ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 15 Выпуск 4 (2014)

УДК 519.2+511

ОБ ОДНОМ ДИОФАНТОВОМ УРАВНЕНИИ С ЛАКУНАРНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ[1]

В. Н. Чубариков (г. Москва), Н. М. Добровольский (г. Тула)

Аннотация

С помощью метода М. П. Минеева основных и вспомогательных систем доказана теорема о количестве решений диофантова неоднородного уравнения с неизвестными из лакунарной последовательности натуральных чисел.

Исследован вопрос о количестве основных систем и для него получено полиномиальное выражение с использованием чисел Бернулли.

Получены оценки для числа вспомогательных систем.

Ключевые слова: диофантово уравнение, лакунарная последовательность.

Библиография: 12 названий.

ON SOME DIOPHANTINE EQUATION WITH VARIABLES FROM LACUNAR SEQUENCE

V. N. Chubarikov (Moscow), N. M. Dobrovolskiy (Tula)

Abstract

By M. P. Mineev's method of basic and auxiliary systems, we prove a theorem on a number of solutions of some inhomogeneous Diophantine equation with variables from a lacunar sequence of natural numbers.

Using Bernoulli numbers, we obtain a polynomial-type expression for the number of basic systems. The estimates for the number of auxiliary systems are also given.

Keywords: Diophantine equation, gap sequence.

Bibliography: 12 titles.

[1]Работа выполнена по гранту РФФИ, №НК-13-01-00835

1. Введение

Рассмотрим F_x— лакунарную последовательность натуральных чисел типа β. Напомним, что монотонная последовательность F_x натуральных чисел называется лакунарной типа β с константой A, если выполнены соотношения

$$\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1, \quad F_x \leqslant A\beta^x.$$

Нетрудно видеть, что лакунарные последовательности имеют экспоненциальный рост:

$$F_1\beta^{x-1} \leqslant F_x \leqslant A\beta^x. \tag{1}$$

В класс лакунарных последовательностей попадают целочисленные геометрические прогрессии со знаменателем больше 1, многие рекуррентные последовательности с характеристическими числами больше 1 [5].

Лемма 1. *Пусть $N, k, m_1, \ldots, m_k$ — натуральные числа, а F_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$. Тогда для количества решений $r_k(N)$ уравнения*

$$N = m_1F_{x_1} + \ldots + m_kF_{x_k} \tag{2}$$

в целых числах $x_1, \ldots, x_k \geqslant 1$ справедлива следующая оценка $r_k(N) \leqslant c^k k!$, где $c = \frac{\beta}{\beta-1}$.

Доказательство см. в [1], [2] стр. 16, [3] стр. 7–8.

Пусть T_m — количество решений уравнения

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m,$$

где m — целое число, отличное от нуля.

В работе [12] с использованием леммы 1 доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть F_x — лакунарная последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$, $F_x \leqslant A\beta^x$, k — фиксированное натуральное число, P — растущее натуральное число, T_m — количество решений диофантова уравнения*

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m \tag{3}$$

в целых числах $1 \leqslant x_i, y_j \leqslant P$. Тогда верно следующее неравенство

$$T_m \leqslant (2\gamma + 1)c^k k! P^{k-1} + 2c^k k! C_k^2 T P^{k-1},$$

где $\gamma = \left[\frac{\ln\left(\frac{c_2}{c_1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1$, $c = \frac{\beta}{\beta-1}$, $c_1 = \frac{1}{2A}$, $c_2 = \frac{\beta}{\kappa F_1}$, $\kappa = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\beta}\right)$ и $T = \left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}\right] + 1.$

Уравнения вида (2) будем называть уравнением первого типа, а уравнение вида (3) — второго типа.

Цель данной работы — дать новое доказательство уточненной теоремы о количестве решений диофантова неоднородного уравнения второго типа с неизвестными из лакунарной последовательности натуральных чисел.

Существенную роль в нашем исследовании будет играть метод М. П. Минеева основных и вспомогательных систем. Следуя М. П. Минееву, система чисел $x_1, \ldots, x_k$ называется *основной*, если для любых i, j $(i \neq j)$ выполняется неравенство $|x_i - x_j| \geqslant T$, где T —некоторое натуральное число. В противном случае система $x_1, \ldots, x_k$ называется *вспомогательной*.

В работах [4, 6] рассматриваются связанные вопросы и применение указанных оценок к исследованию тригонометрических сумм.

2. Число основных и вспомогательных систем

Прежде всего определим число основных систем $N_{k,P,T}$, то есть таких наборов натуральных чисел $x_1, \ldots, x_k$, что выполнены соотношения $x_j \leqslant P$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, для любых i, j $(i \neq j)$ выполняется неравенство $|x_i - x_j| \geqslant T$.

Назовем основную систему $x_1, \ldots, x_k$ *канонической*, если выполнены соотношения $x_1 > x_2 > \ldots > x_k$. Количество канонических основных систем обозначим через $K_{k,P,T}$.

Из любой канонической основной системы перестановками членов получается $k!$ различных основных систем, а из любой основной системы перестановками можно получить только одну каноническую основную систему. Отсюда следует, что $N_{k,P,T} = k! K_{k,P,T}$.

Ясно, что наименьшая каноническая основная система имеет вид

$$x_1 = 1 + (k-1)T > x_2 = 1 + (k-2)T > \ldots > x_{k-1} = 1 + T > x_k = 1.$$

Поэтому при $P \leqslant (k-1)T$ имеем $N_{k,P,T} = K_{k,P,T} = 0$.

Далее нам потребуются числа и многочлены Бернулли (см. [7] стр. 256 – 273, [8] стр. 45 – 46).

По определению числа Бернулли задаются равенствами:

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} C_{n+1}^{n+1-\nu} B_\nu\right) \quad (n \geqslant 1);$$

соответственно, многочлены Бернулли —

$$B_0(x) = 1, \quad B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} C_n^\nu B_\nu x^{n-\nu} \quad (n \geqslant 1).$$

Для степеней натурального ряда справедлива формула

$$\sum_{x=0}^{P-1} x^{\nu} = \frac{B_{\nu+1}(P) - B_{\nu+1}}{\nu+1} \quad (\nu \geqslant 1),$$

или

$$\sum_{x=1}^{P} x^{\nu} = \frac{B_{\nu+1}(P+1) - B_{\nu+1}}{\nu+1} = \frac{B_{\nu+1}(P) + (\nu+1)P^{\nu} - B_{\nu+1}}{\nu+1} \quad (\nu \geqslant 1).$$

Определим многочлены $Ch_k(x)$ для натуральных x равенствами:

$$Ch_1(x) = x, \quad Ch_{\nu}(x) = \sum_{y=1}^{x} Ch_{\nu-1}(y) \quad (\nu \geqslant 2).$$

Лемма 2. *Для многочленов $Ch_k(x)$ справедливо равенство*

$$Ch_{\nu}(x) = \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} x^{\mu} = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} Ch_{\nu,\mu} x^{\mu} + \frac{x^{\nu}}{\nu!}, \tag{4}$$

где

$$Ch_{\nu,\mu} = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu!}, & \text{при } \mu = \nu, \\ \sum\limits_{\lambda=1}^{\nu-1} Ch_{\nu-1,\lambda} B_{\lambda} + Ch_{\nu-1,1}, & \text{при } \mu = 1, \nu > 1, \\ \sum\limits_{\lambda=\mu-1}^{\nu-1} \frac{Ch_{\nu-1,\lambda}}{\lambda+1} C_{\lambda+1}^{\mu} B_{\lambda+1-\mu} + Ch_{\nu-1,\mu}, & \text{при } \nu > 1, 1 < \mu < \nu, \\ 1, & \text{при } \mu = \nu = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Доказательство. Проведем индукцию по ν. Получим

$$Ch_{\nu+1}(x) = \sum_{y=1}^{x} Ch_{\nu}(y) = \sum_{y=1}^{x} \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} y^{\mu} = \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} \sum_{y=1}^{x} y^{\mu} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} \frac{B_{\mu+1}(x+1) - B_{\mu+1}}{\mu+1} = \sum_{\mu=1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu+1} \left(\sum_{\lambda=1}^{\mu+1} C_{\mu+1}^{\lambda} B_{\mu+1-\lambda} x^{\lambda} + (\mu+1) x^{\mu} \right) =$$

$$= \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} B_{\mu} \right) x + \sum_{\lambda=2}^{\nu+1} \left(\sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu+1} C_{\mu+1}^{\lambda} B_{\mu+1-\lambda} \right) x^{\lambda} + \sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} x^{\mu} =$$

$$= \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} Ch_{\nu,\mu} B_{\mu} + Ch_{\nu,1} \right) x + \sum_{\lambda=2}^{\nu} \left(\sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu} \frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu+1} C_{\mu+1}^{\lambda} B_{\mu+1-\lambda} + Ch_{\nu,\lambda} \right) x^{\lambda} + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!},$$

поэтому

$$Ch_{\nu+1,1}=\sum_{\mu=1}^{\nu}Ch_{\nu,\mu}B_{\mu}+Ch_{\nu,1}$$

и

$$Ch_{\nu+1,\lambda}=\sum_{\mu=\lambda-1}^{\nu}\frac{Ch_{\nu,\mu}}{\mu+1}C_{\mu+1}^{\lambda}B_{\mu+1-\lambda}+Ch_{\nu,\lambda}\quad(1<\lambda<\nu+1),\quad Ch_{\nu+1,\nu+1}=\frac{1}{(\nu+1)!},$$

что доказывает лемму. □

Теорема 2. *При $P>(k-1)T$ для количества основных систем справедливы соотношения*

$$K_{k,P,T}=\sum_{\mu=1}^{k-1}Ch_{k,\mu}(P-(k-1)T)^{\mu}+\frac{(P-(k-1)T)^{k}}{k!},\tag{6}$$

$$N_{k,P,T}=(P-(k-1)T)^{k}+k!\sum_{\mu=1}^{k-1}Ch_{k,\mu}(P-(k-1)T)^{\mu}.\tag{7}$$

Доказательство. Ясно, что $K_{1,P,t}=P$, так как условия основной системы и канонической являются тривиальными (отсутствуют) и любое натуральное x с $1\leqslant x\leqslant P$ образует каноническую основную систему.

При $k>1$ рассмотрим каноническую систему $x_1>x_2>\ldots>x_k$. Ясно, что x_1 — любое из условий $(k-1)T+1\leqslant x\leqslant P$.

При фиксированном значении x_1 числа $x_2>\ldots>x_k$ образуют каноническую основную систему при замене P на x_1-T. Поэтому их будет ровно $K_{k-1,x_1-T,T}$. Следовательно, имеет место рекуррентное соотношение

$$K_{k,P,T}=\sum_{x=(k-1)T+1}^{P}K_{k-1,x-T,T}.$$

По индукции покажем, что справедливо равенство $K_{k,P,T}=Ch_k(P-(k-1)T)$.

Действительно, при $k=1$ имеем $K_{1,P,t}=P=Ch_1(P-(1-1)T)$ и утверждение справедливо.

Далее,

$$K_{k+1,P,T}=\sum_{x=kT+1}^{P}K_{k,x-T,T}=\sum_{x=kT+1}^{P}Ch_k(x-T-(k-1)T)=$$
$$=\sum_{x=1}^{P-kT}Ch_k(x)=Ch_{k+1}(P-kT)$$

и утверждение доказано для любого натурального k.

Применяя лемму 2, получим равенство (6), из которого непосредственно вытекает равенство (7). □

Обозначим через $N^*_{k,P,T}$ количество вспомогательных систем, то есть таких систем $x_1,\ldots,x_k$ натуральных чисел, что выполнены соотношения $x_j \leqslant P$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, и найдутся i,j $(i \neq j)$, для которых выполняется неравенство $|x_i - x_j| < T$.

Лемма 3. *При $k \geqslant 2$ выполняется оценка*

$$N^*_{k,P,T} \leqslant C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть система $x_1,\ldots,x_k$ вспомогательная, тогда найдутся номера i и j такие, что $1 \leqslant x_i - x_j < T$ или $x_i = x_j$.

В первом случае номера i и j можно выбрать $k(k-1)$ способами, переменные x_ν $(\nu \neq j, i)$ могут независимо принимать любое значение от 1 до P, переменная x_i — от 2 до P, а переменная x_j — не более $\min(x_i-1, T-1)$ различных значений от $x_i - 1$ до $\max(x_i - T + 1, 1)$.

Во втором случае номера i и j можно выбрать C_k^2 способами, переменные x_ν $(\nu \neq j, i)$ могут независимо принимать любое значение от 1 до P, переменные $x_i = x_j$ и одновременно принимают P различных значений от 1 до P.

Поэтому

$$N^*_{k,P,T} \leqslant k(k-1)P^{k-2}\left(\sum_{x=T}^{P}(T-1) + \sum_{x=2}^{T-1}(x-1)\right) + C_k^2 P^{k-1} =$$
$$= k(k-1)P^{k-2}\left((P-T+1)(T-1) + \frac{(T-2)(T-1)}{2}\right) + C_k^2 P^{k-1} =$$
$$= C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right).$$

□

3. Свойства основных канонических систем

Обозначим через $X_k(P,T)$ множество всех основных канонических систем $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)$. Таким образом имеем:

$$X_k(P,T) = \left\{ \mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k) \,\middle|\, \begin{array}{c} 1 \leqslant x_k < \ldots < x_1 \leqslant P, \\ x_j - x_{j+1} \geqslant T, j = 1,\ldots,k-1 \end{array} \right\}.$$

На множестве основных канонических систем задан естественный лексикографический порядок: $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда найдется номер $j \leqslant k$ такой, что $x_\nu = y_\nu$ при $\nu < j$ и $x_j > y_j$. Величину $j = j(\mathbf{x},\mathbf{y})$ будем называть индексом порядка.

Ясно, что максимальный элемент $\mathbf{x}_{\max} = (P, P-T, \ldots, P-(k-1)T)$, а минимальный элемент $\mathbf{x}_{\min} = (1+(k-1)T, \ldots, 1+T, 1)$.

Зададим на множестве основных канонических систем $X_k(P,T)$ функционал $F(\mathbf{x})$ равенством

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{k} F_{x_\nu}.$$

Лемма 4. *При $T > \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}$ функционал $F(\mathbf{x})$ монотоннен на множестве основных канонических систем $X_k(P,T)$, то есть из $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ следует $F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{y})$. При этом справедливы неравенства*

$$\frac{\beta-1}{2\beta}F_{x_j} < F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) < \frac{4}{3}F_{x_j}, \tag{9}$$

где $j = j(\mathbf{x},\mathbf{y})$ — индекс порядка.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{x}_j^+$ наибольшую основную каноническую систему $\mathbf{z}$ такую, что $j(\mathbf{z},\mathbf{x}) > j(\mathbf{x},\mathbf{y})$, а через $\mathbf{x}_j^-$ наименьшую основную каноническую систему $\mathbf{z}$ такую, что $j(\mathbf{x},\mathbf{z}) > j(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{x}_j^+ = (x_1, \ldots, x_j, x_j - T, \ldots, x_j - (k-j)T)$ и $\mathbf{x}_j^- = (x_1, \ldots, x_j, 1+(k-j-1)T, \ldots, 1+T, 1)$.

Аналогично, обозначим через $\mathbf{y}_j^+$ наибольшую основную каноническую систему $\mathbf{z}$ такую, что $j(\mathbf{x},\mathbf{z}) = j(\mathbf{x},\mathbf{y})$, а через $\mathbf{y}_j^-$ наименьшую основную каноническую систему $\mathbf{z}$ такую, что $j(\mathbf{x},\mathbf{z}) = j(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{y}_j^+ = (x_1, \ldots, x_j - 1, x_j - 1 - T, \ldots, x_j - 1 - (k-j)T)$ и $\mathbf{y}_j^- = (x_1, \ldots, x_{j-1}, 1+(k-j)T, 1+(k-j-1)T, \ldots, 1+T, 1)$.

Из сделанных определений следует, что

$$\mathbf{x}_j^+ \geqslant \mathbf{x} \geqslant \mathbf{x}_j^- > \mathbf{y}, \quad j(\mathbf{x}_j^+,\mathbf{y}) = j(\mathbf{x},\mathbf{y}) = j(\mathbf{x}_j^-,\mathbf{y})$$
$$\mathbf{x} > \mathbf{y}_j^+ \geqslant \mathbf{y} \geqslant \mathbf{y}_j^-, \quad j(\mathbf{x},\mathbf{y}_j^+) = j(\mathbf{x},\mathbf{y}) = j(\mathbf{x},\mathbf{y}_j^-).$$

Переходя к значениям функционалов, получим

$$F(\mathbf{x}_j^+) \geqslant F(\mathbf{x}) \geqslant F(\mathbf{x}_j^-) > F(\mathbf{y}),$$
$$F(\mathbf{x}) > F(\mathbf{y}_j^+) \geqslant F(\mathbf{y}) \geqslant F(\mathbf{y}_j^-).$$

Поэтому

$$F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) \geqslant F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) \geqslant F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+).$$

Далее имеем:

$$F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) = F_{x_j} + \sum_{\nu=1}^{k-j} F_{x_j - \nu T} - \sum_{\nu=0}^{k-j} F_{1+\nu T},$$

$$F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+) = F_{x_j} + \sum_{\nu=0}^{k-j-1} F_{1+\nu T} - \sum_{\nu=0}^{k-j} F_{x_j - 1 - \nu T}.$$

Из определения лакунарной последовательности имеем неравенства

$$\frac{F_{x+1}}{\beta} \geqslant F_x \geqslant \beta F_{x-1}.$$

Отсюда следует, что

$$F_{x_j-\nu T} \leqslant \frac{F_{x_j}}{\beta^{\nu T}}, \quad F_{x_j-1-\nu T} \leqslant \frac{F_{x_j}}{\beta^{1+\nu T}}$$

и

$$F(\mathbf{x}_j^+) - F(\mathbf{y}_j^-) \leqslant F_{x_j} \cdot \left(1 + \sum_{\nu=1}^{k-j} \frac{1}{\beta^{\nu T}}\right) =$$

$$= F_{x_j} \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} < F_{x_j} \frac{\beta^T}{\beta^T - 1},$$

$$F(\mathbf{x}_j^-) - F(\mathbf{y}_j^+) \geqslant F_{x_j} \left(1 - \sum_{\nu=0}^{k-j} \frac{1}{\beta^{1+\nu T}}\right) = F_{x_j} \cdot \left(1 - \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}}\right)$$

При $T > \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln \beta}$ имеем $T > \frac{\ln 2}{\ln \beta}$ и $\beta^T > \frac{4\beta}{\beta-1} > 4$, $\frac{\beta^T}{\beta^T - 1} < \frac{4}{3}$.
Аналогично, имеем

$$\frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} < \frac{\beta^T}{\beta(\beta^T - 1)} < \frac{\beta^T}{\beta(\beta^T - 1)} < \frac{\frac{4\beta}{\beta-1}}{\beta(\frac{4\beta}{\beta-1} - 1)} = \frac{4}{3\beta + 1}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{\beta^{T(k-j+1)} - 1}{\beta(\beta^T - 1)\beta^{T(k-j)}} > 1 - \frac{4}{3\beta + 1} > \frac{\beta - 1}{2\beta},$$

так как

$$(3\beta + 1)(\beta - 1) < 2\beta(3\beta + 1) - 8\beta;$$
$$3\beta^2 - 2\beta - 1 < 6\beta^2 - 6\beta;$$
$$3\beta^2 - 4\beta + 1 = 3(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{3}\right) > 0 \quad \text{при } \beta > 1.$$

Таким образом соотношения (9) доказаны и доказательство леммы завершено. □

Доказанная лемма позволяет существенно усилить лемму 1 для случая канонического основного решения.

Лемма 5. *Пусть N, k — натуральные числа, а F_x — последовательность натуральных чисел такая, что $\frac{F_{x+1}}{F_x} \geqslant \beta > 1$. Тогда при $T > \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln \beta}$ для количества основных канонических решений $r_k^*(N, T)$ уравнения*

$$N = F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} \tag{10}$$

в целых числах $x_1, \ldots, x_k \geqslant 1$ справедлива следующая оценка $r_k^*(N) \leqslant 1$.

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ — основное каноническое решение уравнения (10), то $F(\mathbf{x}) = N$. Если $\mathbf{y}$ — другое основное каноническое решение, то $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ и по лемме 4 $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{y})$. Следовательно, уравнение (10) имеет не более одного основного канонического решения. □

4. Число решений диофантова уравнения первого типа для лакунарной последовательности

Рассмотрим неоднородное диофантово уравнение первого типа вида

$$N = F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} \tag{11}$$

для лакунарной последовательности F_1, $F_2, \ldots$.

Уравнение (11) будем называть каноническим, если выполнено дополнительно условие упорядоченности $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_k$.

Через $r_k(N)$ обозначим количество решений уравнения (11), а через $r_k^*(N)$ — количество решений канонического уравнения. Ясно, что $r_k(N) \leqslant k! r_k^*(N)$. Очевидно, что $r_k(N)$ равно числу представлений натурального N в виде сумм k слагаемых из лакунарной последовательности, а $r_k^*(N)$ равно числу канонических представлений натурального N в виде сумм k слагаемых из лакунарной последовательности, то есть невозрастающей последовательностью слагаемых.

Нетрудно видеть, что максимальное значение N, имеющего представления со слагаемыми $x_\nu \leqslant P$, есть kF_P. Так как количество систем $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ с $x_\nu \leqslant P$ $(1 \leqslant \nu \leqslant k)$ равно P^k, а $kF_P \geqslant kF_1\beta^{P-1}$, то для большей части значений N величина $r_k(N) = 0$.

В силу важности леммы 1 приведем доказательство модифицированного утверждения для числа решений уравнения (11).

Лемма 6. *Для числа решений уравнения (11) справедлива оценка*

$$r_k(N) \leqslant k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. При $k = 1$ справедливо равенство

$$r_1(N) = \begin{cases} 1, & \text{при } N \in \{F_1, F_2, \ldots\}, \\ 0, & \text{при } N \notin \{F_1, F_2, \ldots\} \end{cases}$$

и утверждение леммы справедливо.

Пусть $k > 1$. Обозначим через n номер, такой что $F_n \leqslant N < F_{n+1}$. В силу неравенств (1) имеем

$$\frac{\ln N - \ln A}{\ln \beta} - 1 < n \leqslant \frac{\ln N - \ln F_1}{\ln \beta} + 1, \quad \beta^{1-n} \leqslant \frac{F_1}{N}.$$

Обозначим через $Y_k(N)$ множество всех $\mathbf{y}$ таких, что $F(\mathbf{y}) = N$, тогда справедливо равенство

$$r_k(N) = \sum_{\mathbf{y}\in Y_k(N)} \frac{F(\mathbf{y})}{N} = \sum_{\nu=1}^{k} \sum_{\mathbf{y}\in Y_k(N)} \frac{F_{y_\nu}}{N}.$$

Так как все переменные равноправные, то

$$\sum_{\mathbf{y}\in Y_k(N)} \frac{F_{y_\nu}}{N} = \sum_{\mathbf{y}\in Y_k(N)} \frac{F_{y_\mu}}{N}$$

для любых $1 \leqslant \nu, \mu \leqslant k$ и

$$r_k(N) = k \sum_{\mathbf{y}\in Y_k(N)} \frac{F_{y_1}}{N} = k \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{N} r_{k-1}(N - F_j).$$

Воспользуемся оценкой $F_j \leqslant \dfrac{F_n}{\beta^{j-1}} \leqslant \dfrac{N}{\beta^{j-1}}$ и индукционным предположением, получим

$$r_k(N) \leqslant k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta^{j-1}} (k-1)! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-2} =$$

$$= k! \left(\frac{\beta - \beta^{1-n}}{\beta - 1} \right) \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-2} \leqslant k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1}$$

и лемма доказана. □

5. Число решений диофантова уравнения второго типа для лакунарной последовательности

Так как уравнения

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} + m$$

и

$$F_{x_1} + \ldots + F_{x_k} = F_{y_1} + \ldots + F_{y_k} - m$$

имеют одинаковое количество решений при $1 \leqslant x_j, y_j \leqslant P$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$, то без ограничения общности можно считать, что $m > 0$.

Будем говорить, что решение $F_{x_1}, \ldots, F_{x_k}, F_{y_1}, \ldots, F_{y_k}$ диофантова уравнения (3)— *основное*, если и $x_1, \ldots, x_k$, и $y_1, \ldots, y_k$ — основные системы. В противном случае, когда либо $x_1, \ldots, x_k$, либо $y_1, \ldots, y_k$, либо обе системы вспомогательные, то и решение $F_{x_1}, \ldots, F_{x_k}, F_{y_1}, \ldots, F_{y_k}$ называется *вспомогательным*.

Обозначим через $T_m(k,P,T)$ число основных решений уравнения (3), а через $T_m^*(k,P,T)$ число вспомогательных решений, тогда

$$T_m = T_m(k,P,T) + T_m^*(k,P,T). \tag{13}$$

Лемма 7. *Для количества вспомогательных решений уравнения (3) справедливо неравенство*

$$T_m^*(k,P,T) \leqslant 2C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $x_1,\ldots,x_k$ — фиксированная вспомогательная система, для которой $F_{x_1}+\ldots+F_{x_k} > m$, тогда для натурального

$$N_1 = F_{x_1}+\ldots+F_{x_k} - m$$

решения уравнения

$$F_{y_1}+\ldots+F_{y_k} = N_1 \tag{15}$$

будут задавать вспомогательные решения $F_{x_1},\ldots,F_{x_k},F_{y_1},\ldots,F_{y_k}$ диофантова уравнения (3). По лемме 6 таких решений уравнения (15) не более $c^k k!$. Поэтому, применяя лемму 3, получим, что число вспомогательных решений, для которых $x_1,\ldots,x_k$ — вспомогательная система, будет не более

$$C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}.$$

Аналогично, если $y_1,\ldots,y_k$ — произвольная фиксированная вспомогательная система и натуральное $N_2 = F_{y_1}+\ldots+F_{y_k}+m$, то решения уравнения

$$F_{x_1}+\ldots+F_{x_k} = N_2 \tag{16}$$

будут задавать вспомогательные решения $F_{x_1},\ldots,F_{x_k},F_{y_1},\ldots,F_{y_k}$ диофантова уравнения (3). По лемме 1 таких решений уравнения (16) не более $c^k k!$. Поэтому, применяя лемму 3, получим, что число вспомогательных решений, для которых $y_1,\ldots,y_k$ — вспомогательная система, будет не более

$$C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}.$$

Объединяя обе оценки, получим утверждение леммы. □

Лемма 8. *При $T > \frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln\beta}$ для количества $T_m(k,P,T)$ основных решений уравнения (3) справедлива оценка*

$$T_m(k,P,T) \leqslant k\cdot(k!)^2\cdot\left(\left[\frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln\beta}\right]+3\right)\left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1}\cdot$$
$$\cdot Ch_{k-1}(P-(k-2)T). \tag{17}$$

Доказательство. Из любого основного решения $F_{x_1}, \ldots, F_{x_k}, F_{y_1}, \ldots, F_{y_k}$ диофантового уравнения (3) перестановками можно получить только одно основное каноническое решение $F_{x_1^*}, \ldots, F_{x_k^*}, F_{y_1^*}, \ldots, F_{y_k^*}$, то есть такое, где $x_1^* > \ldots > x_k^*$, $y_1^* > \ldots > y_k^*$. Наоборот, из любого основного канонического решения можно получить ровно $(k!)^2$ различных основных решений.

Кроме этого заметим, что в силу неоднородности уравнения, соглашения о положительности свободного члена m и леммы 4 для решения $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ имеем $\mathbf{x} > \mathbf{y}$. Поэтому для любого основного канонического решения $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ определен индекс порядка $j = j(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Обозначим через $T^*_{m,j}(k, P, T)$ количество основных канонических решений уравнения (3), для которых индекс порядка равен j.

Согласно предыдущему получим

$$T_m(k, P, T) = (k!)^2 \sum_{j=1}^{k} T^*_{m,j}(k, P, T). \tag{18}$$

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ основное каноническое решение с индексом порядка j уравнения (3), тогда согласно лемме 4 получим

$$\frac{\beta - 1}{2\beta} F_{x_j} < F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y}) = m < \frac{4}{3} F_{x_j}.$$

Отсюда и из неравенств (1) следует, что

$$\frac{\beta - 1}{2\beta} F_1 \beta^{x_j - 1} < m < \frac{4}{3} A \beta^{x_j},$$

$$\frac{\ln m + \ln 3 - \ln 4 - \ln A}{\ln \beta} < x_j < \frac{\ln m + \ln 2 - \ln F_1 - \ln(\beta - 1)}{\ln \beta} + 2,$$

поэтому количество различных значений x_j не превосходит величины

$$C = \left[\frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln \beta} \right] + 3.$$

Так как при фиксированном значении основной канонической системы $\mathbf{x}$ величина $r_k(F(\mathbf{x}) - m)$ равна количеству всех систем $\mathbf{y}$, удовлетворяющих уравнению $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y}) + m$, то величина $k! r_k(F(\mathbf{x}) - m)$ будет не превосходить согласно лемме 5 величины

$$k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1} \right)^{k-1}.$$

Если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ — основная каноническая система, то и система $\mathbf{z} = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k)$, получающаяся выкидыванием j-ой компоненты, будет основной канонической системой. Поэтому количество основных канонических систем $\mathbf{x}$ с ограничением на j-ую компоненту, что она принимает не более C значений, будет не превосходить величины $C K_{k-1,P,T}$.

Так как последняя оценка не зависит от j, то для числа основных решений уравнения (3) получаем

$$T_m(k,P,T) \leqslant k \cdot k! \cdot C \cdot K_{k-1,P,T} \cdot k! \cdot \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1},$$

что доказывает утверждение леммы. □

Теорема 3. *Для количества решений уравнения (3) справедлива оценка*

$$T_m \leqslant 2C_k^2 P^{k-1} T \left(2 - \frac{1}{T} - \frac{T-1}{P}\right) k! \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1} + k \cdot (k!)^2 \cdot$$
$$\cdot \left(\left[\frac{\ln 8 - \ln 3 + \ln A - \ln F_1}{\ln \beta}\right] + 3\right) \left(\frac{\beta - \frac{F_1}{N}}{\beta - 1}\right)^{k-1} \cdot Ch_{k-1}(P - (k-2)T), \quad (19)$$

где $T = \left[\frac{\ln\left(\frac{4\beta}{\beta-1}\right)}{\ln \beta}\right] + 1.$

Доказательство. Действительно, при указанном значении параметра T выполнены условия леммы 8, поэтому из лемм 7 и 8 следует утверждение теоремы. □

6. Заключение

Общий взгляд на применение диофантовых уравнений с показательной функцией содержится в работах А. Г. Постников [11] и М. П. Минеева [9, 10]. Было бы интересно получить результаты, аналогичные теоремам настоящей работы для функций с более медленным ростом на бесконености, чем показательная функция.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринов Р. Н., Чубариков В. Н. О распределении значений функций на последовательности Фиббоначи // Доклады РАН. 2001. Т. 379. № 1. С. 9—11.

2. Бояринов Р. Н. О распределении значений сумм арифметических функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2002.

3. Бояринов Р. Н., Нгонго И. И., Чубариков В. Н. О новых метрических теоремах в методе А. Г. Постникова // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: труды IV Междунар. Конф. Тула, 2002. С. 5—31.

4. Бояринов Р. Н. О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы // Дискрет. мат. 2012. Т. 24, № 1. С. 26—29.

5. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа, 2004.

6. Бояринов Р. Н. О скорости сходимости распределений случайных величин // Докл. РАН. 2010. Т. 435, № 3. С. 295—297.

7. А. О. Гельфонд Исчисление конечных разностей. — М.: Наука, 1967. 376 с.

8. Н. М. Коробов Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. — М.: МЦНМО. 2004. — 288 с.

9. Минеев М. П. Диофантово уравнение с показательной функцией и его приложение к изучению эргодической суммы // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1958. Т. 26, №5. С. 282–298.

10. Минеев М. П. О проблеме Тарри для быстрорастущих функций // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 4. С. 451–454.

11. Постников А. Г. Избранные труды / Под ред. В. Н. Чубарикова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 512 с.

12. И. С. Тимергалиев, Р. Н. Бояринов О распределении абсолютных значений тригонометрической суммы на коротких интервалах // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 2. С. 154–163.

REFERENCES

1. Boyarinov, R. N. & Chubarikov, C. N. 2001, "About the distribution of values of functions on a sequence of Fibbonaci", *Dokl. RAS*, vol. 379, № 1, pp. 9—11. (Russian)

2. Boyarinov, R. N. 2002, "About the distribution of values of sums of arithmetic functions", Thesis ... c.f.-m.s. Moscow: MSU. (Russian)

3. Boyarinov, R. N., Ngongo, I. I. & Chubarikov, V. N. 2002, "About new metric theorems in method A. G, Postnikova", *Modern problems of number theory and its applications: proceedings of the IV Int. Proc. Tula*, pp. 5—31. (Russian)

4. Boyarinov, R. N. 2012, "On the distribution of absolute values of of trigonometric sum", *Increments. Mat.*, vol. 24, № 1, pp. 26—29. (Russian)

5. Arkhipov G., I., Sadovnichy V. A. & Chubarikov V. N. 2004, "Lectures on mathematical analysis", *M: Drofa.* (Russian)

6. Boyarinov, R. N. 2010, "On the rate of convergence of the distributions of random variables" , *Dokl. Russian Academy of Sciences*, vol. 435. № 3, pp. 295—297. (Russian)

7. Gelfond, A. O. 1967, "Calculus of finite dierences" , *Moscow: Nauka*, 376 p. (Russian)

8. Korobov, N. M. 2004, "Number-Theoretic methods in approximate analysis" , *Moscow: MCCME.* 288 p. (Russian)

9. Mineev, M. P. 1958, "Diophantine equation with exponential function and its application to the study of the ergodic sum" , *Izv. A. S. SSSR, ser. Math.*, vol. 26, №. 5, pp. 282–298. (Russian)

10. Mineev, M. P. 1958, "The problem Tarri for the fast-growing functions" , *Mat. Proc.*, vol. 46(88), no. 4, pp. 451–454. (Russian)

11. Postnikov, A. G. 2005, "Selected works / edited by V. N. Chubarikov." , *Moscow: FIZMATLIT*, 512 p. (Russian)

12. Temirgaliev, I. S. & Boyarinov, R. N. 2013, "On the distribution of absolute values of trigonometric sums at short intervals" , *Chebyshev sb.*, vol. 14, is. 2, pp. 154–163. (Russian)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова.
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Поступило 5.12.2014