

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116

 $\omega\sigma$ -веерные классы Фиттинга

О. В. Камозина

Олеся Владимировна Камозина — кандидат физико-математических наук, доцент, Брянский государственный инженерно-технологический университет (г. Брянск).

e-mail: ovkamozina@yandex.ru

Аннотация

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп; формацией, если он замкнут относительно фактор-групп и подпрямых произведений; формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно.

Для непустого подмножества ω множества простых чисел $\mathbb{P}$ и разбиения $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$, в работе вводятся $\omega\sigma R$ -функция f и $\omega\sigma FR$ -функция φ . Областью определения данных функций является множество $\omega\sigma \cup \{\omega'\}$, где $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \emptyset\}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. Областью значений функций является множество классов Фиттинга и множество непустых формаций Фиттинга соответственно. С помощью функций f и φ определяется $\omega\sigma$ -веерный класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) \text{ для всех } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$ с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma$ -направлением φ .

В работе приведены примеры $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга. Выделены два вида $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга: $\omega\sigma$ -полные и $\omega\sigma$ -локальные классы Фиттинга. Их направления обозначены φ_0 и φ_1 соответственно. Показано, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\omega\sigma$ -полным классом Фиттинга для некоторого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ . Получен ряд свойств $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга. В частности, дано определение внутреннего $\omega\sigma$ -спутника и показано, что каждый $\omega\sigma$ -веерный класс Фиттинга всегда обладает внутренним $\omega\sigma$ -спутником. При $\omega = \mathbb{P}$ введено понятие σ -веерного класса Фиттинга. Показана связь между $\omega\sigma$ -веерными и σ -веерными классами Фиттинга.

Ключевые слова: конечная группа, класс Фиттинга, $\omega\sigma$ -веерный, $\omega\sigma$ -спутник, $\omega\sigma$ -направление.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

О. В. Камозина. $\omega\sigma$ -веерные классы Фиттинга // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 107–116.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 512.542

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-107-116

 $\omega\sigma$ -fibered Fitting classes

O. V. Kamozina

Olesya Vladimirovna Kamozina — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Bryansk state University of engineering and technology (Bryansk).

e-mail: ovkamozina@yandex.ru

Abstract

The paper considers only finite groups. A class of groups $\mathfrak{F}$ is called a Fitting class if it is closed under normal subgroups and products of normal $\mathfrak{F}$ -subgroups; formation, if it is closed with respect to factor groups and subdirect products; Fitting formation if $\mathfrak{F}$ is a formation and Fitting class at the same time.

For a nonempty subset ω of the set of primes $\mathbb{P}$ and the partition $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, where $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$, we introduce the $\omega\sigma R$ -function f and $\omega\sigma FR$ -function φ . The domain of these functions is the set $\omega\sigma \cup \{\omega'\}$, where $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \emptyset\}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. The range of function values is the set of Fitting classes and the set of nonempty Fitting formations, respectively. The functions f and φ are used to determine the $\omega\sigma$ -fibered Fitting class $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ and } G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) \text{ for all } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$ with the $\omega\sigma$ -satellite f and the $\omega\sigma$ -direction φ .

The paper gives examples of $\omega\sigma$ -fibered Fitting classes. Two types of $\omega\sigma$ -fibered Fitting classes are distinguished: $\omega\sigma$ -complete and $\omega\sigma$ -local Fitting classes. Their directions are indicated by φ_0 and φ_1 , respectively. It is shown that each nonempty nonidentity Fitting class is an $\omega\sigma$ -complete Fitting class for some nonempty set $\omega \subseteq \mathbb{P}$ and any partition σ . A number of properties of $\omega\sigma$ -fibered Fitting classes are obtained. In particular, a definition of an internal $\omega\sigma$ -satellite is given and it is shown that each $\omega\sigma$ -fibered Fitting class always has an internal $\omega\sigma$ -satellite. For $\omega = \mathbb{P}$, the concept of a σ -fibered Fitting class is introduced. The connection between $\omega\sigma$ -fibered and σ -fibered Fitting classes is shown.

Keywords: finite group, Fitting class, $\omega\sigma$ -fibered, $\omega\sigma$ -satellite, $\omega\sigma$ -direction.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

O. V. Kamozina, 2020, “ $\omega\sigma$ -fibered Fitting classes”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 107–116.

1. Введение

В исследованиях формаций и классов Фиттинга часто применяется функциональный подход. С помощью специальной функции $f : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$ в 1963 году в работе Гашюца [1] были построены локальные формации, в 1969 году в работе Хартли [2] с помощью функции $g : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ были построены локальные классы Фиттинга. В нашей стране данное направление получило развитие в работах Л.А. Шеметкова [3] при изучении формаций и Н.Т. Воробьева [4] при изучении классов Фиттинга. Была проведена классификация функций, установлена связь между свойствами формаций (классов Фиттинга) и их функциями. Используя функциональный подход, А.Н. Скиба в работе [5] разработал

методы исследования решеток, произведений, критических локальных формаций. В 1999 году Л.А. Шеметков и А.Н. Скиба в работе [6] вместо множества $\mathbb{P}$ области определения функций рассмотрели непустое подмножество ω множества $\mathbb{P}$ и одноэлементное подмножество $\{\omega'\}$, где $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$. В результате были построены ω -локальные формации и классы Фиттинга, а также изучены их различные свойства. В 2001 году В.А. Ведерниковым и М.М. Сорокиной был предложен новый подход в изучении формаций и классов Фиттинга [7]. Кроме основной функции (спутника) введена ещё одна функция (направление) $\varphi : \mathbb{P} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$; определены ω -веерные формации и классы Фиттинга, где локальный случай является одной из частей «веера». В результате удалось провести классификацию уже имеющихся, а также получить новые виды формаций и классов Фиттинга. Кроме указанных авторов, изучением различных видов ω -веерных формаций и классов Фиттинга занимались К. Дьорк, Т. Хоукс, В.Г. Сафонов, Го Веньбинь, Н.Н. Воробьев и др. (см. например, [8-14]). В настоящее время появилась новая идея в функциональном подходе. На множестве области определения $\mathbb{P}$ функций вводится разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$. В работе А.Н. Скибы начато изучение σ -локальных формаций, а также рассмотрены их приложения [15].

Цель данной работы — используя непустое подмножество ω простых чисел и разбиение σ , ввести $\omega\sigma$ -веерные классы Фиттинга; на основе хорошо известных классов групп, показать существование $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга; выделить виды, исследовать свойства $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга.

2. Основная часть

Рассматриваются только конечные группы. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется классом Фиттинга, если он замкнут относительно нормальных подгрупп и произведений нормальных $\mathfrak{F}$ -подгрупп. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией Фиттинга, если $\mathfrak{F}$ является формацией и классом Фиттинга одновременно. Группа G называется комонолитической, если в G имеется такая нормальная подгруппа M (комонолит группы G), что G/M — простая группа и $N \subseteq M$ для любой собственной нормальной подгруппы N группы G . ([6])

Символ $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$, $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$, $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G . Кроме того, $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$, где $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$; $\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$, $\omega\sigma = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \neq \emptyset\}$, $\omega\sigma(G) = \{\omega \cap \sigma_i \mid \omega \cap \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}$, $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \{\omega\sigma(G) \mid G \in \mathfrak{F}\}$ для любого класса групп $\mathfrak{F}$. $\mathfrak{G}$ обозначает класс всех конечных групп, $\mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_{\omega'}$ — класс всех ω - и ω' -групп соответственно. ω -группа — группа G , где $\pi(G) \subseteq \omega$.

Функцию $f : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$, где $f(\omega') \neq \emptyset$, назовем $\omega\sigma R$ -функцией; функцию $\varphi : \omega\sigma \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ назовем $\omega\sigma FR$ -функцией; функцию $g : \sigma \rightarrow \{\text{классы Фиттинга групп}\}$ назовем σR -функцией; функцию $\psi : \sigma \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$ назовем σFR -функцией. Определим $\omega\sigma FR$ -функцию φ_0 следующим образом: $\varphi_0(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_0(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Определим σFR -функцию ψ_0 следующим образом: $\psi_0(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Пусть μ_1 и μ_2 — произвольные $\omega\sigma R$ -функции ($\omega\sigma FR$ -функции). Будем полагать, что $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(\omega') \subseteq \mu_2(\omega')$ и $\mu_1(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mu_2(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Пусть ν_1 и ν_2 — произвольные σR -функции (σFR -функции). Будем полагать, что $\nu_1 \leq \nu_2$, если $\nu_1(\sigma_i) \subseteq \nu_2(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — $\omega\sigma R$ -функция, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, где $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi) = \{G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i) \text{ для всех } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)\}$.

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. **а)** Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $N \triangleleft G$. Так как $NO^\omega(G)/O^\omega(G) \triangleleft G/O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_\omega$ — класс Фиттинга, то $NO^\omega(G)/O^\omega(G) \cong N/N \cap O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда $O^\omega(N) \subseteq N \cap O^\omega(G)$, а значит, $O^\omega(N) \subseteq O^\omega(G)$. Так как по условию $O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(N) \in f(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(N)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$ и по условию $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Так как $NG^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}/G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \triangleleft G/G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ и $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, то $NG^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}/G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \cong N/N \cap G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ и $N^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \subseteq N \cap G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}$. Учитывая, что $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, как и выше, получаем, что $N^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Таким образом, $N \in \mathfrak{F}$.

б) Пусть $G = HK$, где $H \triangleleft G$, $K \triangleleft G$, $H \in \mathfrak{F}$, $K \in \mathfrak{F}$. Тогда по условию $O^\omega(H) \in f(\omega')$ и $O^\omega(K) \in f(\omega')$. Так как $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $T = O^\omega(H)O^\omega(K) \in f(\omega')$. Поскольку $G = HK$, то $G/T = HT/T \cdot KT/T$. Так как $O^\omega(H) \triangleleft H$, то по модулярному тождеству Дедекинда $H \cap T = H \cap O^\omega(H)O^\omega(K) = O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))$. Тогда $HT/T \cong H/H \cap T = H/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))$. Так как $H/O^\omega(H) \in \mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{G}_\omega$ — формация, то

$$H/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K)) \cong H/O^\omega(H)/O^\omega(H)(H \cap O^\omega(K))/O^\omega(H) \in \mathfrak{G}_\omega.$$

Следовательно, $HT/T \in \mathfrak{G}_\omega$. Аналогично, $KT/T \in \mathfrak{G}_\omega$. Так как $\mathfrak{G}_\omega$ — класс Фиттинга, то $G/T = HT/T \cdot KT/T \in \mathfrak{G}_\omega$, а значит, $O^\omega(G) \subseteq T$. Так как $T \in f(\omega')$ и $f(\omega')$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in f(\omega')$.

Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ или $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(K)$. Из условия получаем, что $H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ или $K^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ и $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(K)$, то, учитывая, что $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга и $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — формация Фиттинга, как и выше, получаем, что $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$.

Пусть, для определенности, $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$ и $\omega \cap \sigma_i \notin \omega\sigma(K)$. Тогда K — $(\omega \cap \sigma_i)'$ -группа. Так как по условию $\varphi_0 \leq \varphi$, то $K \in \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'} = \varphi_0(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Поскольку $G = HK$, то

$$G/H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = H/H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \cdot KH^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}/H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \cong H/H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \cdot K/K \cap H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}.$$

Так как $\varphi(\omega \cap \sigma_i)$ — формация Фиттинга, то $K/K \cap H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ и $G/H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Тогда $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \subseteq H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)}$. Так как $H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ и $f(\omega \cap \sigma_i)$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$.

Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга.

Теорема доказана. $\square$

Если $\omega = \mathbb{P}$, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть g — σR -функция, ψ — σFR -функция, где $\psi_0 \leq \psi$, и $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi) = (G : G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$.

Тогда $\mathfrak{F}$ является классом Фиттинга.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, назовем $\omega\sigma$ -всерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma$ -направлением φ . Класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$, где g — σR -функция, ψ — σFR -функция, назовем σ -всерным классом Фиттинга с σ -спутником g и σ -направлением ψ .

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и $\omega\sigma(\mathfrak{F}) = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \emptyset$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в заключении леммы.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $\omega\sigma(G) = \emptyset$, а значит, G — ω' -группа. Тогда $O^\omega(G) = G \in \mathfrak{F} = f(\omega')$ и из $\omega\sigma(G) = \emptyset$ следует, что $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонотическая с комонотом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Следовательно, $O^\omega(G) \subseteq G_{\mathfrak{F}} = M$ и $G/M \cong G/O^\omega(G)/M/O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\omega$. Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$. Тогда $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = \emptyset$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из а) и б) следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Лемма доказана. $\square$

ПРИМЕРЫ. 1) Из леммы 1 следует, что $\mathfrak{G}_\omega$ и (1) являются $\omega\sigma$ -векторными классами Фиттинга для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ .

2) $\mathfrak{G} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 2) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}$. Так как $O^\omega(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{G}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{G} = f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \mathfrak{G} = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Так как рассматриваются только конечные группы, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}$.

Из а) и б) следует, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_1$.

3) $\mathfrak{G}_\omega = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = (1)$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_\omega$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 3) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G}_\omega \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда $O^\omega(G) = 1 \in (1) = f(\omega')$. Так как $\mathfrak{G}_\omega$ — класс Фиттинга, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \mathfrak{G}_\omega = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_\omega \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\omega$. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^\omega(G) \in f(\omega') = (1)$, а значит, $G \in \mathfrak{G}_\omega$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\omega$.

Из а) и б) следует, что $\mathfrak{G}_\omega = \mathfrak{F}_1$.

4) Пусть π — непустое подмножество множества простых чисел $\mathbb{P}$. Определим на множестве $\mathbb{P}$ разбиение σ следующим образом: если $\omega \cap \sigma_i \cap \pi \neq \emptyset$, то $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$; если $\omega \cap \sigma_i \cap \pi = \emptyset$, то $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$. Тогда $\mathfrak{G}_\pi = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}_\pi$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_\pi$ для всех $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$, $f(\omega \cap \sigma_i) = \emptyset$ для всех $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$.

Действительно, пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f и φ — функции, описанные в примере 4) выше.

а) Покажем, что $\mathfrak{G}_\pi \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $G \in \mathfrak{G}_\pi$. Так как $\mathfrak{G}_\pi$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{G}_\pi = f(\omega')$. Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{G}_\pi$, то $\pi(G) \subseteq \pi$, а значит, $\omega \cap \sigma_i \cap \pi \neq \emptyset$ и $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$. Тогда $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in \mathfrak{G}_\pi = f(\omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{G}_\pi \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\pi$. Допустим противное и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{G}_\pi$. Тогда G — комонотическая с комонотом $M = G_{\mathfrak{G}_\pi}$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^\omega(G) \subseteq M$ и $G/M \in \mathfrak{G}_\omega$. Если для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$ выполняется неравенство $\omega \cap \sigma_i \cap \pi \neq \emptyset$, а значит, $\omega \cap \sigma_i \subseteq \pi$, то $\pi(G/M) \subseteq \pi$ и $G \in \mathfrak{G}_\pi$. Противоречие. Пусть существует $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G/M)$ и выполняется равенство $\omega \cap \sigma_i \cap \pi = \emptyset$, а значит, $\omega \cap \sigma_i \not\subseteq \pi$. Так как $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$ и $G \in \mathfrak{F}_1$, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = \emptyset$. Противоречие. Таким образом, $G \in \mathfrak{G}_\pi$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{G}_\pi$.

Из а) и б) следует, что $\mathfrak{G}_\pi = \mathfrak{F}_1$.

5) Из примера 4) следует, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, $f(\omega \cap \sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $j = i$, $f(\omega \cap \sigma_j) = \emptyset$ для всех $j \neq i$, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, $\varphi_0 \leq \varphi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\varphi = \varphi_0$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma AR(f) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(G) \in f(\omega \cap \sigma_i) \text{ для всех } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$, который назовем $\omega\sigma$ -полным классом Фиттинга или, коротко, $\omega\sigma A$ -классом Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f . Пусть $\psi = \psi_0$. Из определения 1 и следствия 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma AR(g) = (G : O^{\sigma_i}(G) \in g(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$, который назовем σ -полным классом Фиттинга или, коротко, σA -классом Фиттинга с σ -спутником g .

ЛЕММА 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой неединичный класс Фиттинга и $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является $\omega\sigma$ -полным классом Фиттинга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma AR(f)$, где f — $\omega\sigma R$ -функция такая, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = fit(O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Пусть $H \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\omega(H) \triangleleft H$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(H) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Так как $H \in \mathfrak{F}$, то $O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(H) \in fit(O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(G) \mid G \in \mathfrak{F}) = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Следовательно, $H \in \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

б) Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонотическая с комонотом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то, как и в лемме 1, $O^\omega(T) \subseteq M$ и $T/M \in \mathfrak{G}_\omega$. Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T)$. Так как $T \in \mathfrak{F}_1$, то по определению класса $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma AR(f, \varphi)$ и $\omega\sigma$ -спутника f , получаем, что $O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(T) \in f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Тогда $O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(T)/M/O^{(\omega \cap \sigma_i)'}(T) \in \mathfrak{E}_{(\omega \cap \sigma_i)'}$. Противоречие. Таким образом, $T \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

Лемма доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 2 следует, что каждый непустой неединичный класс Фиттинга является $\omega\sigma$ -полным классом Фиттинга для некоторого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ .

ЛЕММА 3. Пусть f — $\omega\sigma R$ -функция, φ — $\omega\sigma FR$ -функция, где $\varphi_0 \leq \varphi$, и $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(g, \varphi)$, где $g(\omega') = f(\omega') \cap \mathfrak{F}$ и $g(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.
- 2) $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(h, \varphi)$, где $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.
- 3) если $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F} = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) \text{ для всех } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega\sigma R(g, \varphi)$, где g — $\omega\sigma R$ -функция, описанная в пункте 1) леммы.

Так как $g \leq f$, то, учитывая теорему 1, получаем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Тогда $O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Так как $O^\omega(G) \triangleleft G$, $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in f(\omega') \cap \mathfrak{F} = g(\omega')$, $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) \cap \mathfrak{F} = g(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Следовательно, $G \in \omega\sigma R(g, \varphi) = \mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$.

Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$.

2) Пусть $\mathfrak{F}_2 = \omega\sigma R(h, \varphi)$, где h — $\omega\sigma R$ -функция, описанная в пункте 2) леммы. Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

Пусть $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Так как $O^\omega(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = h(\omega')$. Кроме того, $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = h(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$. Тогда $G \in \omega\sigma R(h, \varphi) = \mathfrak{F}_2$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_2$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_2$ и пусть H — группа минимального порядка из $\mathfrak{F}_2 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда H — комонотическая с комонотом $M = H_{\mathfrak{F}}$. Из $H \in \mathfrak{F}_2$, как и в лемме 1, получаем, что $O^\omega(H) \subseteq M$ и $H/M \in \mathfrak{G}_\omega$. Так как $H/M \cong H/O^\omega(M)/M/O^\omega(M)$ и $M/O^\omega(M) \in \mathfrak{G}_\omega$, то $H/O^\omega(M) \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда $O^\omega(H) \subseteq O^\omega(M)$. Так как $M \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $O^\omega(M) \in f(\omega')$, а значит, $O^\omega(H) \in f(\omega')$. Кроме того, $H^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in h(\omega \cap \sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(H)$. Следовательно, $H \in \omega\sigma R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$.

3) Пусть $\mathfrak{F}_3 = (G : O^\omega(G) \in f(\omega'))$ и $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$ и $G \in \mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Если $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$. Пусть $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma \setminus \omega\sigma(G) = \omega\sigma(\mathfrak{F}) \setminus \omega\sigma(G)$. Тогда существует такая группа $T \in \mathfrak{F}$, что $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T)$ и $T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$, а значит, $f(\omega \cap \sigma_i) \neq \emptyset$. Так как $\omega \cap \sigma_i \notin \omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'} = \varphi_0(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Тогда $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = 1 \in f(\omega \cap \sigma_i)$.

Таким образом, $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i)$ для $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_3$.

Включение $\mathfrak{F}_3 \subseteq \mathfrak{F}$ очевидно. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_3$.

Лемма доказана. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $\omega\sigma$ -спутник f класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$ назовем внутренним, если $f(\omega') \subseteq \mathfrak{F}$ и $f(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3 показывает, что каждый $\omega\sigma$ -векторный класс Фиттинга всегда обладает внутренним $\omega\sigma$ -спутником.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$ -векторный класс Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma$ -направлением φ , где $\varphi_0 \leq \varphi$, $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{F}$ является σ -векторным классом Фиттинга с σ -спутником g и σ -направлением ψ для любого разбиения σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \omega\sigma R(f, \varphi)$. Рассмотрим σR -функцию g такую, что $g(\sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta = \{\sigma_j \mid \omega \cap \sigma_j \in \omega\sigma\}$, $g(\sigma_i) = \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup \sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$; σFR -функцию ψ такую, что $\psi(\sigma_i) = \varphi(\omega \cap \sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \Delta$, $\psi(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\omega$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup \sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$. Пусть $\mathfrak{H} = \sigma R(g, \psi)$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$ и $\sigma_i \in \sigma(G)$. Если $\sigma_i \in \Delta$ и $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G)$, то $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$. Если $\sigma_i \in \Delta$ и $\omega \cap \sigma_i \notin \omega\sigma(G)$, то $G \in \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'} = \varphi_0(\omega \cap \sigma_i) \subseteq \varphi(\omega \cap \sigma_i)$. Так как $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то, как и в лемме 3, $f(\omega \cap \sigma_i) \neq \emptyset$ и $G^{\psi(\sigma_i)} = G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = 1 \in f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$. Далее, можем считать, в силу леммы 3, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. Если $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup \sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$, то $G^{\psi(\sigma_i)} = O^\omega(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F} = g(\sigma_i)$. Тогда $G \in \sigma R(g, \varphi) = \mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

б) Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $T \in \mathfrak{H}$ и $\sigma_i \in \sigma(T)$. Установим, что $O^\omega(T) = T^{\psi(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \mathbb{P} \setminus (\cup \sigma_j \mid \sigma_j \in \Delta)$. Действительно, из $T/T^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\omega$ следует, что $O^\omega(T) \subseteq T^{\psi(\sigma_i)}$. Обратно, так как $T/O^\omega(T) \in \mathfrak{G}_\omega = \psi(\sigma_i)$, то $T^{\psi(\sigma_i)} \subseteq O^\omega(T)$. Тогда $O^\omega(T) = T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = \mathfrak{F} = f(\omega')$. Для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T) \subseteq \omega\sigma$ получаем, что $\sigma_i \in \Delta$. Тогда $T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \omega\sigma R(f, \varphi) = \mathfrak{F}$.

Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Определим $\omega\sigma FR$ -функцию φ_1 следующим образом: $\varphi_1(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi_1(\omega \cap \sigma_i) = \mathfrak{G}_{\omega \cap \sigma_i} \mathfrak{G}_{(\omega \cap \sigma_i)'}$ для любого $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Тогда из определения 1 и теоремы 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \omega\sigma LR(f) = (G : O^\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } O^{\omega \cap \sigma_i, (\omega \cap \sigma_i)'}(G) \in f(\omega \cap \sigma_i) \text{ для всех } \omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G))$, который назовем $\omega\sigma$ -локальным классом Фиттинга или, коротко, $\omega\sigma L$ -классом Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f . Определим σFR -функцию ψ_1 следующим образом: $\psi_1(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ для любого $\sigma_i \in \sigma$. Из определения 1 и следствия 1 получаем класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \sigma LR(f) = (G : O^{\sigma_i, \sigma_i'}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G))$, который назовем σ -локальным классом Фиттинга или, коротко, σL -классом Фиттинга с σ -спутником g .

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$ -полный класс Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — σ -полный класс Фиттинга с σ -спутником g для любого разбиения σ .

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$ -локальный класс Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma = \omega\sigma(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ — σ -локальный класс Фиттинга с σ -спутником g для любого разбиения σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. σ -направление ψ σ -веерного класса Фиттинга назовем *главным*, если $\psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i} = \psi(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma$.

ЛЕММА 5. Пусть $\mathfrak{F}$ — σ -веерный класс Фиттинга с σ -спутником g и главным σ -направлением ψ . Тогда $\mathfrak{F}$ является $\omega\sigma$ -веерным классом Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f и $\omega\sigma$ -направлением φ для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$. Рассмотрим $\omega\sigma R$ -функцию f такую, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$; $\omega\sigma FR$ -функцию φ такую, что $\varphi(\omega') = \mathfrak{G}_\omega$, $\varphi(\omega \cap \sigma_i) = \psi(\sigma_i)$ для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma$. Пусть $\mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$.

а) Покажем, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{F}$. Так как $O^\omega(G) \triangleleft G$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то $O^\omega(G) \in \mathfrak{F} = f(\omega')$. Для всех $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(G) \subseteq \omega\sigma$ получаем $\sigma_i \in \sigma(G)$. Так как $G \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$, то $G^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} = G^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i) = f(\omega \cap \sigma_i)$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

б) Покажем, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Допустим противное и пусть T — группа минимального порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда T — комонолитическая с комонолитом $M = T_{\mathfrak{F}}$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $O^\omega(T) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, а значит, $O^\omega(T) \subseteq M$ и $T/M \cong T/O^\omega(T)/M/O^\omega(T) \in \mathfrak{G}_\omega$. Тогда для всех $\sigma_i \in \sigma(T/M)$ получаем $\omega \cap \sigma_i \in \omega\sigma(T/M) \subseteq \omega\sigma(T) \subseteq \omega\sigma$. Так как $T \in \mathfrak{H} = \omega\sigma R(f, \varphi)$, то $T^{\psi(\sigma_i)} = T^{\varphi(\omega \cap \sigma_i)} \in f(\omega \cap \sigma_i) = g(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(T) \setminus \sigma(T/M)$. Тогда $T/M \in \mathfrak{G}_{\sigma'_i}$. Так как $T/M \cong T/M^{\psi(\sigma_i)}/M/M^{\psi(\sigma_i)}$, то $T/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i}$. По условию ψ — главное σ -направление, а значит, $\psi(\sigma_i) \cdot \mathfrak{G}_{\sigma'_i} = \psi(\sigma_i)$. Тогда $T/M^{\psi(\sigma_i)} \in \psi(\sigma_i)$ и $T^{\psi(\sigma_i)} \subseteq M^{\psi(\sigma_i)}$. Из $M \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$ получаем, что $M^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$, а значит, $T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$. Таким образом, $T^{\psi(\sigma_i)} \in g(\sigma_i)$ для всех $\sigma_i \in \sigma(T)$. Тогда по определению $T \in \mathfrak{F} = \sigma R(g, \psi)$. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Из **а)** и **б)** следует, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Лемма доказана. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В леммах 4 и 5 показана связь между $\omega\sigma$ -веерными и σ -веерными классами Фиттинга.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $\mathfrak{F}$ — σ -полный класс Фиттинга с σ -спутником g , то $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$ -полный класс Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ .

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $\mathfrak{F}$ — σ -локальный класс Фиттинга с σ -спутником g , то $\mathfrak{F}$ — $\omega\sigma$ -локальный класс Фиттинга с $\omega\sigma$ -спутником f для любого непустого множества $\omega \subseteq \mathbb{P}$ и любого разбиения σ .

3. Заключение

В случае, когда $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \dots\}$ [15], $\omega\sigma$ -веерные классы Фиттинга становятся ω -веерными классами Фиттинга в определениях работ [7, 10].

При дальнейшем исследовании введенных в данной статье классов Фиттинга представляет интерес решение следующих вопросов.

ВОПРОС 1. Какое строение имеют минимальный и максимальный спутники $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга?

ВОПРОС 2. Верно ли, что произведение любых двух $\omega\sigma$ -веерных классов Фиттинга является $\omega\sigma$ -веерным классом Фиттинга?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gaschutz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. 1963. Vol. 80, № 4. P. 300-305.

2. Hartley B. On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. 1969. Vol. 3, № 2. P. 193-207.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука. 1978. 272 с.
4. Воробьев Н. Т. О локальных радикальных классах // Вопросы алгебры. 1986. Вып 1. С. 22-34.
5. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука. 1997. 240 с.
6. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114-147.
7. Ведерников В. А., Сорокина М. М. ω -векрные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 43-60.
8. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука. 1989. 256 с.
9. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin-New York: Walter de Gruyter. 1992. 892 p.
10. Vedernikov V. A. On new types of ω -fibered Fitting classes of finite groups // Ukrainian Mathematical Journal. 2002. Vol. 54, № 7. P. 897-906.
11. Корпачева М. А., Сорокина М. М. О критических ω -векрных формациях конечных групп // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 87-94.
12. Сафонов В. Г. Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 6. С. 727-736.
13. Воробьев Н. Н. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ имени П. М. Машерова. 2012. 322 с.
14. Guo Wenbin. Structure theory for canonical classes of finite groups. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2015. 360 p.
15. Skiba A. N. On one generalization of the local formations // ПФМТ. 2018. № 1 (34). P. 79-82.

REFERENCES

1. Gaschutz, W. 1963, "Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen", *Math. Z.*, vol. 80, no. 4, pp. 300-305.
2. Hartley, B. 1969, "On Fischer's dualization of formation theory", *Proc. London Math. Soc.*, 1969, vol. 3, no 2, pp. 193-207.
3. Shemetkov, L. A. 1978, *Formatsii konechnykh grupp (Finite group formations)*, Nauka Publ., Moskva, 272 p. (in Russ.).
4. Vorob'ev, N. T. 1986, "O lokal'nykh radikal'nykh klassah (About local radical classes)", *Voprosy algebry*, no. 1, pp. 22-34. (in Russ.).
5. Skiba, A. N. 1997, *Algebra formatsiy (Algebra of formations)*, Belaruskaya navuka Publ., Minsk, 240 p. (in Russ.).
6. Skiba, A. N. & Shemetkov, L. A. 2000, "Multiply ω -local formations and Fitting classes of finite groups", *Siberian Adv. Math.*, vol. 10, no. 2, pp. 112-141.

7. Vedernikov, V. A. & Sorokina, M. M. 2002, “ ω -fibered formations and Fitting classes of finite groups“, *Mathematical Notes*, vol. 71, no. 1, pp. 39–55.
8. Shemetkov, L. A. & Skiba, A. N. 1989, *Formatsii algebraicheskikh sistem (Formations of algebraic systems)*, Nauka Publ., Moskva, 256 p. (in Russ.).
9. Doerk, K. & Hawkes, T. 1992, *Finite soluble groups* Walter de Gruyter Publ., Berlin – New York, 892 p.
10. Vedernikov, V. A. 2002, “On new types of ω -fibered Fitting classes of finite groups“, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 54, no. 7, pp. 897–906.
11. Korpacheva, M. A. & Sorokina, M. M. 2006, “On critical ω -fibered formations of finite groups“, *Mathematical Notes*, vol. 79, no. 1, pp. 79–85.
12. Safonov, V. G. 2003, “On a question of the theory of totally local formations of finite groups“, *Algebra and Logic*, vol. 42, no. 6, pp. 407–412.
13. Vorob’ev, N. N. 2012, *Algebra klassov konechnykh grupp (Algebra of classes of finite groups)*, VGU imeni P. M. Masherova Publ., Vitebsk, 322 p. (in Russ.).
14. Guo, Wenbin. 2015, *Structure theory for canonical classes of finite groups*, Springer-Verlag Publ., Berlin Heidelberg, 360 p.
15. Skiba, A. N. 2018, “On one generalization of the local formations“, *Problems of Physics, Mathematics and Technics*, no. 1 (34), pp. 79–82.

Получено 12.10.2019 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.