

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-162-170

Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье

А. В. Павлов

Андрей Валерианович Павлов — кандидат физико-математических наук, доцент, МИР-ЭА — Российский технологический университет (г. Москва).

e-mail: a_pavlov@mirea.ru

Аннотация

Доказывается регулярность в окрестности нуля преобразования Лапласа от преобразования Фурье от четной функции, полученной из регулярной в окрестности действительной оси нечетной функции изменением четности. Из данного факта следует перестановочность синус и косинус преобразований Фурье с точностью до знака.

Ключевые слова: преобразование Фурье, перестановочность косинус и синус преобразований Фурье, регулярность преобразования Лапласа от преобразования Фурье.

Библиография: 13 названий.

Для цитирования:

А. В. Павлов. Регулярность преобразования Лапласа и преобразование Фурье // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 162–170.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.53

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-162-170

The regularity of the transform of Laplace
and the transform of Fourier

A. V. Pavlov

Andrey Valerianovich Pavlov — Candidate of physico-mathematical sciences, Associate professor, MIREA — Russian Technological University (Moscow).

e-mail: a_pavlov@mirea.ru

Abstract

The paper proves the regularity in a neighborhood of zero of the Laplace transform of the Fourier transform of an even function obtained from an odd function regular in a neighborhood of the real axis by changing the parity. This fact implies that the sine and cosine of the Fourier transforms are commutable up to the sign.

Keywords: Fourier transform, sine and cosine Fourier transform transposition, Laplace transform regularity of Fourier transform.

Bibliography: 13 titles.

For citation:

A. V. Pavlov, 2020, “The regularity of the transform of Laplace and the transform of Fourier”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 162–170.

1. Введение

Основным результатом статьи является регулярность и однолиственность в окрестности нуля преобразования Лапласа от преобразования Фурье от четной функции, полученной изменением регулярности регулярной в открытой окрестности нуля нечетной функции (теорема 1) [1,4,5,6,9]. Из данной регулярности вытекает перестановочность с обратным знаком операторов синус и косинус преобразований Фурье, определенных на действительной полуоси: $C^0 S^0 = -S^0 C^0$ для широкого класса функций (теорема 2).

Данные результаты согласуются со статьями автора данной статьи [1,5,9], из которых следует основное положение о возможности продолжить регулярно преобразование Лапласа в форме теоремы 1 в окрестность нуля.

Отметим, что данные результаты (теорема 1 и предложение 2) требуют в дальнейшем отдельного изучения, например, с точки зрения приложений к математической физике и теории функций комплексного применения [3,4,8,10,12,13].

Введем обозначения

$$F_{\pm}u(x)(\cdot)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm isx} u(x) dx, F_{\pm}^0 u(x)(\cdot)(s) = \int_0^{\infty} e^{\pm isx} u(x) dx, s \in (-\infty, \infty),$$

$$L_{\pm}u(x)(\cdot)(p) = \int_0^{\infty} e^{\pm px} u(x) dx, L_{-} = L,$$

$$\int_0^{\infty} \cos vx u(x) dx = C^0 u(x)(\cdot)(v), \int_0^{\infty} \sin vx u(x) dx = S^0 u(x)(\cdot)(v), v \in (-\infty, \infty).$$

2. Регулярность преобразования Лапласа

В теоремах 1 и 2 используется условие Y1.

Условие Y1. Для функции $u(x)$ выполнено условие Y1, если функция $u(p)$ регулярна в области $|Re p| < a \cup Im p| < a$ при некотором положительном $a > 0$, $u(0) = 0$, причем существует δ такая, что в области регулярности

$$\max[|u(p)|, |du(p)/dp|, |d^2u(p)/dp^2|] |p|^{1+\delta} \rightarrow 0,$$

$p \rightarrow \infty, \delta > 0; \delta = const..$

ТЕОРЕМА 1. Функция $LF_{+}^0 u(x)(\cdot)(p)$ вместе со своим аналитическим продолжением регулярна в области $|Re p| < \varepsilon \cup Im p| < \varepsilon, \varepsilon > 0$, при некотором положительном $\varepsilon < a$, если для нечетной функции $u(-p) = -u(p)$ выполнено условие Y1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем вспомогательное предложение 1 [6,8].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.

При выполнении условия Y1 для функции $u(p)$ $LF_{+}^0 u(x)(\cdot)(v) = iF_{-}^0 Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty)$, причем

$$LC^0 u(x)(\cdot)(v) = S^0 Lu(x)(\cdot)(v), LS^0 u(x)(\cdot)(v) = C^0 Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После изменения порядка интегрирования в обеих частях равенства предложения 1 получаем основное равенство. При этом возможность поменять пределы интегрирования следует из абсолютной и равномерной сходимости внутренних интегралов равенства [11] (для функции $LF_{+}^0 u(x)(\cdot)(v), v > 0$ данный факт очевиден, для второй функции и при

$v = 0$ после двукратного интегрирования по частям с учетом $u(0) = 0$ используем неравенство

$$|Lu(x)(\cdot)(t)| = |du(0)/dx/t^2 + (1/t^2)L(d^2u(x)/dx^2)(\cdot)(t)| \leq c_1/t^2, t \rightarrow \infty, c_1 = \text{const.},$$

$c_1 < \infty$, непрерывность внутренних интегралов тождества на $[0, +\infty)$ очевидна [11].

Приравнивая действительную и мнимую часть доказанного тождества, получаем другие равенства предложения 1.

Воспользуемся тождеством предложения 1 $LF_+^0u(x)(\cdot)(v) = iF_-^0Lu(x)(\cdot)(v), v \in [0, \infty)$.

Функция $F_-^0Lu(x)(\cdot)(p)$ определена при всех $\text{Im } p \leq 0$. Данный факт и непрерывность этой функции на всей действительной оси $p \in (-\infty, \infty)$ проверяется с помощью формулы интегрирования по частям как при доказательстве предложения 1 с учетом $u(0) = 0$ [11].

Сумма данной функции с аналогичной функцией $F_+^0Lu(x)(\cdot)(p)$, определенной в другой полуплоскости $\text{Im } p \geq 0$, равна

$$F_-^0Lu(x)(\cdot)(p) + F_+^0Lu(x)(\cdot)(p) = 2C^0Lu(x)(\cdot)(p) = F(p), p = y, y \in (-\infty, \infty),$$

при всех чисто действительных значениях p .

Из предложения 1 следует равенство $C^0Lu(x)(\cdot)(y) = LS^0u(x)(\cdot)(y), p = y \in [0, \infty)$.

Совпадение функции $F(p)$ с четной на всей действительной оси (не только на ее положительной части) регулярной в открытой окрестности действительной и мнимой оси функцией $LS^0u(x)(\cdot)(p)$ следует при нечетной $u(p)$ из предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.

1.

Для четной $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1, функции

$$f(ip) = f_1(p), f(p) = LF_+u(x)(\cdot)(-ip)$$

при всех $p = x + ix, x \in (-\infty, \infty)$, совпадают с точностью до константы в области регулярности обоих выражений (например, в области $|p| < a$ с константой a из условия Y1).

2.

При выполнении условия Y1 для нечетной функции $u(p)$ функция $LF_+u(x)(\cdot)(p)$ четна в некоторой открытой окрестности с дополнительным условием

$$\text{Re } f(ix) = f(ix), x \in (-\infty, \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $f(iy) = LF_+u(x)(\cdot)(y) = \text{Re } LF_+u(x)(\cdot)(y), y \in [0, +\infty)$ при четной $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1.

Функция $f(ip)$ совпадает с функцией, повернутой относительно функции $f(p)$ на угол $\pi/2$ по часовой стрелке около нуля: $f(ix) = f(x), x \in (-\infty, \infty)$. Из равенства

$$df(z)/dz|_{z=ix} = df(ix)/dix = -idf(ix)/dx = -idf_1(z)/dz|_{z=x},$$

при всех $x \in (-\infty, \infty)$, из области регулярности $f(z), f_1(z) = f(iz), z = ix$, получаем, что производные функций $f(z)$ и $f_1(z)$ с точностью до константы $-i$ совпадают в точках, повернутых одна относительно другой на угол $\pi/2$ по часовой стрелке: $df(z)/dz|_{z=ip} = -idf_1(z)/dz|_{z=p}$, в том числе при $z = x + ix, x \in (-\infty, \infty)$, в области регулярности данных выражений.

Так как функция $f(z)$ действительна на мнимой оси, то повернутая функция $f_1(z)$ чисто действительна на действительной оси. Следовательно, ее аналитическое продолжение (продолжение функции $f_1(z)$ через действительную ось) по теореме Римана о продолжении [10], совпадает с функцией, значения которой сопряжены в сопряженных точках. То же самое соотношение выполнено для производных функции $f_1(z)$ (например, по той же теореме Римана о продолжении через действительную ось функции $df_1(z)/dz$ действительна на данной оси [10],

так как производная действительной на этой оси функции тоже действительна на этой оси), то есть значения производной функции $f_1(z)$ на диагоналях $z = x + ix, z = x - ix$ сопряжены, и

$$df_1(z)/dz|_{z=x-ix} = \overline{df_1(z)/dz|_{z=x+ix}},$$

$x \in (-\infty, \infty)$, в области регулярности данных выражений.

Сравнивая с отмеченным выражением производных функций $f(z), f_1(z)$ на этих диагоналях, получаем:

$$df(z)/dz|_{z=x+ix} = -idf_1(z)/dz|_{z=x-ix} = -i\overline{df_1(z)/dz|_{z=x+ix}},$$

в области регулярности данных выражений при $x \in (-\infty, \infty)$.

Так как

$$df(z)/dz|_{z=x+ix} = \partial U(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V(x, y)/\partial x|_{z=x+ix}, f(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

$$df_1(z)/dz|_{z=x+ix} = \partial U_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix}, f_1(z) = U_1(x, y) + iV_1(x, y),$$

в области регулярности данных выражений, то мы доказали, что

$$\begin{aligned} \partial U(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} &= -i\overline{\partial U_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} + i\partial V_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix}} = \\ &= -[i\partial U_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix} + \partial V_1(x, y)/\partial x|_{z=x+ix}], \end{aligned}$$

в области регулярности данных выражений на диагонали $z = x + ix$. Мы доказали, что на диагонали

$$\partial U(x, y)/\partial x = -V_1(x, y)/\partial x, \partial V(x, y)/\partial x = \partial U_1(x, y)/\partial x, x = y \in (-\infty, \infty).$$

Аналогичные равенства $\partial U/\partial y = -\partial V_1/\partial y, \partial V/\partial y = \partial U_1/\partial y$ выполнены для частных производных по y (доказывается аналогично).

Производная по направлению $e = 1 + i$ функций $f(z), f_1(z)$ совпадает, соответственно, с

$$df(z)/dz_e = [\partial U(x, y)/\partial x + \partial U(x, y)/\partial y + i\partial V(x, y)/\partial x + \partial V(x, y)/\partial y](1/(1 + i))$$

и

$$df_1(z)/dz_e = -[\partial U_1(x, y)/\partial x + \partial U_1(x, y)/\partial y + i\partial V_1(x, y)/\partial x + \partial V_1(x, y)/\partial y](1/(1 + i)).$$

Данный факт для $f(z)$ следует из равенства

$$\begin{aligned} &[(U(x + dx, y + dx) - U(x, y)) + i(V(x + dx, y + dx) - V(x, y))]/(1 + i)dx = \\ &= ([(U(x + dx, y + dx) - U(x + dx, y)) + (U(x + dx, y) - U(x, y))] + i[(V(x + dx, y + dx) - \\ &- V(x + dx, y)) + (V(x + dx, y) - V(x, y))])/(1 + i)dx \rightarrow ([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] + \\ &+ i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x])/(1 + i), \end{aligned}$$

при всех $x = y \in (-\infty, \infty)$. Для $f_1(z)$ аналогично.

Заметим, что здесь с точностью до константы сохраняются знаки у действительной и мнимой части.

Следовательно, значения рассматриваемых функций на диагонали равны интегралам от их производных по направлению вдоль линии l на этой диагонали, и множитель $(1/(1 + i))$ сокращается ввиду $dz = (1 + i)dx$:

$$f(z) = \int_l [df(z)/dz_e]dz = \int_0^{x_0} (1 + i)dx ([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] + i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x])/(1 + i) =$$

$$= \int_0^{x_0} dx ([\partial U/\partial y + \partial U/\partial x] + i[\partial V/\partial y + \partial V/\partial x]) = A(x) + iB(x), z = x + ix, 0 < x < x_0.$$

Аналогично для $f_1(z)$:

$$f_1(z) = \int_0^{x_0} dx ([\partial U_1/\partial y + \partial U_1/\partial x] + i[\partial V_1/\partial y + \partial V_1/\partial x]) = A_1(x) + iB_1(x),$$

$$z = x + ix, 0 < x < x_0, \operatorname{Re} x = x, x_0 \in (0, +\infty).$$

Пользуясь доказанными в начале первого пункта утверждениями, получаем:

$$f(z) = - \int_0^{x_0} dx ([\partial V_1/\partial y + \partial V_1/\partial x] + i[\partial U_1/\partial y + \partial U_1/\partial x]) =$$

$$= -(B_1(x) + A_1(x)i) = i(A_1(x) - iB_1(x)), z = x + ix.$$

Мы доказали равенство

$$f(z) = i(A_1(x) - iB_1(x)), f_1(z) = f(iz) = A_1(x) + iB_1(x), z = x + ix, \operatorname{Re} x = x \in (0, +\infty).$$

Ввиду сопряженности значений $f_1(x + ix)$ и $f(x + ix)$ получаем $f(z) = i(A(x) + iB(x))$ на диагонали $x = y$ в области регулярности обеих выражений, и первое утверждение предложения 2 доказано.

Для доказательства второго пункта предложения 2 отметим чистую комплексности $LF_+u(x)(\cdot)(z)$, $\operatorname{Re} z > 0$, на положительной части действительной оси, аналогичное равенство $f(x + ix) = f_1(x + ix) + c$ выполнено при нечетной $u(p)$ для функций $f(p) = LF_+u(x)(\cdot)(-ip)/i$, $f_1(p) = f(ip)$ (проверяется дословным повторением доказательства первого пункта предложения 2 для этих функций с учетом $\operatorname{Re} LF_+u(x)(\cdot)(x)/i = LF_+u(x)(\cdot)(x)/i$, $x \in (0, +\infty)$).

Теперь из равенства $f(i(x + ix)) = f(x + ix) + c$ первого пункта предложения 2, $f(p) = LF_+u(x)(\cdot)(-ip)$, $c = \operatorname{const.}$, $c < \infty$, , получаем, что повернутая на угол $\pi/2$ по часовой стрелке функция совпадает с исходной и $f(x) = f(ix)$ [88], что ввиду аналитических выражений данной функции на действительной и мнимой оси эквивалентно утверждению $LF_+u(x)(\cdot)(x) = iC^0S^0u(x)(\cdot)(x)$, $x \in (0, +\infty)$, то есть данное выражение четно при нечетной функции $u(p)$, удовлетворяющей условию Y1 и регулярно в открытой окрестности нуля (регулярность в таких условиях $C^0S^0u(x)(\cdot)(p)$ давно известна [8-10]).

Предложение 2 доказано.

Теперь четность $LS^0u(x)(\cdot)(p)$ в некоторой открытой окрестности нуля вытекает после изменения пределов интегрирования из равенства

$$LS^0u(x)(\cdot)(y) = c \int_0^\infty (u(x)/(y + ix) + u(x)/(-y + ix)) dx, y \in [0, \infty), c = \operatorname{const.},$$

с четной подинтегральной суммой в данной окрестности нуля [10,11].

Отметим, что $LS^0u(x)(\cdot)(p) = C^0Lu(x)(\cdot)(p)$ регулярна (вместе со своим аналитическим продолжением) в полосе $|\operatorname{Re} p| < \varepsilon \cup |\operatorname{Im} p| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, при выполнении условия Y1 для функции $u(p)$ при нечетной $u(-p) = -u(p)$ (данный факт легко проверяется и давно известен [6,8]). Следовательно, аналитическим продолжением функции $F_-^0Lu(x)(\cdot)(p)$ с нижней полуплоскости на верхнюю через всю действительную ось является разность [10]

$$F_-^0Lu(x)(\cdot)(p) = F(p) - F_+^0Lu(x)(\cdot)(p), p \in (\infty, \infty),$$

(непрерывность обеих функций $F_-^0 Lu(x)(\cdot)(p)$, $F_+^0 Lu(x)(\cdot)(p)$ на всей мнимой оси со стороны своих областей определения, как уже отмечалась, вытекала из формулы интегрирования по частям учетом $u(0) = 0$).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что аналогичный факт для четной функции следует из результатов работ [1,4,5,9], но он доказывается с использованием других методов и выходит за рамки данной работы.

Непосредственным следствием регулярности $LF^0 u(x)(\cdot)(p)$ (по теореме 1) и $LS^0 u(x)(\cdot)(p)$ (широко-известный факт [8,9]) в $|Re p| < \varepsilon > 0$ является следствие 1.

СЛЕДСТВИЕ 1.

В условиях теоремы 1 функция $LC^0 u(x)(\cdot)(p)$ регулярна в полосе $|Re p| < \varepsilon > 0$, если $u(-p) = -u(p)$ в области своей регулярности.

ТЕОРЕМА 2. В условиях теоремы 1

$$C^0 S^0 u(x)(\cdot)(t) = -S^0 C^0 u(x)(\cdot)(t), t \in (0, \infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

По определению $u(x) = u_1(x)$, $x \in [0, +\infty)$, $-u(x) = u_1(x)$, $x \in (-\infty, 0)$.

Рассмотрим равенство для сумм сопряженных функций

$$l_1(iy) + l_2(iy) = 2\pi u(y) = L_1(iy) + L_2(iy), y \in [0, \infty),$$

где

$$l_1(p) = L_+ F_- u(x)(\cdot)(p), L_1(p) = L_+ F_- u_1(x)(\cdot)(p), Re p \leq 0,$$

$$l_2(p) = L_- F_+ u(x)(\cdot)(p), L_2(p) = L_- F_+ u_1(x)(\cdot)(p), Re p \geq 0,$$

которое следует из формул обращения преобразований Фурье [2] с учетом

$$Re l_1(iy) = 2S^0 S^0 u(x)(\cdot)(y) = \pi u(y) = Re L_1(iy) = 2C^0 C^0 u(x)(\cdot)(y), y \in [0, \infty),$$

при нечетной $u(x)$ и четной $u_1(x)$.

Из данного равенства следует, что данные суммы совпадают в области их регулярности, и

$$l_1(p) - L_1(p) = L_2(p) - l_2(p),$$

в области регулярности каждой разности, в том числе на ганице области определения каждой функции, то есть на всей мнимой оси. Совпадение на отрицательной части мнимой оси вытекает из регулярности каждой из этих функций в открытой окрестности всей мнимой оси. При этом регулярность $l_1(p), l_2(p)$ является следствием регулярности нечетной функции $u(p)$ по условию Y1 [8,9,10], а регулярность $L_1(p), L_2(p)$ доказана в следствии 1 к теореме 1 (из данного следствия следует, что эти функции однолиственны в области $|Re p| < \varepsilon > 0$).

Заметим, что все эти функции ограничены в области своего определения, и первая разность аналитически продолжается с левой полуплоскости в правую с помощью второй разности ввиду непрерывности обеих разностей на всей границе [10]. Следовательно, данные разности тождественно равны нулю [10] (стремление к нулю в области определения данных функций очевидно). При этом ограниченность в области своего определения, в том числе на мнимой оси, вытекает из

$$|L_+ F_- u(x)(\cdot)(p)| \leq \int_0^\infty |e^{yt}| dt \int_{-\infty}^\infty e^{-ixt} u(x) dx < const. < \infty, y \leq 0,$$

ввиду $|F^0 u(x)(\cdot)(t)| \leq c_2/t^2, t \rightarrow \infty, c_2 = \text{const.}, c_2 < \infty$, после двукратного интегрирования по частям как при доказательстве предложения 1 с учетом $u(0) = 0$ [11]. (Непрерывность на границе следует из этого же неравенства и проверялась в теореме 1). Для остальных функций $L_1(p), L_2(p), l_2(p)$ аналогично.

Мы доказали, что $l_2(iy) - L_2(iy) \equiv 0, y \in (-\infty, \infty)$, что ввиду четности и нечетности $u_1(p), u(p), u(x) = u_1(x), x \in [0, +\infty)$, эквивалентно

$$\int_0^\infty e^{-iyt} dt \int_{-\infty}^0 e^{iyt} u(x) dx = -i[C^0 S^0 u(-x)(\cdot)(t) + S^0 C^0 u(-x)(\cdot)(t)] \equiv 0, t \in (0, \infty), u(-x) = -u(x).$$

Теорема 2 доказана.

3. Заключение

Из теоремы 1, по-видимому, вытекает равенство по модулю между синус и косинус преобразованиями Фурье на полуоси $[0, +\infty)$: $|C^0| = |S^0|$, но данный результат выходит за рамки этой статьи.

Отметим, что несколько нетрадиционный результат теоремы 1 и предложения 2 по мнению автора представляет интерес в связи с, например, двойным представлением одного выражения в виде разложения на элементарные дроби:

$$1/(p-1) + 1/(p+1) = 2p/(p-1), 1/(p-1)^2 + 1/(p^2-1) = 2p/(p-1)^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Павлов А. В., *Дисциплины с приоритетом коротким требованиям и идентичное обслуживание* // Москва. Электронное издание, ФГБОУ ВПО МГТУ МИРЭА, 2013, 119 с. Available at: <http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386>.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа* // Москва. Наука, 1976. 544 с.
3. Pavlov A. V. The Dirichlet problem and disappearance of the imaginary part of the Laplace transform on the imaginary axis in connection with the Fourier, Laplace operators // Moscow. RUDN Universit., Math. Inst. nam. Steklov, The 8th Int. Conferen. on Differential and Functional Differential Equations, August 13-20, ABSTRACTS, 2017, p. 137.
4. Pavlov A. V. Identical service and the odd or even transform of Laplace // Moscow. Moscow University nam M.V.Lomonosov and RUDN., Conferen. Anal. and comp.meth. in probab.theor. and its appl., (ACMPT2017), 23-27 okt., Abstracts, Moscow, pp.31-35, 2017. ISBN 978-5-209-08291-0.
5. Pavlov A. V. The correctness of geometrical methods in the theorem of Fermat; the transform of Laplace // Berlin. 7th Eur. Congr. of Math., July 18-22, Tech. Univers. Section.Alg. and Comp. Geom.(Poster PS-03 sec.), p. 84.
6. Pavlov A. V. Application of regularity of the double Laplace transform to the general properties of the integral Fourier transform // Moscow, Math. Inst. nam.Steklov.(KSA Innov.Group). Intern. Confer. Math. theory of optimal control. Materials of Intern.Conferen.dedic. to the 90th birthday of Acad. R.V. Gamkrelidze, june 1 - 2, 2017, pp. 113-115. ISBN 978-5-98419-074-9.

7. Павлов А.В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа // Москва. Мат. заметки. 2011, Том 90, №6. сс. 792–796.
8. Pavlov A. V. About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier // Petrozavodsk. Issues of Analysis. 2016. Vol. 23, №1, p. 21-30.
9. Павлов А.В. Достоверное прогнозирование функций, представимых в виде преобразования Фурье или Лапласа // Москва. Вестник МГТУ МИРЭА, 2014. Vol. 3, №2, сс. 78-85. ISSN: 2313-5026.
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Наука. 1987. 688 с.
11. Fichtenholz G. M. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, II*. Москва. Наука. 1969. 800 с.
12. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. О математических работах профессора А.А. Карацубы // Москва. Труды МИАН. 1997. Vol. 218, pp. 7-19.
13. Лыков А. А., Малышев В. А., Чубариков В. Н. Регулярные континуальные системы точечных частиц. I: Системы без взаимодействия // М: Чебышевский сбор., 2016, Vol. 17, №3, сс. 148-165.

REFERENCES

1. Pavlov A. V. 2013, *The disciplines of service with prior to the shortest and identical service*, MGTUREA(MIREA) Publishers, Moscow, 119 p. ISBN 978-5-7339-1261-5. Available at: <http://catalog.inforeg.ru/Inet/GetEzineByID/300386>.
2. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. 1976, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Science, Moscow, 544 p.
3. Pavlov A. V. "The Dirichlet problem and disappearance of the imaginary part of the Laplace transform on the imaginary axis in connection with the Fourier, Laplace operators" RUDN Universit., Math. Inst. nam. Steklov, *The 8th Int. Conferen. on Differential and Functional Differential Equations, August 13-20, ABSTRACTS*, Moscow, 2017, pp. 137.
4. Pavlov A. V. 2017, "Identical service and the odd or even transform of Laplace" Moscow. Moscow University nam M.V.Lomonosov and RUDN., *Conferen. Anal. and comp.meth. in probab.theor. and its appl., (ACMPT2017), 23-27 okt., Abstracts*, Moscow, pp. 31-35. ISBN 978-5-209-08291-0.
5. Pavlov A. V. 2016, "The correctness of geometrical methods in the theorem of Fermat; the transform of Laplace" *Abstracts of 7th Eur. Congr. of Math., July 18-22, Section. Alg. and Comp. Geom. (Poster PS-03 sec.)*, Berlin Tech. Univers., p. 84.
6. Pavlov A. V. 2017, "Application of regularity of the double Laplace transform to the general properties of the integral Fourier transform" *,Intern. Confer. Math. theory of optimal control. (Materials of Intern. Conferen. dedic. to the 90th birthday of Acad. R.V. Gamkrelidze, june 1 - 2)*, Moscow, Math. Inst. nam. Steklov. (KSA Innov. Group). pp. 113-115. ISBN 978-5-98419-074-9.
7. Pavlov A. V. 2011, "The Fourier transform and new inversion formula of the Laplace transform", *Springer Publishers, Math. notes*, Vol. 90, no.6, pp. 793 - 796.

8. Pavlov A. V. 2016, "About the equality of the transform of Laplace to the transform of Fourier", Petrozavodsk. *Issues of Analysis*, Petrozavodsk, Vol. 23, no. 1, pp. 21-30.
9. Pavlov A. V. 2013, "Reliable prognosis of the functions in the form of transformations of Fourier or Laplace", *Herald of MIREA, MIREA (MTU)*, Vol. 3, no. 2, Moscow, pp. 78-85. ISSN 2313-5026.
10. Lavrentiev M. A., Shabat B. V. 1987, *Methods of the theory of the functions of complex variables*. Science, Moscow, 688 p.
11. Fichtenholz G. M. 1969, *Course of differential and integral calculus. II*, Science, Moscow, 800 p.
12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. 1997, "On the mathematical papers of Professor A. A. Karatsuba" *Works of MIAS*, Mat. Inst. Steklova, Vol. 218, pp. 7-19.
13. Lykov A. A., Malyshev V. A., Chubarikov V. N. 2016, "Regular continuum systems of point particles. I: Systems without interaction", *Chebyshevskii Sb.*, Vol. 17, no. 3, pp. 148-165.

Получено 27.11.18 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.