ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 514.142.2+514.174.6 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-117-128

Теоремы существования и единственности решения обратных задач проективной геометрии для 3D реконструкции по фотоснимкам[1]

А. А. Клячин, В. А. Клячин

Алексей Александрович Клячин — доктор физико-математических наук, доцент, Волгоградский государственный университет (г. Волгоград).
e-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru
Владимир Александрович Клячин — доктор физико-математических наук, доцент, Волгоградский государственный университет (г. Волгоград).
e-mail: klchnv@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается задача вычисления параметров плоскости пространственного треугольника по его центральной проекции. При определенных условиях доказана теорема существования решения этой задачи и его единственность. Приведены примеры условий, при которых решения не существует или оно не единственно. Так же предложен алгоритм приближенного поиска всех возможных решений задачи при выполнении определенных условий. Рассматриваемая в статье задача возникает при построении трехмерных моделей объектов по их фотоснимку.

Ключевые слова: центральная проекция, 3D реконструкция, геометрия треугольника.

Библиография: 22 названия.

Для цитирования:
А. А.Клячин, В. А. Клячин. Теоремы существования и единственности решения обратных задач проективной геометрии для 3D реконструкции по фотоснимкам // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 117–128.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области в рамках научного проекта № 19-47-340015, а также при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках научного проекта № 0633-2020-0004 «Развитие методики виртуальной 3D реконструкции исторических объектов»

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 514.142.2+514.174.6 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-117-128

Existence and uniqueness theorems for solutions of inverse problems of projective geometry for 3D reconstruction from photographs

A. A. Klyachin, V. A. Klyachin

Alexey Alexandrovich Klyachin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State University (Volgograd).
e-mail: aleksey.klyachin@volsu.ru
Vladimir Aleksandrovich Klyachin — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Volgograd State University (Volgograd).
e-mail: klchnv@mail.ru

Abstract

The paper considers the problem of calculating the parameters of the plane of a spatial triangle from its central projection. Under certain conditions, the existence theorem for a solution to this problem and its uniqueness are proved. Examples of conditions under which a solution does not exist or is not unique are given. An algorithm for the approximate search of all possible solutions to the problem under certain conditions is also proposed. The problem considered in the article arises when constructing three-dimensional models of objects from their photograph.

Keywords: central projection, 3D reconstruction, triangle geometry.

Bibliography: 22 titles.

For citation:
A. A. Klyachin, V. A. Klyachin, 2020, “Existence and uniqueness theorems for solutions of inverse problems of projective geometry for 3D reconstruction from photographs”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 117–128.

1. Введение

Одна из сложных задач 3D моделирования – моделирование по плоскому изображению, различного рода фото и видео материалам реальных объектов. Это особенно актуально в задачах 3D реконструкции исторических архитектурных сооружений и целых комплексов, имеющих как историческую, так и культурную ценность. Подобные задачи реконструкции предполагают, в частности, решение ряда задач нацеленных на развитие методов и технологий 3D моделирования по плоскому изображению объекта при отсутствии какой-либо возможности доступа к реальному объекту. Здесь возникает ряд геометрических задач, связанных с особенностями и условиями подобных 3D реконструкций. Примерами таких задач могут быть: задачи определения характерных размеров реальных объектов и их составных частей, задачи определения их местоположения в пространстве (например, в терминах географических координат), задачи определения настроек камеры (ориентация камеры в пространстве), с помощью которой было получено изображение. Фундаментальная научно-техническая дисциплина, занимающаяся определением формы, размеров, положения и иных характеристик объектов по их фотоизображениям носит название фотограмметрия. Однако существенным отличием классических задач фотограмметрии (см., например [1],[2]) от задач рассматриваемых нами является практически неизвестные характеристики элементов внутреннего и внешнего ориентирования снимков (настроек камеры). Частичное нахождение этих характеристик и составляет определенную задачу настоящей статьи. В основе предлагаемой методики лежит поиск характерных наборов точек снимка, которые определяются существенно исходя из информации геометрического строения объекта съемки. Например, для архитектурных сооружений характерными точками могут быть угловые точки зданий, оконных проемов, точки, лежащие на параллельных прямых, пространственных окружностях и т.п.

В настоящей статье предпринята попытка решения задачи вычисления параметров плоскости пространственного треугольника по его центральной проекции. Надо отметить, что несколько подобных задач ранее были решены в статье [3].

Предполагается, что найденные решения могут быть использованы в задачах 3D реконструкции архитектурных комплексов довоенного Сталинграда по имеющимся фотоснимкам. Описание задачи этой реконструкции было дано в работе [4].

В плане задач определения тех или иных характеристик объектов по их снимкам имеется ряд публикаций, в которых решаются прикладные задачи в самых разнообразных отраслях науки и техники. Так в работах [5] –[7] исследуется совокупность характерных точек на изображении, образующая размытость. В работах [8] – [11] решается задача вычисления геометрических характеристик объекта по нескольким специально подготовленным его снимкам. В работах [12], [13] анализ характерных точек применяется в задачах 3D реконструкции в медицине. Отметим, что похожие задачи возникают в прикладной области компьютерного зрения. В частности, можно указать интересную работу [14], в которой решается задача 3D реконструкции лица по фотографии. Методика реконструкции основана на использовании обученной сверточной нейронной сети. В дополнении к этому отметим еще ряд публикаций, посвященных восстановлению трехмерных поверхностей по их плоскому изображению [15] – [18] на основе методов машинного обучения и накопленной базы данных изображений с данными буфера глубины.

В [19] предложен метод восстановления дефектных областей карт глубины, полученных 3D сканерами при анализе реальных объектов сцены для подготовки к реконструкции трёхмерных моделей поверхностей объектов.

В [20] рассмотрен класс задач о реконструкции внутренней структуры плоских и объемных объектов по внешним данным, находящимся в определенной структуре и имеющим возможность оцифровки. Так же отметим работы [21], [22], в которых решаются задачи восстановления пространственных множеств точек и поверхностей в несколько иной постановке задачи, чем в настоящей работе.

Всюду в статье используется модель камеры, состоящая из трех уравнений центральной проекции

$$(x, y, z) \to (X, Y) = \left(\frac{x}{z}\delta, \frac{y}{z}\delta\right),$$

где (x, y, z) – точка в пространстве, величины X, Y моделируют пиксельные координаты на изображении, которое располагается в плоскости $z = \delta, \delta > 0$. Предельным случаем центральной проекции является ортогональная проекция, заданная формулами

$$(x, y, z) \to (X, Y) = (x, y)\,.$$

2. Математическая модель

В начале мы рассмотрим случай, когда на входном изображении предполагается наличие изображения пространственного треугольника с заданными углами $\beta_i, i = 0, 1, 2$. Задача состоит в том, чтобы определить параметры плоскости этого треугольника.

Пусть в пространстве заданы три точки $p_i = (x_i, y_i, z_i),\ z_i > 0,\ i = 0, 1, 2$ не лежащие на одной прямой и являющиеся вершинами треугольника. При этом, мы предполагаем, что нумерация соответствует некоторому обходу вдоль его сторон. Обозначим через Π – плоскость этого треугольника. Рассмотрим так же плоскость Q, заданную уравнением $z = 1$. Построим точки $q_i,\ i = 0, 1, 2, 3$ как проекции точек p_i на плоскость Q при центральной проекции с центром в начале координат. Положим $q_i = (X_i, Y_i, Z_i)$. Несложно видеть, что

$$\begin{cases} X_i &= \frac{x_i}{z_i} \\ Y_i &= \frac{y_i}{z_i} \\ Z_i &= 1 \end{cases}$$

Поскольку треугольник $q_0q_1q_2$ считается известным, то известными будут величины углов

$$\alpha_0 = \angle q_0Oq_1, \quad \alpha_1 = \angle q_1Oq_2, \quad \alpha_2 = \angle q_2Oq_0.$$

Для углов в треугольнике $p_0p_1p_2$ введем обозначения

$$\beta_0 = \angle p_2p_0p_1, \quad \beta_1 = \angle p_0p_1p_2, \quad \beta_2 = \angle p_1p_2p_0.$$

Величины этих углов так же считаются известными. Ясно, что ориентация плоскости этого треугольника может быть определена с точностью до гомотетичного преобразования относительно начала координат: при этом центральная проекция треугольника не измениться. Так, что достаточно определить радиус-векторы точек p_0, p_1, p_2 также с точностью до преобразования гомотетии. Для определенности будем считать, что углы в треугольнике пронумерованы так, что $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \beta_2$.

Согласно теореме синусов имеют место равенства

$$\frac{|p_0p_1|}{\sin\beta_2} = \frac{|p_0p_2|}{\sin\beta_1} = \frac{|p_1p_2|}{\sin\beta_0}.$$

Откуда

$$\frac{|p_0p_1|}{|p_1p_2|} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_0} = \lambda, \tag{1}$$

$$\frac{|p_0p_2|}{|p_1p_2|} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_0} = \mu. \tag{2}$$

В силу выбора нумерации углов треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ эти величины удовлетворяют неравенствам $\lambda, \mu \leq 1$.

По теореме косинусов можно записать равенства

$$\begin{cases} |p_0|^2 + |p_1|^2 - 2|p_0||p_1|\cos\alpha_0 = |p_0p_1|^2, \\ |p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1 = |p_1p_2|^2, \\ |p_2|^2 + |p_0|^2 - 2|p_2||p_0|\cos\alpha_2 = |p_2p_0|^2. \end{cases}$$

Учитывая обозначения для величин λ, μ, получим

$$\begin{cases} |p_0|^2 + |p_1|^2 - 2|p_0||p_1|\cos\alpha_0 = \lambda^2(|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1), \\ |p_2|^2 + |p_0|^2 - 2|p_2||p_0|\cos\alpha_2 = \mu^2(|p_1|^2 + |p_2|^2 - 2|p_1||p_2|\cos\alpha_1). \end{cases}$$

Полагая $u = |p_1|/|p_0|,\ v = |p_2|/|p_0|$, приходим к следующей системе квадратичных уравнений

$$\begin{cases} 1+u^2-2u\cos\alpha_0 = \lambda^2(u^2+v^2-2uv\cos\alpha_1), \\ v^2+1-2v\cos\alpha_2 = \mu^2(u^2+v^2-2uv\cos\alpha_1). \end{cases}$$

И, окончательно,

$$\begin{cases} (1-\lambda^2)u^2-\lambda^2v^2+2\lambda^2uv\cos\alpha_1-2u\cos\alpha_0+1=0, \\ -\mu^2u^2+(1-\mu^2)v^2+2\mu^2uv\cos\alpha_1-2v\cos\alpha_2+1=0. \end{cases} \tag{3}$$

В следующем разделе будет приведен алгоритм поиска всех приближенных решений этой системы уравнений. Перед этим мы докажем теорему, в которой будут представлены достаточные условия существования и единственности рассматриваемой задачи. С этой целью мы ее немного переформулируем. Именно, требуется для треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ с углами β_0,β_1,β_2 и заданного набора величин углов $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ найти точку $p\in\mathbb{R}^3$, такую, что

$$\angle p_0pp_1 = \alpha_0, \quad \angle p_1pp_2 = \alpha_1, \quad \angle p_2pp_0 = \alpha_2. \tag{4}$$

Имеет место

Теорема 1. *Если для треугольника $\Delta p_0p_1p_2$ с углами $\beta_i, i=0,1,2$ выполнено $\beta_i\le\pi/2$, а заданные величины α_i удовлетворяют условиям $\alpha_i\ge\pi/2$ и $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2\le 2\pi$, то найдется единственная точка p такая, что выполнены равенства (4).*

Доказательство. Для каждой стороны $p_ip_j, i,j=0,1,2, i<j$ заданного треугольника построим множество точек

$$S_{ij} = \{q\in\mathbb{R}^3 : \angle p_ixp_j = \alpha_i\},$$

при этом рассматриваются только те точки q, которые лежат в том же полупространстве относительно плоскости треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, что и начало координат. Множество S_{ij} представляет собой половину поверхности вращения дуги окружности, опирающейся на соответствующую сторону этого треугольника вокруг этой стороны. Угловая величина этой дуги в точности равна соответствующей величине α_i. Поскольку $\alpha_i\ge\pi/2$, то эти поверхности являются выпуклыми и их можно рассматривать как графики функций $f_{ij}(q),\ 0\le i<j\le 1$, где точка q принадлежит плоскости треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. У каждой такой функции своя область определения, которая ограничена двумя дугами окружностей, опирающихся на соответствующую сторону p_ip_j треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. Заметим, что искомая точка p является точкой пересечения трех поверхностей S_{ij}. Этой точке соответствует решение системы уравнений

$$\begin{cases} f_{12}(q) = f_{01}(q), \\ f_{02}(q) = f_{01}(q). \end{cases} \tag{5}$$

Заметим, что пересечение областей определения функций f_{ij} не пусто только если $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2\le$ $\le 2\pi$. Причем, если сумма этих углов в точности равна 2π, то пересечением является единственная точка. Она же в этом случае будет искомой. Так, что в дальнейшем считаем, что выполнено строгое неравенство $\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2<2\pi$. Тогда пересечением областей определения функций f_{ij} является выпуклая область $\Omega\subset\Pi$ ограниченная тремя дугами окружностей, опирающихся на соответствующие стороны треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, имеющих соответствующее угловое значение α_i и расположенных в той же полуплоскости относительно сторон треугольника $\Delta p_0p_1p_2$, что и сам треугольник. Пусть q_0,q_1,q_2 – точки, в которых указанные дуги окружностей соединяются. Нумерация точек выполнена так, что бы $f_{ij}(x)=0$, если x принадлежит дуге q_iq_j. Покажем, что внутри Ω имеется по крайней мере одно решение системы (5). Действительно, заметим, что на дуге q_1q_2 найдется точка q', в которой $f_{01}(q')=f_{02}(q')>0$. Рассмотрим непрерывную кривую $\gamma(t)$ вдоль которой $f_{01}=f_{02}$ и такую, что $\gamma(0) = p_0, \gamma(1) = q'$. Положим $\varphi(t) = f_{01}(\gamma(t)) = f_{02}(\gamma(t))$ и $\psi(t) = f_{12}(\gamma(t))$. Поскольку $\psi(0) > 0, \psi(1) = 0$ и $\varphi(0) = 0, \varphi(1) > 0$, то найдется такое t_0, что будет выполнено равенство $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$. Не трудно видеть, что точка $\gamma(t_0)$ является решением системы (5). Положим

$$D_c = \{x : f_{01}(x) > c,\ f_{02}(x) > c,\ f_{12}(x) > c\}.$$

Эти множества являются выпуклыми, причем $D_{c''} \subset D_{c'}$ при $c' < c''$. Ясно, что $D_0 = \Omega$ содержит все решения системы (5). Найдется такое $c_0 > 0$, что при всяком $0 < c < c_0$ множество D_c будет содержать все решения системы (5). В дальнейшем считаем, что $0 < c < c_0$.

Рассмотрим множества

$$E^c_{01} = \{x : f_{01} > c, f_{12} > c\},$$

$$E^c_{02} = \{x : f_{01} > c, f_{02} > c\},$$

$$E^c_{12} = \{x : f_{02} > c, f_{12} > c\}.$$

Каждое из этих множеств выпукло и имеет границу состоящую из двух выпуклых дуг линий уровня соответствующих функций. Эти линии уровня являются выпуклыми кривыми, опирающимися на соответствующие стороны треугольника $\Delta p_0p_1p_2$. Поэтому они пересекаются в двух точках. В результате мы получаем шесть точек пересечения линий уровня функций f_{ij}, причем три из них ограничивают дуги образующих криволинейный треугольник, являющийся границей выпуклого множества D_c. Рассмотрим выпуклое множество

$$D_0 = \cap_{0<c<c_0} \overline{D_c}.$$

Это множество замкнуто и выпукло. Предположим, что его внутренность не пуста. Тогда $D_0 = \overline{D}_{c_0}$ и по выбору значения c_0 на границе этого множества имеется решение q системы (5). Получаем, что с одной стороны $D_0 = \overline{D}_{c_0}$ и граница этого множества состоит из трех выпуклых дуг линий уровня функций $f_{ij}(x)$, а сдругой стороны эти дугиперескаются в точке $q' \in \partial D_0$ на его границе. Получим противоречие с предположением, что внутренность множества D_0 не пуста. Таким образом D_0 состоит из единственной точки q' или является отрезком. Последнее невозможно, так как функции f_{ij} строго выпуклы вверх. Таким образом, q' – единственное решение системы (5). Теорема доказана.

Замечание 1. Из этой теоремы следует однозначное восстановление плоскости пространственного треугольника с точностью до гомотетии по его проекции, при условии, что углы α_i удовлетворяют указанным в теореме требованиям. Действительно, предположим, что можно найти два равных треугольника, но расположенных в различных плоскостях, не сводящихся одна к другой преобразованием гомотетии относительно начала координат и имеющих совпадающие проекции в плоскости $z = 1$. Таким образом мы имеем два тетраэдра в основаниях которых лежат выбранные треугольники, а вершинами является начало координат. Движением совместим основания этих тетраэдров, так, что бы вершины оказались по одно сторону от общей плоскости их оснований. Эти вершины не будут совпадать поскольку треугольники лежали в разных плоскостях. Но, с другой стороны, это противоречит утверждению теоремы 1. Таким образом предположении о существовании двух указанных выше треугольников ошибочно.

Замечание 2. В общем случае теорема существования не справедлива. Действительно, рассмотрим три произвольных, взаимно ортогональных вектора e_1, e_2, e_3, направленных вверх по отношению оси Oz. Построим три луча в направлениях $e_i, i = 1, 2, 3$. Плоскость пересекающая эти три луча пересекает их в вершинах всегда остроугольного треугольника. Таким образом, не существует пространственного треугольника с углами $\beta_i,\ i = 0, 1, 2$ с хотя бы одним углом не меньше чем $\pi/2$ и проектирующегося в треугольник на плоскости $z = 1$ так, что $\alpha_i = \pi/2,\ i = 0, 1, 2$.

Замечание 3. Приведем пример не единственности решения поставленной задачи. Рассмотрим точки $p_0 = (0, 0, d)$, $p_1 = (h, 0, d)$, $p_2 = (0, h, d)$, лежащие на плоскости $z = d > 1$. Соответствующие проекции этих точек на плоскость $z = 1$ будут $q_0 = (0, 0, 1)$, $q_1 = (\frac{h}{d}, 0, 1)$, $q_2 = (0, \frac{h}{d}, 1)$. Будем предполагать, что угол $\angle p_1 O p_2 < \pi/4$. В треугольнике $\Delta p_0 O p_2$ проведем высоту $p_0 L$ и рассмотрим точку p_2', лежащую на отрезке OL и такую, что $|p_0 p_2'| = |p_0 p_2|$. Очевидно, что треугольники $\Delta p_1 p_0 p_2$ и $\Delta p_1 p_0 p_2'$ равны так как оба прямоугольные и катеты у них равны. Таким образом, мы получили два треугольника с равными углами, лежащими в не параллельных плоскостях и центральные проекции которых равны одному и тому же треугольнику $\Delta q_1 q_0 q_2$.

3. Алгоритм поиска приближенных решений задачи

Для приближенного поиска всех решений системы (3) мы будем использовать двумерный аналог метода деления отрезка. Поэтому, в первую очередь, нужно определить прямоугольник на плоскости (u, v), в пределах которого находятся все решения этой системы.

Ясно, что $u > 0, v > 0$. Следовательно, достаточно получить верхнюю оценку границы изменения параметров u и v. Для этого воспользуемся равенствами (1) и (2). Используя неравенства

$$|p_0 p_1| \ge ||p_0| - |p_1||, \ |p_0 p_2| \ge ||p_0| - |p_2||, \ |p_1 p_2| \le |p_1| + |p_2|,$$

получаем

$$\frac{||p_0| - |p_1||}{|p_1| + |p_2|} \le \lambda, \quad \frac{||p_0| - |p_2||}{|p_1| + |p_2|} \le \mu.$$

Тогда, учитывая определения параметров u и v, приходим к неравенствам

$$\frac{|1 - u|}{u + v} \le \lambda, \ \frac{|1 - v|}{u + v} \le \mu.$$

На плоскости (u, v) они определяют четырехугольник с вершинами

$$\left(\frac{1 - \lambda + \mu}{1 + \lambda + \mu}, \frac{1 + \lambda - \mu}{1 + \lambda + \mu}\right), \ \left(\frac{1 - \lambda - \mu}{1 + \lambda - \mu}, \frac{1 + \lambda + \mu}{1 + \lambda - \mu}\right),$$

$$\left(\frac{1 + \lambda + \mu}{1 - \lambda + \mu}, \frac{1 - \lambda - \mu}{1 - \lambda + \mu}\right), \ \left(\frac{1 + \lambda - \mu}{1 - \lambda - \mu}, \frac{1 - \lambda + \mu}{1 - \lambda - \mu}\right).$$

Отметим, что из неравенства треугольника и равенств (1) и (2) имеем

$$\lambda + \mu = \frac{|p_0 p_1| + |p_0 p_2|}{|p_1 p_2|} > 1,$$

так как мы раньше предположили, что точки p_0, p_1, p_2 не лежат на одной прямой. Отсюда следует, что часть этого четырехугольника, для которой $u \ge 0$ и $v \ge 0$, будет лежать в прямоугольнике $[0, a] \times [0, b]$, где

$$a = \max\left\{\frac{1 - \lambda + \mu}{1 + \lambda + \mu}, \frac{1 + \lambda + \mu}{1 - \lambda + \mu}\right\},$$

$$b = \max\left\{\frac{1 + \lambda - \mu}{1 + \lambda + \mu}, \frac{1 + \lambda + \mu}{1 + \lambda - \mu}\right\}.$$

Теперь перейдем к описанию алгоритма. Обозначим через Γ_λ и Γ_μ кривые, задаваемые уравнениями системы (3). Будем предполагать, что Γ_λ и Γ_μ не являются эллипсами.

1. Разделим прямоугольник $[0,a]\times[0,b]$ на четыре прямоугольника прямыми $u=\frac{a}{2}$ и $v=\frac{b}{2}$.

2. Выберем из получившихся прямоугольников те, которые пересекают обе кривые Γ_λ и Γ_μ.

3. Для каждого из найденных прямоугольников повторяем те же действия: разбиваем на четыре прямоугольника прямыми, проходящими через середины сторон и вбираем из получившихся прямоугольников те, которые пересекают обе кривые Γ_λ и Γ_μ.

4. Далее шаг 3 повторяется до тех пор, пока размеры получающихся прямоугольников не будут отвечать требуемой погрешности вычисления корней системы.

5. Затем выбираем не более четырех прямоугольников из получившихся на последнем шаге, каждый из которых не имеет общих точек с другими. В качестве решений можно взять центры этих прямоугольников.

Теперь поясним некоторые моменты алгоритма. Во-первых, отбрасывая прямоугольники, которые не пересекаются с обеими кривыми Γ_λ и Γ_μ, мы на каждом шаге будем иметь не более 16 прямоугольников. Поэтому количество рассматриваемых на каждом шаге прямоугольников не будет неограниченно возрастать. Во-вторых, предположение, что кривые Γ_λ и Γ_μ не эллипсы дает возможность свести проверку пересечения этих кривых с прямоугольником к проверке их пересечения со сторонами прямоугольника. Данная проверка осуществляется следующим образом.

Пусть, для определенности, нужно проверить пересекает ли кривая Γ_λ отрезок (как одну из сторон некоторого прямоугольника) $u=u_0, v_1\le v\le v_2$. Это равносильно тому, что нужно выяснить имеет ли квадратный трехчлен (относительно переменной v)

$$f(v)=(1-\lambda^2)u_0^2-\lambda^2v^2+2\lambda^2u_0v\cos\alpha_1-2u_0\cos\alpha_0+1$$

хотя бы один корень на отрезке $[v_1,v_2]$. Обозначим через $v^*=u_0\cos\alpha_1$ точку, соответствующую вершине параболы. Тогда $f(v)$ имеет хотя бы один корень на отрезке $[v_1,v_2]$ только в том случае, если выполняется одно из условий

1. $f(v_1)f(v_2)\le 0$;

2. $v^*\in[v_1,v_2]$ и либо $f(v_1)f(v^*)\le 0$ либо $f(v^*)f(v_2)\le 0$.

Аналогично осуществляется проверка для второй кривой и других сторон прямоугольника. Отметим, что описанный алгоритм за n шагов дает погрешность вычисления корней системы (3) не превосходящую величины $\frac{\max\{a,b\}}{2^n}$.

Замечание 4. В силу того, что измерения углов треугольника $q_0q_1q_2$ для последующего вычисления углов $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ несут в себе определенную погрешность, возникает вопрос об устойчивости найденного приближенного решения относительно этих углов. Отметим, что углы β_0,β_1 и β_2 не требуют измерений, так как они считаются известными. Для исследования этого вопроса мы предлагаем следующий подход.

Пусть (u^*,v^*) – точное решение системы (3), а (u_n,v_n) – приближенное решение, сходящееся к (u^*,v^*) и найденное на n-ом шаге итерации. Систему уравнений (3) запишем в виде

$$\begin{cases} F(u,v,\cos\alpha_0,\cos\alpha_1,\cos\alpha_2)=0,\\ G(u,v,\cos\alpha_0,\cos\alpha_1,\cos\alpha_2)=0.\end{cases}$$

Для проверки устойчивости можно воспользоваться теоремой об обратном отображении. Вычислим якобиан этой системы

$$J(u,v) = \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = 4(\mu^2 \cos\alpha_1 u^2 + \lambda^2 \cos\alpha_1 v^2 +$$

$$+(1-\lambda^2-\mu^2)uv - (\lambda^2 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + (1-\mu^2)\cos\alpha_0)v -$$

$$-((1-\lambda^2)\cos\alpha_2 + \cos\alpha_0\alpha_1\mu^2)u + \cos\alpha_0\cos\alpha_2).$$

Если $J(u_n, v_n)$ не сходится к 0 при $n \to \infty$, то точка (u^*, v^*) будет непрерывно зависеть от α_0, α_1 и α_2. Рассмотрим, например, частный случай, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$. Тогда из системы (3) видно, что $u^* \neq 0$ и $v^* \neq 0$. Поэтому они положительны. Следовательно,

$$J(u^*, v^*) = (1-\lambda^2-\mu^2)u^*v^* = 0$$

только если $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, что соответствует прямоугольному треугольнику. Таким образом, может наблюдаться неустойчивость решения, если сам треугольник $p_0p_1p_2$ прямоугольный и углы $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайлов А. П., Чибуничев А. Г. Курс лекций по фотограмметрии. МИИГАиК Ракурс, 2013.

2. Лобанов А. Н., Куприна Н. Т., Чумаченко З. Н. Фотограмметрия. М.: «Недра», 1984. – 552 с.

3. Клячин В.А., Григорьева Е.Г. Алгоритм автоматического определения параметров ориентации камеры в пространстве на основе характерных элементов фотоснимка// Тенденции развития науки и образования. 2018. № 45-6. С. 10–20.

4. Grigorieva E. G., Klyachin V. A. Mathematical model of 3D maps and design of information system for its control//Journal of Computational and Engineering Mathematics, 2016., № 4 p. 51–58.

5. Локтев Д.А., Быков Ю.А., Коваленко Н. Использование метода анализа размытия изображения для определения внешних дефектов железнодорожного пути // Наука и техника транспорта. 2016. № 1. С. 69–75.

6. Локтев А.А., Локтев Д.А. Метод определения расстояния до объекта путем анализа размытия его изображения // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 140–151.

7. Локтев А.А., Бахтин В.Ф., Черников И.Ю., Локтев Д.А. Методика определения внешних дефектов сооружений путем анализа серии его изображений в системе мониторинга // Вестник МГСУ. 2015. № 3. С. 7–16.

8. Локтев Д.А., Локтев А.А. Определение расстояния до объекта по серии его изображений // В сборнике: Математика, информатика, естествознание в экономике и обществе (МИЕСЭКО – 2015) труды Всероссийской научной конференции: в 2-х томах. 2015. С. 52–57.

9. Локтев Д.А. Определение геометрических параметров объекта с помощью анализа серии его изображений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2015. Т. 9. № 5. С. 47–53.

10. Локтев А.А., Локтев Д.А. Оценка измерений расстояния до объекта при исследовании его графического образа // Вестник МГСУ. 2015. № 10. С. 54–65.

11. Локтев Д.А. Определение параметров объекта по серии его изображений в комплексной системе мониторинга //Путь и путевое хозяйство. 2015. № 2. С. 31–33.

12. Недзьведь О.В., Абламейко С.В., Белоцерковский А.М. Определение объемных характеристик динамических медицинских объектов // «Искусственный интеллект» 2010. № 4. С. 262–270.

13. Миров С., Иванов А., Огурцова Т., Дюкенджиев Е. Применение данных дистанционного зондирования в подометрии // 4-я Международная конференция пользователей ЦФС PHOTOMOD : Сборник тезисов докладов. – 2004. – С. 25–28.

14. Jackson A. S. et al. Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression //2017 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). – IEEE, 2017. – p. 1031–1039.

15. Ferkova, Z., Urbanova, P., Cerny, D., Zuzi, M., & Matula, P. (2018). Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image. // Multimedia Tools and Applications, 1–26.

16. Pang, G., Qiu, R., Huang, J., You, S., Neumann, U. (2015, May). Automatic 3D industrial point cloud modeling and recognition. In 2015 14th IAPR international conference on machine vision applications (MVA) (pp. 22-25). IEEE.

17. Kamyab, S., Ghodsi, A., Azimifar, Z. Deep Structure for end-to-end inverse rendering. // ArXiv, abs/1708.08998 (2017).

18. Kamyab S. and Zohreh A. End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image. // ArXiv, abs/1711.05858 (2017).

19. Левина О.С., Воронин В.В., Письменскова М.М., Гапон Н.В., Куркина А.В. Анализ основных этапов метода реконструкции трехмерных моделей поверхностей объектов // Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации. 2016. № 6-2. С. 25–32.

20. Тагиров Т.С. Алгоритмические методы решения задач реконструкции объектов в 2D и 3D областях // «Современные проблемы науки и образования» № 2, 2014.

21. Penczek P. A. Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections. // Methods Enzymol. 2010;482:1?33. doi:10.1016/S0076-6879(10)82001-4

22. Molnar, J., Frohlich, R., Chetverikov, D., Kato, Z. 3D reconstruction of planar patches seen by omnidirectional cameras. // In 2014 International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA) . IEEE. 2014. p. 1–8.

REFERENCES

1. Mikhailov A. P. & Chibunichev A. G. 2013. *Kurs lekcij po fotogrammetrii [Course of lectures on photogrammetry],* Moscow State University of Geodesy and Cartography, Racurs, Moscow.

2. Lobanov A. N., Kuprina N. T. & Chumachenko 3. N. 1984. *Fotogrammetriya [Photogrammetry]*, «Nedra», Moscow, pp. 552.

3. Klyachin V.A. & Grigorieva E.G. 2018. ”Algorithm for automatic determination of camera orientation parameters in space based on characteristic elements of a photograph”, *Tendencii razvitiya nauki i obrazovaniya.*, no. 45-6, pp. 10 – 20.

4. Grigorieva E. G.& Klyachin V. A. 2016. "Mathematical model of 3D maps and design of information system for its control", *Journal of Computational and Engineering Mathematics*, no. 4, pp. 51 – 58.

5. Loktev D.A., Bykov Yu.A. & Kovalenko N. 2016. "Using the method of image blur analysis to determine external defects of the railway", *Nauka i texnika transporta*, no. 1, pp. 69 – 75

6. Loktev A.A. & Loktev D.A. 2015. "Method of determining the distance to the object by analyzing the blurring of its image", *Vestnik MGSU*, no. 6, pp. 140 – 151.

7. Loktev A.A., Bakhtin V.F., Chernikov I.Y. & Loktev D.A. 2015. "Methods for determining the external defects of structures by analyzing a series of its images in the monitoring system", *Vestnik MGSU*, no. 3, pp. 7 – 16.

8. Loktev D.A. & Loktev A.A. 2015. "Determining the distance to an object from a series of its images", *V sbornike: Matematika, informatika, estestvoznanie v ekonomike i obshhestve trudy Vserossijskoj nauchnoj konferencii: v 2-x tomax* (In the collection: Mathematics, Informatics, Science in Economics and Society, works All-Russian scientific conference: in 2 volumes). Moscow. 2015. pp. 52 – 57)

9. Loktev D.A. 2015. "Determination of geometric parameters of the object by analyzing a series of its images", *T-Comm: Telekommunikacii i transport*, vol. 9, no. 5, pp. 47 – 53

10. Loktev A.A. & Loktev D.A. 2015. "Estimation of measurements of distance to object at research of its graphic image", *Vestnik MGSU*, no. 10, pp. 54 – 65.

11. Loktev D.A. 2015. "Determination of object parameters by a series of its images in a complex monitoring system", *Put‘ i putevoe xozyajstvo*, no. 2, pp. 31 – 33.

12. Nedzved O.V., Ablameiko S.V. & Belotserkovsky A.M. 2010. "Determination of volumetric characteristics dynamic medical objects", *Iskusstvenny‘j intellekt*, no. 4, pp. 262 – 270.

13. Mirov S., Ivanov A., Ogurtsova T. & Dyukendzhiev E. 2004. "Application of remote sensing data in podometry", *4-ya Mezhdunarodnaya konferenciya pol‘zovatelej CzFS PHOTOMOD : Sbornik tezisov dokladov* (4th International Conference of users of CFS PHOTOMOD: Collection of abstracts.) pp. 25 – 28.

14. Jackson A. S. et al. 2017. "Large pose 3D face reconstruction from a single image via direct volumetric CNN regression" *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. IEEE, pp. 1031 – 1039.

15. Ferkova, Z., Urbanova, P., Cerny, D., Zuzi, M., & Matula, P. 2018. "Age and gender-based human face reconstruction from single frontal image", *Multimedia Tools and Applications*, pp. 1 – 26.

16. Pang, G., Qiu, R., Huang, J., You, S., & Neumann, U. 2015, "Automatic 3D industrial point cloud modeling and recognition", *In 2015 14th IAPR international conference on machine vision applications (MVA).* IEEE. pp. 22 – 25.

17. Kamyab S., Ghodsi A. & Azimifar, Z. 2017, "Deep Structure for end-to-end inverse rendering", *ArXiv, abs/1708.08998.*

18. Kamyab S. and Zohreh A. 2017, "End-to-end 3D shape inverse rendering of different classes of objects from a single input image", *ArXiv, abs/1711.05858.*

19. Levina O.S., Voronin V.V., Pis'menkova M.M., Gapon N.V.,& Kurkina A.V. 2016, "Analysis of the main stages of the method of reconstruction of three-dimensional models of object surfaces", *Informacionnye tehnologii. Radiojelektronika. Telekommunikacii*, no. 62. pp. 25 – 32.

20. Tagirov T.S. 2014, "Algorithmic methods for solving problems of reconstruction of objects in 2D and 3D regions", *Sovremennye problemy nauki i obrazovanija*, no. 2.

21. Penczek P. A. 2010, "Fundamentals of three-dimensional reconstruction from projections", *Methods Enzymol.*, no. 482, pp. 1 – 33. doi:10.1016/S0076-6879(10)82001-4

22. Molnar, J., Frohlich, R., Chetverikov, D. & Kato, Z. 2014, "3D reconstruction of planar patches seen by omnidirectional cameras", *In 2014 International Conference on Digital Image Computing: Techniques and Applications (DICTA).* IEEE. pp. 1 – 8.

Получено 11.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.