ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

Ограниченный оператор сдвига для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье¹

В. И. Иванов

Валерий Иванович Иванов — доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики и компьютерных наук Тульского государственного университета (г. Тула).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Аннотация

В пространствах с весом Данкля $v_k(x)$ степенного типа на $\mathbb{R}^d$, определяемым системой корней и неотрицательной функцией кратности k , инвариантной относительно конечной группы отражений, построен содержательный гармонический анализ. Классический анализ Фурье на евклидовом пространстве соответствует случаю $k \equiv 0$. В 2012 году Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед определили двупараметрическое (k, a) -обобщенное преобразование Фурье, действующее в пространствах с весом $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a > 0$. Наиболее интересны случаи $a = 2$ и $a = 1$. При $a = 2$ обобщенное преобразование Фурье совпадает с преобразованием Данкля и оно хорошо изучено. В случае $a = 1$ гармонический анализ, важный, в частности, в задачах квантовой механики, изучен пока еще не достаточно. Одним из существенных элементов гармонического анализа является ограниченный оператор сдвига, позволяющий определить свертку и структурные характеристики функций. При $a = 1$ имеется оператор сдвига $\tau^y f(x)$. Его L^p -ограниченность недавно установлена Салемом Бен Саидом и Делевалом, но только на радиальных функциях и при $1 \leq p \leq 2$. В настоящей работе предложен новый оператор обобщенного сдвига $T^t f(x)$. Он получается интегрированием оператора $\tau^y f(x)$ по единичной евклидовой сфере по переменной y' , $|y'| = 1$, $y = ty'$. Мы доказываем, что он положителен на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, для него $T^t 1 = 1$ и он допускает представление с вероятностной мерой. Отсюда мы выводим его L^p -ограниченность для всех $1 \leq p < \infty$ и ограниченность на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$ непрерывных ограниченных функций.

Ключевые слова: $(k, 1)$ -обобщенное преобразование Фурье, оператор сдвига.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

В.И. Иванов. Ограниченный оператор сдвига для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 85–96.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-85-96

Bounded translation operator for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform²

V. I. Ivanov

Valery Ivanovich Ivanov — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Applied Mathematics and Computer Science of the Tula State University (Tula).

e-mail: ivaleryi@mail.ru

Abstract

In spaces with a Dunkl weight $v_k(x)$ of power type on $\mathbb{R}^d$, defined by a root system and a nonnegative multiplicity function k invariant with respect to a finite reflection group, a meaningful harmonic analysis is constructed, that generalizes the Fourier analysis in the Euclidean space. The classical Fourier analysis on the Euclidean space corresponds to the case $k \equiv 0$. In 2012, Salem Ben Saïd, Kobayashi, and Orsted defined the two-parametric (k, a) -generalized Fourier transform, acting in spaces with weight $|x|^{a-2}v_k(x)$, $a > 0$. The most interesting cases are $a = 2$ and $a = 1$. For $a = 2$ the generalized Fourier transform coincides with the Dunkl transform and it is well studied. In case $a = 1$ harmonic analysis, which is important, in particular, in problems of quantum mechanics, has not yet been sufficiently studied. One of the essential elements of harmonic analysis is the bounded translation operator, which allows one to determine the convolution and structural characteristics of functions. For $a = 1$, there is a translation operator $\tau^y f(x)$. Its L^p -boundedness was recently established by Salem Ben Saïd and Deleaval, but only on radial functions and for $1 \leq p \leq 2$. In this paper, a new generalized translation operator $T^t f(x)$ is proposed. It is obtained by integrating of the operator $\tau^y f(x)$ over the unit Euclidean sphere with respect to the variable y' , $|y'| = 1$, $y = ty'$. We prove that it is positive on functions from the Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, for it $T^t 1 = 1$ and it admits a representation with a probability measure. From this we deduce its L^p -boundedness for all $1 \leq p < \infty$ and boundedness on the space $C_b(\mathbb{R}^d)$ of continuous bounded functions.

Keywords: $(k, 1)$ -generalized Fourier transform, translation operator.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

V.I. Ivanov. 2020, "Bounded translation operator for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 85–96.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d -мерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, Δ — оператор Лапласа.

Для преобразования Фурье в $\mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}(y) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx$$

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Хов [1] получил спектральное представление

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{i\pi d}{4}\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4} (\Delta - |x|^2)\right),$$

используя базис из собственных функций в $L^2(\mathbb{R}^d)$ гармонического осциллятора $\Delta - |x|^2$. Оно оказалось удобным, например, при определении дробной степени преобразования Фурье.

Одним из обобщений преобразования Фурье стало преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ [2], определяемое с помощью системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$, группы отражений $G \subset O(d)$ и функции кратности $k: R \rightarrow \mathbb{R}$, инвариантной относительно G . Здесь G — конечная группа, порожденная отражениями $\{\sigma_\alpha: \alpha \in R\}$, где σ_α — отражение относительно гиперплоскости $(\alpha, x) = 0$. Роль оператора Лапласа в гармоническом анализе Данкля играет дифференциально-разностный оператор Δ_k , называемый лапласианом Данкля [3]. Для $k \equiv 0$, $\Delta_k = \Delta$. Лапласиан Данкля позволяет записать гармонический осциллятор Данкля $\Delta_k - |x|^2$ и преобразование Данкля

$$\mathcal{F}_k = \exp\left(\frac{i\pi}{4} \left(d + \sum_{\alpha \in R} k(\alpha)\right)\right) \exp\left(\frac{i\pi}{4} (\Delta_k - |x|^2)\right).$$

Дальнейшее обобщение преобразований Фурье и Данкля получено в [4]. Салем Бен Саид, Кобаяши и Орстед [4] определили a -деформированный гармонический осциллятор Данкля

$$\Delta_{k,a} = |x|^{2-a} \Delta_k - |x|^a, \quad a > 0,$$

и двухпараметрическое семейство унитарных операторов в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,a})$ с нормой

$$\|f\|_{p, d\mu_{k,a}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu_{k,a}(x) \right)^{1/2}, \quad p = 2,$$

названное (k, a) -обобщенным преобразованием Фурье:

$$\mathcal{F}_{k,a} = \exp\left(\frac{i\pi}{2a} (2\lambda_k + a)\right) \exp\left(\frac{i\pi}{2a} \Delta_{k,a}\right). \quad (1)$$

Здесь

$$\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \langle k \rangle, \quad \langle k \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R} k(\alpha),$$

$$d\mu_{k,a}(x) = c_{k,a} v_{k,a}(x) dx, \quad v_{k,a}(x) = |x|^{a-2} v_k(x),$$

$$v_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha, x \rangle|^{k(\alpha)}, \quad c_{k,a}^{-1} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^a/a} v_{k,a}(x) dx.$$

Если $a = 2$, то (1) — преобразование Данкля. Если $a = 2$ и $k \equiv 0$, то (1) — преобразование Фурье. Если $a \neq 2$, то (1) — деформированное преобразование Данкля и деформированное преобразование Фурье. Они могут найти применение в разных задачах. Например, при $a = 1$ и $k \equiv 0$ деформированное преобразование Данкля является оператором унитарного обращения модели Шредингера минимального представления группы $O(N+1, 2)$ [5].

В гармоническом анализе и теории приближений большую роль играет оператор сдвига, так как он позволяет определить свертку и структурные характеристики функций. В гармоническом анализе Фурье оператор сдвига имеет вид $\tau^y f(x) = f(x+y)$. В гармоническом анализе Данкля оператор сдвига τ^y был определен Реслер для функций из $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$ [6] и Тримеш для бесконечно дифференцируемых функций [7]. В этих пространствах он является ограниченным линейным оператором. Но его ограниченность в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,2})$, $p \neq 2$, доказана только для группы отражений $G = \mathbb{Z}_2^d$. Основная трудность состоит в том, что

τ^y в общем случае не является положительным оператором. Реслер [8] показала, что среднее значение τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x) d\sigma_k(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ — евклидова сфера, а $d\sigma_k(y') = a_k v_k(y') dy'$ — вероятностная мера на сфере, является положительным оператором. Опираясь на этот факт, в [9] доказана L^p -ограниченность оператора T^t для всех $1 \leq p < \infty$. Таким образом, его можно использовать как ограниченный оператор сдвига. Если $k \equiv 0$, то оператор T^t совпадает с оператором среднего значения по сфере и имеет широкое применение. Отметим также, что положительность оператора T^t позволила доказать положительность оператора τ^y [8] и его L^p -ограниченность [10, 9] на радиальных функциях.

Следующий важный случай обобщенного преобразования Фурье $\mathcal{F}_{k,a}$ при $a = 1$. Оператор сдвига τ^y для преобразования $\mathcal{F}_{k,1}$, ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, определен Салемом Бен Саидом и Делевалом [11], см. также [12]. Они доказали, что на радиальных функциях оператор τ^y положительный и ограниченный в пространствах $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leq p \leq 2$.

В настоящей работе при $\lambda_k > 0$ определяется оператор среднего значения τ^y по сфере

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x) d\sigma_{k,1}(y'), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

где $d\sigma_k(y') = a_{k,1} v_{k,1}(y') dy'$ — вероятностная мера на сфере. Он также ограниченный в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$. Наша цель показать, что оператор T^t положительный на функциях из пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $T^t 1 = 1$. Откуда будет вытекать, что для всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^d$ он допускает представление

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) d\sigma_{t,x}^k(\xi) \quad (3)$$

с вероятностной мерой $d\sigma_{t,x}^k$.

Опираясь на представление (3), мы доказываем, что для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $t \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|T^t f\|_{p, d\mu_{k,1}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,1}}. \quad (4)$$

В силу плотности пространства Шварца оператор T^t может быть продолжен на все пространство $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $1 \leq p < \infty$, с сохранением неравенства (4).

2. Элементы обобщенного гармонического анализа и операторы сдвига

Гармонический анализ Данкля, в частности, строится с помощью дифференциально-разностных операторов

$$T_j f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{a \in R_+} k(a) \langle a, e_j \rangle \frac{f(x) - f(\sigma_a x)}{\langle a, x \rangle}, \quad j = 1, \dots, d,$$

где R_+ — положительная подсистема системы корней R , а $\{e_j\}$ — стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. А также лапласиана Данкля

$$\Delta_k f(x) = \sum_{j=1}^d T_j^2 f(x).$$

При $k \equiv 0$, Δ_k — оператор Лапласа Δ . Для радиальных функций

$$\Delta_k f(x) = \Delta f(x) + 2 \sum_{a \in R_+} k(a) \frac{\langle \nabla f(x), a \rangle}{\langle a, x \rangle},$$

где $\nabla f(x)$ — градиент функции $f(x)$.

В гармоническом анализе Данкля построен положительный оператор сплетения V_k , для которого

$$TjV_k f(x) = V_k \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Для него получено представление

$$V_k f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) d\mu_x^k(\xi) \quad (5)$$

с вероятностной мерой $d\mu_x^k$, носитель которой лежит в выпуклой оболочке орбиты $O^x = \{gx : g \in G\}$.

Большинство основных фактов гармонического анализа Данкля можно найти в [3].

Пусть $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода и порядка $\alpha \geq -1/2$,

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha + 1) \frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1)(-1)^j z^{2j}}{2^{2j} j! \Gamma(j + \alpha + 1)}$$

— нормированная функция Бесселя. Для нее $|j_\alpha(z)| \leq 1$.

В дальнейшем будем считать, что выполнено условие $\lambda_k > 0$. В пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ $(k, 1)$ -обобщенное преобразование Фурье определяется как интегральный оператор

$$\mathcal{F}_{k,1} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x, y) f(y) d\mu_{k,1}(y) \quad (6)$$

с непрерывным ядром

$$B(x, y) = V_k(j_{\lambda_k-1/2}(\sqrt{|x||y|(1 + \langle x', \cdot \rangle)}))(y'), \quad x = |x|x', y = |y|y', \quad (7)$$

для которого в силу представления (7)

$$|B_k(x, y)| \leq 1, \quad B_k(0, y) = 1, \quad |x| \Delta_k^x B_k(x, y) = -|y| B_k(x, y), \quad (8)$$

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, ty') d\sigma_{k,1}(y') = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|x|}). \quad (9)$$

Обобщенное преобразование Фурье — изометрия пространства $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и $\mathcal{F}_{k,1}^2 = Id$.

Если $f \in \mathcal{A} = \{f : f, \mathcal{F}_{k,1}(f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})\}$, то равенство (6) справедливо поточечно. Справедливо вложение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{A}$.

Основные факты об обобщенном преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{k,1}$ можно найти в [4].

Оператор сдвига в пространстве $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ для $(k, 1)$ -обобщенного преобразования Фурье определяется как интегральный оператор

$$\tau^y f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x, \xi) B_k(y, \xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi) d\mu_{k,1}(\xi). \quad (10)$$

В силу (8) норма оператора τ^y в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ равна 1. Если $f \in \mathcal{A}$ равенство (10) справедливо поточечно.

Известно [11], что для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{A}$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau^y f(x) g(x) d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \tau^y g(x) d\mu_{k,1}(x). \quad (11)$$

Для функций из класса $\mathcal{A}$ оператор сдвига T^t определен равенством (2). В силу (9) он может быть записан как интегральный оператор

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} B_k(x, \xi) j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi) d\mu_{k,1}(\xi). \quad (12)$$

Он также действует в $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и его норма равна 1. Для функций из класса $\mathcal{A}$ равенство (12) выполняется поточечно. Из (12) также вытекает

$$\mathcal{F}_{k,1}(T^t f)(\xi) = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi).$$

Для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathcal{A}$ из (11) получаем самосопряженность оператора T^t :

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f(x) g(x) d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T^t g(x) d\mu_{k,1}(x). \quad (13)$$

3. Интегральное представление оператора сдвига

ЛЕММА 1. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $t \in \mathbb{R}_+$, то $T^t f \in \mathcal{A}$ и

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f(x) d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{k,1}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{F}_{k,1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ [13], то $\mathcal{F}_{k,1}(T^t f) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$. Если $Df = |\cdot| \Delta_k f$, то согласно (8)

$$\begin{aligned} |x|^{2m} T^t f(x) &= |x|^{2m} \mathcal{F}_{k,1}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|}) \mathcal{F}_{k,1}(f))(x) \\ &= \mathcal{F}_{k,1}(D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|}) \mathcal{F}_{k,1}(f)))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} B(x, \xi) D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|}) \mathcal{F}_{k,1}(f))(\xi) d\mu_{k,1}(\xi). \end{aligned}$$

Отсюда

$$|T^t f(x)| \leq \frac{1}{|x|^{2m}} \int_{\mathbb{R}^d} |D^{2m}(j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\cdot|}) \mathcal{F}_{k,1}(f))(\xi)| d\mu_{k,1}(\xi).$$

Если выбрать $2m > 2\lambda_k + 1$ и доказать конечность последнего интеграла, то получим $T^t f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$. Первое утверждение леммы будет установлено.

Докажем конечность нужного интеграла. Пусть

$$\varphi(r) = j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr}), \quad r = |x|, \quad g(x) = \mathcal{F}_{k,1}(f)(x).$$

Имеем

$$\varphi'(r) = -\frac{t}{2\lambda_k + 1} j_{2\lambda_k+1}(2\sqrt{tr}), \quad T_j(\varphi g)(x) = \varphi(r) T_j g(x) + \frac{\varphi'(r)}{r} x_j g(x),$$

$$T_j^2(\varphi g)(x) = \varphi(r) T_j^2 g(x) + \frac{\varphi'(r)}{r} (x_j T_j g(x) + T_j(x_j g(x))) + \frac{\varphi''(r) - \varphi'(r)}{r^3} x_j^2 g(x),$$

$$D(\varphi g)(x) = r\varphi(r)\Delta_k g(x) + \varphi'(r) \sum_{j=1}^d (x_j T_j g(x) + T_j(x_j g(x))) + (\varphi''(r) - \varphi'(r))g(x).$$

Продолжая вычисления, получим, что $D^{2m}(\varphi g)(x)$ есть линейная комбинация функций из пространства Шварца с коэффициентами, которые растут на бесконечности не быстрее многочленов. Следовательно, $D^{2m}(\varphi g)(x) \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

Пусть $\lambda > 0$. Так как $e^{-\lambda|x|} \in \mathcal{A}$ [11], то согласно (13)

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f(x) e^{-\lambda|x|} d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) T^t e^{-\lambda|x|} d\mu_{k,1}(x).$$

Отсюда по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int_{\mathbb{R}^d} T^t f(x) d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu_{k,1}(x),$$

так как по доказанному $T^t f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$, $f \in L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ и

$$e^{-\lambda|x|} \leq 1, \quad |T^t e^{-\lambda|x|}| \leq 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda|x|} = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} T^t e^{-\lambda|x|} = 1.$$

(см. [11]). Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. $T^t 1 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T^t 1, \varphi \rangle = \langle 1, T^t \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} T^t \varphi(x) d\mu_{k,1}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\mu_{k,1}(x) = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Следовательно, $T^t 1 = 1$. Лемма 2 доказана.

Далее покажем, что для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ оператор сдвига $T^t f(x)$ может быть получен как предел некоторого семейства линейных операторов. Рассмотрим ограниченную функцию

$$\Gamma(x, y, z, s) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} B_k(x, \xi) B_k(y, \xi) B_k(z, \xi) d\mu_k(\xi)$$

и ее сферическое среднее

$$K(x, t, z, s) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Gamma(x, ty', z, s) d\sigma_{k,1}(y').$$

Для функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим интегральный оператор

$$\int_{\mathbb{R}^d} K(x, t, z, s) f(z) d\mu_{k,1}(z).$$

Применяя (9), получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, t, z, s) f(z) d\mu_{k,1}(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Gamma(x, ty', z, s) d\sigma_{k,1}(y') f(z) d\mu_{k,1}(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} B_k(x, \xi) B_k(ty', \xi) B_k(z, \xi) d\mu_k(\xi) d\sigma_{k,1}(y') f(z) d\mu_{k,1}(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} B_k(x, \xi) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(ty', \xi) d\sigma_{k,1}(y') \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi) d\mu_k(\xi). \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x, \xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi) d\mu_k(\xi).$$

Так как $\mathcal{F}_{k,1}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} K(x, t, z, s) f(z) d\mu_{k,1}(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x, \xi) \mathcal{F}_{k,1}(f)(\xi) d\mu_k(\xi) = T^t f(x). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}_+$, то для оператора сдвига $T^t f(x)$ справедливо представление (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $T^t f(x) \geq 0$, если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $f(x) \geq 0$. Для этого достаточно показать, что ядро $K(x, t, z, s) \geq 0$. Мы следуем работе [8].

Применяя (9), получим

$$\begin{aligned} K(x, t, z, s) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} B(x, \xi) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(ty', \xi) d\sigma_{k,1}(y') B_k(z, \xi) d\mu_k(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s|\xi|} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{t|\xi|}) B_k(x, \xi) B_k(z, \xi) d\mu_k(\xi) \\ &= \int_0^\infty I(x, z, r) e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr}) d\nu_{2\lambda_k}(r), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} I(x, z, r) &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_k(x, r\xi') B_k(z, r\xi') d\sigma_{k,1}(\xi'), \\ d\nu_{2\lambda_k}(r) &= b_{2\lambda_k,1} r^{2\lambda_k} dr, \quad b_{2\lambda_k,1}^{-1} = \int_0^\infty e^{-r} r^{2\lambda_k} dr = \Gamma(2\lambda_k + 1). \end{aligned}$$

В [11] выведена формула

$$I(x, z, r) = V_k \left(\int_{-1}^1 j_{2\lambda_k} \left(2\sqrt{r(|x| + |z| - \sqrt{|x||z|(1 + \langle x', \cdot \rangle)u})} \right) d\psi_{\lambda_k-1}(u) \right) (z'),$$

где

$$d\psi_\lambda(u) = \frac{\Gamma(\lambda + 3/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda + 1)} (1 - u^2)^\lambda du$$

— вероятностная мера на отрезке $[-1, 1]$. Применяя интегральное представление оператора сплетения V_k (5), получим

$$I(x, z, r) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^1 j_{2\lambda_k} \left(2\sqrt{r(|x| + |z| - \sqrt{|x||z|(1 + \langle x', \xi \rangle)u})} \right) d\psi_{\lambda_k-1}(u) d\mu_{z'}(\xi).$$

Отсюда и из (14)

$$\begin{aligned} K(x, t, z, s) &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^1 e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{tr}) \\ &\times j_{2\lambda_k} \left(2\sqrt{r(|x| + |z| - \sqrt{|x||z|(1 + \langle x', \xi \rangle)u})} \right) d\nu_{2\lambda_k}(r) d\psi_{\lambda_k-1}(u) d\mu_{z'}(\xi). \end{aligned}$$

Для функций Бесселя хорошо известна теорема умножения Гегенбауэра [14, п. 11.41]. Запишем ее в удобной для нас форме

$$j_{2\lambda_k}(\sqrt{a}) j_{2\lambda_k}(\sqrt{b}) = \int_{-1}^1 j_{2\lambda_k} \left(\sqrt{a + b - 2\sqrt{ab}v} \right) d\psi_{2\lambda_k-1/2}(v).$$

Обозначая

$$q = |x| + |z| + t - \sqrt{|x||z|(1 + \langle x', \xi \rangle)}u - 2\sqrt{t(|x| + |z| - \sqrt{|x||z|(1 + \langle x', \xi \rangle)}u)}v$$

и применяя теорему умножения, получим

$$K(x, t, z, s) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^\infty e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rq}) d\nu_{2\lambda_k}(r) d\mu_{z'}(\xi) d\psi_{\lambda_k-1}(u) d\psi_{2\lambda_k-1/2}(v).$$

Так как [15, стр.33, формула 10]

$$\int_0^\infty e^{-sr} j_{2\lambda_k}(2\sqrt{rq}) d\nu_{2\lambda_k}(r) = \frac{e^{-q/s}}{s^{2\lambda_k+1}} > 0,$$

то ядро $K(x, t, z, s) \geq 0$.

Таким образом, при фиксированных x и t оператор $T^t f(x)$ является положительным линейным непрерывным функционалом на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Так как он положителен и непрерывен на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, то он является мерой Радона [16, теорема 2.1.7]

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\xi) d\sigma_{t,x}^k(\xi).$$

Непрерывность на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ влечет степенной рост меры $d\sigma_{t,x}^k$ [17, п. 3.4]. Для некоторого $m \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\sigma_{t,x}^k(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^m} < \infty.$$

Наконец, лемма 2 показывает, что мера $d\sigma_{t,x}^k$ вероятностная. Представление (3) получено. Теорема 1 доказана.

Интегральное представление (3) показывает, что оператор сдвига $T^t f(x)$ может быть распространен и на другие классы функций, в частности, на пространство непрерывных ограниченных функций $C_b(\mathbb{R}^d)$.

4. L^p -ограниченность оператора сдвига

Мы следуем работе [9].

ТЕОРЕМА 2. Если $1 \leq p \leq \infty$, то для $t \in \mathbb{R}_+$ и $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|T^t f\|_{p, d\mu_{k,1}} \leq \|f\|_{p, d\mu_{k,1}}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \mathbb{R}_+$ задано и оператор T^t определен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ представлением (3). Используя (12), мы получим

$$\sup\{\|T^t f\|_2 : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{2, d\mu_{k,1}} \leq 1\} \leq 1$$

и T^t может быть распространен на пространство $L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ с сохранением нормы, и это распространение совпадает с (12). Кроме этого, (3) дает

$$\sup\{\|T^t f\|_\infty : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty \leq 1\} \leq 1. \quad (16)$$

Так как оператор T^t самосопряженный (13), то из (16)

$$\begin{aligned} & \sup\{\|T^t f\|_{1,d\mu_k} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{1,d\mu_{k,1}} \leq 1\} \\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} T^t f g d\mu_k : f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{1,d\mu_{k,1}} \leq 1, \|g\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} f T^t g d\mu_k : f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{1,d\mu_{k,1}} \leq 1, \|g\|_{\infty} \leq 1\right\} \\ &= \sup\{\|T^t g\|_{\infty} : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|g\|_{\infty} \leq 1\} \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, T^t может быть распространен на $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$ с сохранением нормы и это распространение совпадает с (12) на $L^1(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1}) \cap L^2(\mathbb{R}^d, d\mu_{k,1})$.

По интерполяционной теореме Рисса–Торина

$$\sup\{\|T^t f\|_{p,d\mu_k} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leq 1\} \leq 1, \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Пусть $2 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$. Как и для $p = 1$ мы получим

$$\begin{aligned} & \sup\{\|T^t f\|_{p,d\mu_{k,1}} : f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|f\|_{p,d\mu_{k,1}} \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T^t g\|_{p',d\mu_{k,1}} : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|g\|_{p',d\mu_{k,1}} \leq 1\} \leq 1. \end{aligned}$$

Неравенства (15) и теорема 2 доказаны.

5. Заключение

В работе построен положительный оператор сдвига, ограниченный в пространствах L^p . Для него получено интегральное представление с вероятностной мерой. Но остался невыясненным вопрос о носителе меры, его компактности. Компактность меры позволила бы распространить оператор на пространство бесконечно дифференцируемых функций, с топологией определяемой компактными множествами. Обратно, если бы удалось доказать непрерывность оператора сдвига на таком пространстве, мы бы получили компактность носителя меры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Howe R. The oscillator semigroup. The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987) // Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1988. Vol. 48. P. 61–132.
2. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.
3. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2002. Vol. 1817. P. 93–135.
4. Salem Ben Saïd, Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators // Compos. Math. 2012. Vol. 148, no. 4. P. 1265–1336.
5. Kobayashi T., Mano G. The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p; q)$ // Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 212, no. 1000.
6. Rösler M. Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators // Comm. Math. Phys. 1998. Vol. 192. P. 519–542.

7. Trimèche K. Paley–Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators // *Integral Transform. Spec. Funct.* 2002. Vol. 13. P. 17–38.
8. Rösler M. A positive radial product formula for the Dunkl kernel // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2003. Vol. 355. P. 2413–2438.
9. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p -bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // *Constr. Approx.* 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.
10. Thangavelu S., Xu Y. Convolution operator and maximal function for Dunkl transform // *J. d'Analyse. Math.* 2005. Vol. 97. P. 25–55.
11. Salem Ben Saïd, Deleaval L. Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform // *Journal of Functional Analysis*. 2020. Vol. 279, no. 8. Article 108706.
12. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform // *International Mathematics Research Notices*. 2016. Vol. 2016, no. 23. P. 7179–7200.
13. Johansen T. R. Weighted inequalities and uncertainty principles for the $(k; a)$ -generalized Fourier transform // *Internat. J. Math.* 2016. Vol. 27, no. 3. Article 1650019.
14. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. 799 с.
15. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Том 2. Преобразования Бесселя. Интегралы. М.: Наука, 1970. 328 с.
16. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 464 с.
17. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 412 с.

REFERENCES

1. Howe R., 1988, "The oscillator semigroup. The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)", *Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 48., pp. 61–132.
2. Dunkl C. F., 1992, "Hankel transforms associated to finite reflections groups", *Contemp. Math.*, vol. 138, pp. 123–138.
3. Rösler M., 2002, "Dunkl operators. Theory and applications: in Orthogonal Polynomials and Special Functions", *Lecture Notes in Math., Springer-Verlag*, vol. 1817, pp. 93–135.
4. Salem Ben Saïd, 2012, "Kobayashi T., Ørsted B. Laguerre semigroup and Dunkl operators", *Compos. Math.*, vol. 148, no. 4, pp. 1265–1336.
5. Kobayashi T., Mano G., 2011, "The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p; q)$ ", *Memoirs of the American Mathematical Societies. Providence, RI: Amer. Math. Soc.*, vol. 212, no. 1000.
6. Rösler M., 1998, "Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators", *Comm. Math. Phys.*, vol. 192, pp. 519–542.

7. Trimèche K., 2002, "Paley–Wiener Theorems for the Dunkl transform and Dunkl translation operators", *Integral Transform. Spec. Funct.*, vol. 13, pp. 17–38.
8. Rösler M., 2003, "A positive radial product formula for the Dunkl kernel", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 355, pp. 2413–2438.
9. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2019, "Positive L^p -bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications", *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.
10. Thangavelu S., Xu Y., 2005, "Convolution operator and maximal function for Dunkl transform", *J. d'Analyse. Math.*, vol. 97, pp. 25–55.
11. Salem Ben Saïd, Deleaval L., 2020, "Translation operator and maximal function for the $(k, 1)$ -generalized Fourier transform", *Journal of Functional Analysis*, vol. 279, no. 8, Article 108706.
12. Gorbachev D.V., Ivanov V.I., Tikhonov S.Yu., 2016, "Pitt's Inequalities and Uncertainty Principle for Generalized Fourier Transform", *International Mathematics Research Notices*, vol. 2016, no. 23, pp. 7179–7200.
13. Johansen T.R., 2016, "Weighted inequalities and uncertainty principles for the $(k; a)$ -generalized Fourier transform", *Internat. J. Math.*, vol. 27, no. 3, Article 1650019.
14. Watson G.N., 1995, "A treatise on the theory of Bessel functions", *Cambridge University Press*, 814 p.
15. Bateman H., Erdélyi A., 1954, "Tables of Integral Transforms. Vol.2", *New York, Toronto, London: MC GRAV-HILL Book COMPANY, INC*, 328 p.
16. Hörmander L. 1983, "The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis", *Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag*, 464 p.
17. Vladimirov V.S., 1964, "Methods of the theory of functions of several complex variables", *M.: Nauka*, 412 p. (In Russian)

Получено 13.02.2020

Принято в печать 22.10.2020 г.