

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106

Весовые неравенства для преобразований Данкля — Рисса
и градиента Данкля¹

В. И. Иванов

Валерий Иванович Иванов — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом Данкля степенного типа на $\mathbb{R}^d$ за последние 30 лет построен содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют преобразования Данкля–Рисса и потенциал Данкля–Рисса, определенные Тангавелу и Шу. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля. Частные результаты здесь были получены Амри и Сифи, Абделькефи и Рачди, Велику. Опираясь на весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса, мы доказываем общие (L^q, L^p) -неравенства Соболева для градиента Данкля с радиальными степенными весами. Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса были установлены ранее. L^p -неравенства для преобразований Данкля–Рисса с радиальным степенным весом устанавливаются в настоящей работе. Безвесовой вариант этих неравенств был доказан Амри и Сифи.

Ключевые слова: потенциал Данкля — Рисса, преобразования Данкля — Рисса, градиент Данкля, неравенство Соболева.

Библиография: 10 названий.

Для цитирования:

В. И. Иванов. Весовые неравенства для преобразований Данкля — Рисса и градиента Данкля // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 97–106.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-97-106

Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient²

V. I. Ivanov

Valery Ivanovich Ivanov — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of applied mathematics and Informatics of Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

Over the past 30 years a meaningful harmonic analysis has been constructed in the spaces with Dunkl weights of power type on $\mathbb{R}^d$. The classical Fourier analysis on Euclidean space corresponds to the weightless case. The Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms defined by Thangavelu and Xu play an important role in the Dunkl harmonic analysis. In particular, they allow one to prove the Sobolev inequalities for the Dunkl gradient. Particular results were obtained here by Amri and Sifi, Abdelkefi and Rachdi, Veliku. Based on the weighted inequalities for the Dunkl–Riesz potential and the Dunkl–Riesz transforms, we prove the general (L^q, L^p) Sobolev inequalities for the Dunkl gradient with radial power weights. The weighted inequalities for the Dunkl–Riesz potential were established earlier. The L^p -inequalities for the Dunkl–Riesz transforms with radial power weights are established in this paper. A weightless version of these inequalities was proved by Amri and Sifi.

Keywords: Dunkl–Riesz potential, Dunkl–Riesz transforms, Dunkl gradient, Sobolev inequality.

Bibliography: 10 titles.

For citation:

V. I. Ivanov. 2020, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz transforms and Dunkl gradient", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 97–106.

1. Введение

В пространствах с весом Данкля степенного типа на $\mathbb{R}^d$ за последние 30 лет построен содержательный гармонический анализ (см.[1]). Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует безвесовому случаю. В гармоническом анализе Данкля важную роль играют преобразования Данкля–Рисса и потенциал Данкля–Рисса, определенные Тангавелу и Шу [2]. В частности, они позволяют доказывать неравенства Соболева для градиента Данкля (см.[3, 4]). Настоящая работа посвящена доказательству (L^q, L^p) -неравенств Соболева для градиента Данкля с радиальным степенным весом.

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$, нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и стандартным ортонормированным базисом $\{e_1, \dots, e_d\}$. Мы будем писать $A \lesssim B$, если выполнено неравенство $A \leq cB$ с константой $c > 0$, зависящей только от несущественных параметров.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Пусть $R \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ — система корней, $R_+ \subset R$ — положительная подсистема, $G \subset O(d)$ — конечная группа отражений, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha: \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $\langle \alpha, x \rangle = 0$, $k: R \rightarrow \mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно G , $v_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha, x \rangle|^{k(\alpha)}$ — вес Данкля, $d\mu_k(x) = c_k v_k(x) dx$ — мера Данкля, где $c_k^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/2} v_k(x) dx$ — нормировочная константа Макдональда–Мета–Сельберга, $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X, d\mu)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$\langle k \rangle = \sum_{\alpha \in R_+} k(\alpha)$, $\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k \rangle$, $d_k = 2\lambda_k + 2$ — обобщенная размерность евклидова пространства с весом Данкля. Мы далее будем предполагать, что $d_k > 1$.

Пусть V_k — оператор сплетения Данкля, $e_k(x, y) = V_k(e^{i\langle \cdot, y \rangle})(x)$ — ядро Данкля,

$$\mathcal{F}_k(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{e_k(x, y)} d\mu_k(x)$$

— преобразование Данкля,

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a) \langle a, e_j \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x \rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

— дифференциально-разностные операторы Данкля, $\nabla_k = (T_1, \dots, T_d)$ — градиент Данкля, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих на бесконечности функций,

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e_k(x, z) e_k(y, z) \mathcal{F}_k(f)(z) d\mu_k(z)$$

— оператор сдвига на функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [1].

На пространстве Шварца потенциал Данкля–Рисса $I_\alpha^k f$ [2] определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha-d_k} d\mu_k(y),$$

где $0 < \alpha < d_k$ и $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha-d_k/2} \Gamma(\alpha/2) / \Gamma((d_k - \alpha)/2)$.

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [2]

$$\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f)(y) = |y|^{-\alpha} \mathcal{F}_k(f)(y).$$

На пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ преобразование Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k f$, $j = 1, \dots, d$ [2] определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_j^k \int_{|y| \geq \varepsilon} \tau^{-y} f(x) \frac{y_j}{|y|^{d_k+1}} d\mu_k(y),$$

где нормировочная постоянная c_j^k выбрана так, чтобы

$$\mathcal{F}(\mathcal{R}_j^k f)(y) = -i \frac{y_j}{|y|} \mathcal{F}(f)(y).$$

Для потенциала Данкля–Рисса доказаны (L^q, L^p) -неравенства с радиальными степенными весами [5]. Для преобразований Данкля–Рисса установлена L^p -ограниченность [3]. Пусть p' — сопряженный показатель для p , определяемый соотношением $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

ТЕОРЕМА А. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $\gamma + \beta \geq 0$, $0 < \alpha < d_k$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, то

$$\| |x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x) \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА В. Преобразование Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k$, $j = 1, \dots, d$, является ограниченным оператором из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$.

Нас интересует неравенство Соболева для градиента Данкля с радиальным степенным весом

$$\| f(x) |x|^{-\gamma} \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| \nabla_k f(x) |x|^\beta \|_{p, d\mu_k}, \quad 1 < q \leq p < \infty. \quad (2)$$

Рассматривая в (2) функции вида $f(\lambda x)$ и устремляя $\lambda \rightarrow 0$ и $\lambda \rightarrow \infty$, нетрудно убедиться, что условие $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$ является необходимым для выполнения (2).

Для доказательства неравенства (2) есть удобное равенство (см. [3]), в котором участвуют потенциал Данкля–Рисса I_1^k , преобразования Данкля–Рисса $\mathcal{R}_j^k$ и координаты градиента Данкля T_j :

$$f(x) = I_1^k \left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k (T_j f) \right) (x). \quad (3)$$

Неравенство (2) для $\gamma = \beta = 0$ установлено в [3] применением равенства (3), неравенства (1) для $\gamma = \beta = 0$, установленного в [6], и теоремы В. Для $\beta = 0$, $\gamma = 1 - d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$, $1 < p < d_k$ неравенство (2) установлено в [4].

Для того, чтобы получить общий вариант неравенства Соболева (2) необходим весовой вариант теоремы В.

Мы доказываем следующие результаты. Пусть $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < \infty$, $-\frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то для $j = 1, \dots, d$,

$$\| \mathcal{R}_j^k f(x) |x|^\beta \|_{p, d\mu_k} \lesssim \| f(x) |x|^\beta \|_{p, d\mu_k}. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$, то

$$\| f(x) |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} \|_{q, d\mu_k} \lesssim \| \nabla_k f(x) |x|^\beta \|_{p, d\mu_k}. \quad (5)$$

При $p = 2$ неравенство (5) другим методом доказано в [7, 8]. При $p = q = 2$ и $\beta = 0$, оно установлено в [7, 8] с точной константой.

В силу плотности $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ неравенство (4) верно для функций, для которых $f \in L^p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^{p\beta} d\mu_k)$, а неравенство (5) верно, если $\Delta_k f \in L^p(\mathbb{R}^d, |\cdot|^{p\beta} d\mu_k)$.

2. Доказательство теоремы 1

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ — единичная евклидова сфера, $x = rx' \in \mathbb{R}^d$, $r = |x| \in \mathbb{R}_+$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$d\nu(r) = r^{-1} dr, \quad d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1} dr, \quad b_\lambda^{-1} = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1), \quad \lambda \geq -1/2,$$

— меры на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x') dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$, и $dm_k(x) = d\nu(r) d\sigma_k(x')$ — мера на $\mathbb{R}^d$.

Отметим, что

$$d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r) d\sigma_k(x') = b_{\lambda_k} |x|^{d_k} dm_k(x).$$

Рассмотрим свертку Меллина

$$A_g f(r) = (f * g)(r) = \int_0^\infty f(r/t) g(t) d\nu(t).$$

$$(f * g)(r) = (g * f)(r).$$

ЛЕММА [5]. Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+, d\nu)$, $h \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, d\nu)$, $g \in L^1(\mathbb{R}_+, d\nu)$, то

$$\|f * g\|_p \leq \|g\|_1 \|f\|_p,$$

или

$$\left| \int_0^\infty \int_0^\infty h(r) f(t) g(r/t) d\nu(t) d\nu(r) \right| \leq \|g\|_1 \|h\|_{p'} \|f\|_p.$$

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^d$, η принадлежит выпуклой оболочке орбиты x ($\eta \in \text{Co}(\text{G.x})$),

$$A(x, y, \eta) = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\langle y, \eta \rangle} = \sqrt{|y - \eta|^2 + |x|^2 - |\eta|^2}.$$

В [3] для функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ получено представление преобразования $\mathcal{R}_j^k$ в виде

$$\mathcal{R}_j^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j(x, y) f(y) d\mu_k(y),$$

где ядро $\mathcal{K}_j(x, y)$ является конечной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами ядер

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y_j - \eta_j}{A^{d_k+1}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta), \\ \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) &= \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right) d\mu_x^k(\eta), \quad \alpha \in R_+. \end{aligned}$$

Здесь $d\mu_x^k$ — вероятностная мера с носителем в $\text{Co}(\text{G.x})$, участвующая в интегральном представлении оператора сплетения V_k .

Интегральные операторы с этими ядрами также являются ограниченными операторами из $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ в $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ для всех $1 < p < \infty$. Теорему 1 докажем для каждого из этих операторов. При этом будем следовать подходу, предложенному в работе Стейна [9]. Рассмотрим случай оператора с ядром $\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)$.

Пусть

$$L_j^{(1)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(1)}(x, y) f(y) d\mu_k(y).$$

По теореме В

$$\|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x)\|_{p, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

Нужно доказать, что

$$\|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x) - |x|^\beta L_j^{(1)} f(x)\|_{p, d\mu_k} \lesssim \| |x|^\beta f(x) \|_{p, d\mu_k}.$$

Так как $|y_j - \eta_j| \leq A(x, y, \eta)$, то

$$|L_j^{(1)}(|\cdot|^\beta f)(x) - |x|^\beta L_j^{(1)} f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{K}_j^{(1)}(x, y)| |y|^\beta - |x|^\beta |f(y)| d\mu_k(y)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right| |y|^\beta f(y) d\mu_k(y).$$

Остается доказать L^p -ограниченность оператора

$$Mf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right| f(y) d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{A^{d_k}(x, y, \eta)} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right| = \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right|.$$

Из результатов работы [5, Lemma 2.3] вытекают следующие свойства функции $\Psi(x, y)$:

1. $\Psi(x, y) = \Psi(y, x)$;
2. $\Psi(rx', ty') = r^{-d_k} \Psi(x', (t/r)y')$;
3. $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi(rx', ty') d\sigma_k(x') = \Psi_0(r, t)$, где

$$\Psi_0(r, t) := c \int_0^\pi (r^2 + t^2 - 2rt \cos \varphi)^{-d_k/2} \sin^{d_k-2} \varphi d\varphi, \quad c > 0.$$

Неравенство

$$\|Mf\|_{p, d\mu_k} = \left\| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y) f(y) d\mu_k(y) \right\|_{p, d\mu_k} \lesssim \|f(x)\|_{p, d\mu_k}$$

эквивалентным образом можно записать так

$$\|\widetilde{M}f\|_{p, dm_k} = \left\| |x|^{d_k/p} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x, y) |y|^{d_k/p'} f(y) dm_k(y) \right\|_{p, dm_k} \lesssim \|f(x)\|_{p, dm_k}.$$

Дальнейшие рассуждения будут следовать работе [5, Proof of Theorem 1.3].

Если $x = rx'$, $y = ty'$, то делая замену переменной $y \rightarrow (r/t)y'$ и применяя свойства (1), (2) функции $\Psi(x, y)$, получим

$$\begin{aligned} & |x|^{d_k/p} \int_{\mathbb{R}^d} \Psi(x, y) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right| |y|^{d_k/p'} f(y) dm_k(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f((r/t)y') t^{d_k/p} \Psi(tx', y') |1 - t^\beta| dm_k(ty') \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f((r/t)y') \Psi_1(t, x', y') dm_k(ty') = \int_{\mathbb{R}^d} f(ty') \Psi_1(r/t, x', y') dm_k(ty'). \end{aligned}$$

Для оценки нормы оператора $\widetilde{M}$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}^d, dm_k)$ положим

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} h(rx') f(ty') \Psi_1(r/t, x', y') dm_k(x) dm_k(y) \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \int_0^\infty h(rx') f(ty') \Phi_1(r/t, x', y') d\nu(t) d\nu(r) d\sigma_k(x') d\sigma_k(y'). \end{aligned}$$

Далее применяем лемму и неравенство Гельдера

$$\begin{aligned}
|J| &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'} d\nu(r) \right)^{1/p'} \left(\int_0^\infty |f(ty')|^p d\nu(t) \right)^{1/p} \\
&\quad \int_0^\infty \Psi_1(t, x', y') d\nu(t) d\sigma_k(x') d\sigma_k(y') \\
&= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left(\int_0^\infty |h(rx')|^{p'} d\nu(r) \int_0^\infty \Psi_1(t, x', y') d\nu(t) \right)^{1/p'} \\
&\quad \left(\int_0^\infty |f(ty')|^p d\nu(t) \int_0^\infty \Psi_1(t, x', y') d\nu(t) \right)^{1/p} d\sigma_k(x') d\sigma_k(y') \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty |h(rx')|^{p'} d\nu(r) \int_0^\infty \Psi_1(t, x', y') d\nu(t) d\sigma_k(x') d\sigma_k(y') \right)^{1/p'} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty |f(ty')|^p d\nu(t) \int_0^\infty \Psi_1(t, x', y') d\nu(t) d\sigma_k(x') d\sigma_k(y') \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание свойства (1) и (3) функции $\Psi(x, y)$, получим

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi_1(t, x', y') d\sigma_k(x') = t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi(tx', y') d\sigma_k(x') = t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1)$$

и

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Psi_1(t, x', y') d\sigma_k(y') = t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(1, t) = t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1).$$

Наконец, изменяя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
|J| &\leq \left(\int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t) \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty |h(rx')|^{p'} d\nu(r) d\sigma_k(x') \right)^{1/p'} \\
&\quad \left(\int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t) \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty |f(ty')|^p d\nu(t) d\sigma_k(y') \right)^{1/p} \\
&= \int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t) \|h\|_{p', dm_k} \|f\|_{p, dm_k}.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|M\|_{p, d\mu_k \rightarrow p, d\mu_k} \lesssim \|\widetilde{M}\|_{p, dm_k \rightarrow p, dm_k} \leq \int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t).$$

На самом деле

$$\|\widetilde{M}\|_{p, dm_k \rightarrow p, dm_k} = \int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t),$$

так как оператор $\widetilde{M}$ — положительный (см. [5]). Если записать точную связь между операторами M и $\widetilde{M}$, то мы получим точное значение нормы и для оператора M .

Остается проверить при $-\frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$ конечность интеграла

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty t^{d_k/p} |1 - t^\beta| \Psi_0(t, 1) d\nu(t) \\
&= c \int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}} |1 - t^\beta| \int_0^\pi \left(1 - \frac{2t}{1+t^2} \cos \varphi\right)^{-d_k/2} \sin^{d_k-2} \varphi d\varphi dt \\
&= c \int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}} |1 - t^\beta| \psi(t) dt.
\end{aligned}$$

Пусть

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{d_k/p-1}}{(1+t^2)^{d_k/2}} |1-t^\beta| \psi(t) dt = \int_0^\infty g(t) dt.$$

В интеграле I имеются три особенности при $t = 0$, $t = 1$ и $t = \infty$. Функция $\psi(t)$ имеет особенность только при $t = 1$. Как и в [5] показывается, что $\psi(t) \asymp |1-t|^{-1}$ при $t \rightarrow 1$, поэтому $g(t)$ при $t \rightarrow 1$ имеет интегрируемую особенность $|1-t^\beta||1-t|^{-1}$ для любого $\beta \in \mathbb{R}$. Если $\beta > 0$, то $g(t)$ имеет интегрируемые особенности $t^{d_k/p-1}$ при $t \rightarrow 0$ и $t^{\beta-d_k/p'-1}$ при $t \rightarrow \infty$. Если $\beta < 0$, то $g(t)$ имеет интегрируемые особенности $t^{d_k/p+\beta-1}$ при $t \rightarrow 0$ и $t^{-d_k/p'-1}$ при $t \rightarrow \infty$. Весовая L^p -ограниченность оператора $L_j^{(1)}$ доказана.

Рассмотрим оператор

$$L_j^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}_j^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y), \quad \alpha \in R_+.$$

Как и в предыдущем случае достаточно доказать L^p -ограниченность оператора

$$M^{(\alpha)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi^{(\alpha)}(x, y) f(y) d\mu_k(y)$$

с положительным ядром

$$\Phi^{(\alpha)}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \left(\frac{1}{A^{d_k-1}(x, y, \eta)} - \frac{1}{A^{d_k-1}(x, \sigma_\alpha y, \eta)} \right) \right| d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right|.$$

Пусть $y_s = y - s\langle y, \alpha \rangle \alpha$, $s \in [0, 1]$. Без ограничения общности можно считать, что $|\alpha| = 2$, поэтому $y_0 = y$, $y_1 = \sigma_\alpha y$. Обозначим для краткости $A_s = A(x, y_s, \eta)$.

Пусть для $s \in [0, 1]$

$$q(s) = |x|^2 + |y_s|^2 - 2\langle y_s, \eta \rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2s^2\langle y, \alpha \rangle^2 + 2s\langle y, \alpha \rangle \langle \eta - y, \alpha \rangle - 2\langle y, \eta \rangle.$$

Если $\langle y, \alpha \rangle = 0$, то $A_s = A_0$. Если $\langle y, \alpha \rangle \neq 0$, то $g(t)$ — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, поэтому он достигает наибольшее значение на концах отрезка. Итак, всегда

$$A_s \leq A_0 + A_1, \quad s \in [0, 1]. \quad (6)$$

Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $m(d_k - 1) > 1$. Тогда

$$\begin{aligned} J &= \left| \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \left(\frac{1}{A_1^{d_k-1}} - \frac{1}{A_0^{d_k-1}} \right) \right| = \left| \frac{1}{\langle y, \alpha \rangle} \cdot \frac{A_1^{m(d_k-1)} - A_0^{m(d_k-1)}}{A_1^{d_k-1} A_0^{d_k-1} \sum_{i=1}^{m-1} A_1^{i(d_k-1)} A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}} \right| \\ &= \left| \frac{m(d_k-1) \int_0^1 A_s^{m(d_k-1)-1} \sum_{i=1}^d \frac{(y_s)_i - \eta_i}{A_s} \alpha_i ds}{A_1^{d_k-1} A_0^{d_k-1} \sum_{i=1}^{m-1} A_1^{i(d_k-1)} A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}} \right|. \end{aligned}$$

Если $A_0 \leq A_1$, то в силу (6)

$$\begin{aligned} J &\lesssim \frac{A_1^{m(d_k-1)-1}}{A_1^{d_k-1} A_0^{d_k-1} \sum_{i=1}^{m-1} A_1^{i(d_k-1)} A_0^{(m-1-i)(d_k-1)}} \\ &\leq \frac{A_1^{m(d_k-1)-1}}{A_1^{m(d_k-1)} A_0^{d_k-1}} = \frac{1}{A_1 A_0^{d_k-1}} \leq \frac{1}{A_0^{d_k}}, \end{aligned}$$

поэтому всегда

$$J \lesssim \left\{ \frac{1}{A_0^{d_k}} + \frac{1}{A_1^{d_k}} \right\}$$

и

$$\Phi^{(\alpha)}(x, y) \lesssim \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{A_0^{d_k}} + \frac{1}{A_1^{d_k}} \right\} d\mu_x^k(\eta) \left| 1 - \frac{|x|^\beta}{|y|^\beta} \right|.$$

Так как $|y_1| = |\sigma_\alpha y| = |y|$, то L^p -ограниченность оператора $M^{(\alpha)}$ вытекает из L^p -ограниченности оператора M . Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнены условия $1 < p \leq q < \infty$, $d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \leq 1$, $1 - \frac{d_k}{p} < \beta < \frac{d_k}{p'}$. Применяя равенство (3), теорему А и теорему 1, получим цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \left\| f(x) |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} \right\|_{q, d\mu_k} &= \left\| I_1^k \left(\sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f) \right)(x) |x|^{\beta + d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) - 1} \right\|_{q, d\mu_k} \\ &\lesssim \left\| \sum_{j=1}^d \mathcal{R}_j^k(T_j f)(x) |x|^\beta \right\|_{p, d\mu_k} \lesssim \left\{ \sum_{j=1}^d \left\| (T_j f)(x) |x|^\beta \right\|_{p, d\mu_k} \right\} \lesssim \left\| \nabla_k f(x) |x|^\beta \right\|_{p, d\mu_k}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

4. Заключение

Для потенциала Данкля–Рисса (L^q, L^p) -неравенства известны для двух радиальных кусочно-степенных весов [10]. Было бы интересно и для преобразований Данкля–Рисса доказать L^p -неравенство с одним радиальным кусочно-степенным весом и вывести из весовых неравенств для потенциала Данкля–Рисса и преобразований Данкля–Рисса (L^q, L^p) -неравенство для градиента Данкля–Рисса с двумя радиальными кусочно-степенными весами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
2. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.
3. Amri B., Sifi M. Riesz transforms for Dunkl transform // Annales mathématiques Blaise Pascal. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 147–162.
4. Abdelkefi C., Rachdi M. Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis // Ricerche di Matematica. 2015. Vol. 64, no. 1. P. 195–215.
5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform // Potential Analysis. 2020. Published online 22 July 2020. <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
6. Hassani S., Mustapha S., Sifi M. Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform // J. Lie Theory. 2009. Vol. 19, no. 4. P. 725–734.
7. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators. Preprint arXiv: 1901.08866.v2, 2019.

8. Velicu A. Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities // *Communications in Contemporary Mathematics*. 2020. Online Ready. <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
9. Stein E.M. Note on Singular Integrals // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1957. Vol. 8, no. 2. P. 250–254.
10. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Весовые неравенства для потенциала Дункля–Рисса // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, № 1. С. 131–147.

REFERENCES

1. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", *Lecture Notes in Math.*, *Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
2. Thangavelu S., Xu Y., 2007, "Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 199, pp. 181–195.
3. Amri B., Sifi M., 2012, "Riesz transforms for Dunkl transform", *Annales mathématiques Blaise Pascal*, vol. 19, no. 1, pp. 147–162.
4. Abdelkefi C., Rachdi M., 2015, "Some properties of the Riesz potentials in Dunkl analysis", *Ricerche di Matematica*, vol. 64, no. 1, pp. 195–215.
5. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu., 2020, "Riesz Potential and Maximal Function for Dunkl transform", *Potential Analysis*, Published online 22 July 2020, <https://doi.org/10.1007/s11118-020-09867-z>
6. Hassani S., Mustapha S., Sifi M., 2009, "Riesz potentials and fractional maximal function for the Dunkl transform", *J. Lie Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 725–734.
7. Velicu A., 2019, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators", *Preprint arXiv: 1901.08866.v2*, 20 p.
8. Velicu A., 2020, "Hardy-type inequalities for Dunkl operators with applications to many-particle Hardy inequalities", *Communications in Contemporary Mathematics*, Online Ready, <https://doi.org/10.1142/50219199720500248>
9. Stein E.M., 1957, "Note on Singular Integrals", *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, no. 2, pp. 250–254.
10. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., 2019, "Weighted inequalities for Dunkl–Riesz potential", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 131–147. <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-1-131-147> (In Russian)

Получено 24.05.2020

Принято в печать 22.10.2020 г.