+m+1)t dt =$$

$$= \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\Big(\sin(m+1)t\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt + \cos(m+1)t\sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt\Big)dt. \tag{3}$$

Используя формулы (напр., [1, с. 123])

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k\cos kt = \frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2},$$

равенство (3) можно переписать в следующем виде

$$\rho_m(f;x) = \frac{q^{m+1}}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\Big\{\frac{1-q\cos t}{1-2q\cos t+q^2}\sin(m+1)t + \frac{q\sin t}{1-2q\cos t+q^2}\cos(m+1)t\Big\}dt. \tag{4}$$

Объединяя (2) и (4), получим

$$\delta_n(f;x) = \frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{f_1^q(x+t)}{1-2q\cos t+q^2}\sum_{k=1}^{n} q^k(\sin kt - q\sin(k-1)t)dt. \tag{5}$$

Используя следствия из формулы Эйлера

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

и выполняя элементарные преобразования, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} q^k(\sin kt - q\sin(k-1)t) = \sum_{k=1}^{n} q^k\Big(\frac{e^{ikt}-e^{-ikt}}{2i} - q\frac{e^{i(k-1)t}-e^{-i(k-1)t}}{2i}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big[\big(qe^{it}\big)^k - \big(qe^{-it}\big)^k\Big] - q^2\Big[\big(qe^{it}\big)^{k-1} - \big(qe^{-it}\big)^{k-1}\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2i}\Big\{\Big[\frac{qe^{it}}{1-qe^{it}} - \frac{qe^{-it}}{1-qe^{-it}}\Big] - q^2\Big[\frac{1}{1-qe^{it}} - \frac{1}{1-qe^{-it}}\Big]\Big\} -$$

$$-\frac{1}{2i}\Big\{\Big[\frac{(qe^{it})^{n+1}}{1-qe^{it}} - \frac{(qe^{-it})^{n+1}}{1-qe^{-it}}\Big] - q^2\Big[\frac{(qe^{it})^n}{1-qe^{it}} - \frac{(qe^{-it})^n}{1-qe^{-it}}\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{q(1-q^2)\sin t + O(1)q^{n+1}}{1-2q\cos t+q^2},$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n, q.

Учитывая что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = O(1)\frac{1}{(1-q)^3},$$

на основании формулы (5), можем записать

$$\delta_n(f;x) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(x+t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{6}$$

Так как для функций $f \in C^q_{1,\infty}$ выполняется условие

$$\operatorname{ess\,sup}|f_1^q(x)| \leqslant 1, \quad x \in [-\pi;\pi],$$

то, на основании (6) имеет место неравенство

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty},\sigma_n\right) \leq \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{7}$$

Учитывая, что классы $C^q_{\beta,\infty}$ инвариантны относительно сдвига аргумента (напр., [1, с. 78]), имеем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right) = \sup_{f\in C^q_{1,\infty}}||\delta_n(f;0)||_C.$$

Найдем функцию $f_0 \in C^q_{1,\infty}$ для которой имеет место равенство

$$\delta_n(f_0;0) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{8}$$

На основании (6) для любой $f \in C^q_{1,\infty}$ можем записать

$$\delta_n(f;0) = \frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt + O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}.$$

Отметим, что для функции $f_0(t)$ такой, что

$$(f_0(t))_1^q = \operatorname{sign}\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2},$$

имеет место

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^q(t)\frac{(1-q^2)\sin t}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt,$$

и, кроме того, $f_0(t) \in C^q_{1,\infty}$ для любых $q \in (0;1)$. Следовательно, для найденной функции $f_0(t)$ соотношение (8) справедливо.

Объединяя (7), (8), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^q_{1,\infty};\sigma_n\right)=\frac{q}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-q^2)|\sin t|}{(1-2q\cos t+q^2)^2}dt+O(1)\frac{q^n}{n(1-q)^3}. \tag{9}$$

Вычислим интеграл в правой части (9)

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{|\sin t|dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin t dt}{(1-2q\cos t+q^2)^2}=\frac{-1}{q(1-2q\cos t+q^2)}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{(1-q^2)^2}. \tag{10}$$

На основании (9), (10) получаем асимптотическую формулу (1). Теорема доказана.

3. Заключение

Асимптотическая формула (1) обеспечивает решение соответствующей задачи Колмогорова-Никольского [5] без дополнительных условий.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.

2. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 3. С. 207–256.

3. Стечкин С. Б. Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1980. Т. 145. С. 126–151.

4. Степанец А. И. Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 2. С. 171–173.

5. Степанец А. И. Решение задачи Колмогорова-Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций // Мат. сборник. 2001. Т. 192, № 1. С. 113–138.

6. Рукасов В. И., Чайченко С. О. Приближение аналитических периодических функций суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 12. С. 1653–1668.

7. Рукасов В. И., Новиков О. А. Приближение аналитических функций суммами Валле–Пуссена // Труды института математики НАН Украины. 1998. Т. 20. С. 228–241.

8. Сердюк А. С. Приближение интегралов Пуассона суммами Валле Пуссена // Укр. мат. журн. 2004. Т. 56, № 1. С. 97–107.

9. Савчук В. В., Савчук М. В., Чайченко С. О. Приближение аналитических функций суммами Валле Пуссена // Математические студии. 2010. Т. 34, № 2. С. 207–219.

10. Ровенская О. Г., Новиков О. А. Приближение интегралов Пуассона повторными суммами Валле Пуссена // Нелинейные колебания. 2010. Т. 13, № 1. С. 96–99.

11. Новиков О. А., Ровенская О. Г. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена // Вестник Одесского нац. ун-та. Матем. мех. 2014. Т. 19, вып. 3(23). С. 14–26.

12. Ровенская О.Г., Новиков О.А. Приближение аналитических периодических функций линейными средними рядов Фурье // Чебышевский сб. 2016. Т. 17, вып. 2. С. 170–183.

13. Novikov O.O., Rovenska O.G. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums // Matematychni Studii. 2017. V. 47, № 2. P. 196–201.

14. Novikov O.O., Rovenska O.G., Kozachenko Yu.A. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. 2018. Vol. 87. P. 4–12.

15. Новиков О.А., Ровенская О.Г. Приближение классов интегралов Пуассона повторными суммами Фейера // Труды ИПММ НАН Украины. 2015. Т. 29. С. 78–86.

16. Novikov O., Rovenska O. Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2017. Vol. 38, № 3. P. 502-–509.

17. Додунова Л.К., Охатрина Д.Д. Обобщение универсального ряда по многочленам Чебышева // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 1, С. 65–72.

REFERENCES

1. Stepanec, A.I. 1987, Classification and Approximation of Periodic Functions. Naukova Dumka, Kiev. (in Russian)

2. Nikolsky, S.M. 1946, “Approximation of functions by trigonometric polynomials in the mean“, *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, vol. 10, no. 3, pp. 207–256. (In Russian)

3. Stechkin, S.B. 1980, “Estimation of the remainder of Fourier series for the differentiable functions“, *Tr. Mat. Inst. Acad. Nauk SSSR.*, vol. 145, pp. 126-151. (In Russian)

4. Stepanec, A.I. 2000, “Approximation of Poussin integrals of continuous functions by Fourier sums“, *Dokl. RAN*, vol. 373, no 2, pp. 171–173. (In Russian)

5. Stepanec, A.I. 2001, “The solution of Kolmogorov-Nikolsky problem for integral Poisson of continuous functions“, *Mat. Sb.*, vol. 192, no. 1, pp. 113–138. (In Russian)

6. Rukasov, V.I. & Chaichenko, S.O. 2002, “Approximation of classes of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums“, *Ukrain. Mat. J.*, vol. 54, no. 12, pp. 1653–1658. (In Russian)

7. Rukasov, V.I. & Novikov, O.A. 1998, “Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums“, *Trudu Inst. Mat. NAN Ukr.*, vol. 20, pp. 228–241. (In Russian)

8. Serdyuk, A.S. 2004, “Approximation of Poisson integrals by de la Vallee Poussin sums“, *Ukr. Mat. J.*, vol. 56, no. 1, pp. 97-–107. (In Russian)

9. Savchuk, V.V., Savchuk, M.V. & Chaichenko, S.O. 2010, “Approximation of analytic functions by de la Vallee Poussin sums“, *Matematychni Studii*, vol. 34, no. 2, pp. 207–219. (in Ukrainian)

10. Rovenska, O.O. & Novikov, O.O. 2010, “Approximation of Poisson integrals by repeated de la Vallee Poussin sums“, *Neliniyni Koluvannya*, vol. 13, pp. 96–99. (in Russian)

11. Novikov, O.O. & Rovenska, O.G. 2014, “Approximation of classes of Poisson integrals by r-repeated de la Vallee Poussin sums“, *Vestnik Odessk. Nac. Un. Mat. Meh.*, vol. 19, no. 3(23), pp. 14–26. (in Russian)

12. Rovenska, O. G. & Novikov, O. O. 2016, "Approximation of analytic periodic functions by linear means of Fourier series", *Cheb. Sb.*, vol. 17, no. 2, pp. 170–183. (in Russian)

13. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2017, "Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums", *Matematychni Studii*, vol. 47, no. 2, pp. 196–201.

14. Novikov, O. O., Rovenska, O. G. & Kozachenko, Yu. A. 2018, "Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums", *Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 87, pp. 4–12.

15. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2015, "Approximation of classes of Poisson integrals by repeated Fejer sums", *Trudu IPMM NAN Ukrainu*, vol. 29, pp. 78–86. (in Russian)

16. Novikov, O. O. & Rovenska, O. G. 2017, "Approximation of Classes of Poisson Integrals by Repeated Fejer Sums", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 38, no. 3, pp. 502-–509.

17. Dodunova, L. K. & Okhatrina, D. D. 2017, The generalizationof the universal series in Chebyshev polynomials, *Cheb. Sb.*, vol. 18, no. 1, pp.65–72. (in Russian)

Получено 13.01.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.