ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-56-71

О «простых» алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина

Валерий Георгиевич Дурнев — доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Оксана Валерьевна Зеткина — кандидат экономических наук, доцент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Алена Игоревна Зеткина — ассистент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Аннотация

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость $\exists\forall^2\exists^3$-теории свободной полугрупп счетного ранга, что усиливает классический результат В. Куайна [1] 1946 года об алгоритмической неразрешимости элементарной теории любой нециклической свободной полугруппы.

Ключевые слова: свободные полугруппы, элементарные теории.

Библиография: 18 названий.

Для цитирования:
В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина. О «простых» алгоритмически неразрешимых фрагментах элементарной теории бесконечно порожденной свободной полугруппы // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 56–71.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-56-71

On "simple" algorithmically undecidable fragments of elementary theory of an infinitely generated free semigroup

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina

Valery Georgievch Durnev — doctor of phisics and mathematics, professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Oksana Valerievna Zetkina — candidate of economic sciences, associate professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Alena Igorevna Zetkina — assistent, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Abstract

We prove algorithmic undecidability of $\exists\forall^2\exists^3$-theory for a free semigroup of countable rank. This strengthens the classical Quine's (1946) result [1] on algorithmic undecidability of elementary theory of an arbitrary non-cyclic free semigroup.

Keywords: free semigroups, elementary theories.

Bibliography: 18 titles.

For citation:
V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina, 2020, "On "simple" algorithmically undecidable fragments of elementary theory of infinitely generated free semigroup", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 56–71.

1. Введение

Обозначим через S_ω — свободную полугруппу счетного ранга со свободными образующими a_1, ..., a_m, ..., а через S_m — свободную полугруппу ранга m со свободными образующими a_1, ..., a_m. При $m = 2$ вместо a_1 и a_2 будем писать a и b соответственно, а при $m = 3$ вместо a_1, a_2 и a_3 – соответственно a, b и c. Заметим, что S_1 — циклическая полугруппа. Мы рассматриваем свободные полугруппы с пустым словом в качестве нейтрального элемента, т.е. свободные полугруппы с единицей или моноиды. Ради краткости будем говорить просто свободные полугруппы.

В статье рассматривается вопросы, связанные с истинностью на свободных полугруппах S_m замкнутых формул в сигнатуре $\langle \cdot, a_1, \ldots, a_m \rangle$.

Элементарная теория $Th(S_\alpha)$ свободной полугруппы S_α ($\alpha \in \{1, 2, \ldots, m, \ldots\} \cup \{\omega\}$) — это множество всех *замкнутых* (не содержащих свободных вхождений переменных) формул Φ вида

$$(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2) \ldots (Q_n\, x_n)\, \Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k} ((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \,\&\, (\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} - \text{слова в алфавите } \{x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\},$$

$$A_i \text{ и } B_i - \text{множества (возможно пустые), а } Q_1, \ldots, Q_n - \text{кванторы } \forall \text{или } \exists,$$

истинных на свободной полугруппе S_α.

При этом $(Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\ldots(Q_n x_n)$ называется *кванторной приставкой* формулы Φ, $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ — *типом кванторной приставки*, а Ψ — *бескванторной частью* формулы Φ.

Изучение элементарной теории свободной некоммутативной полугруппы началось с работы В. Куайна [1] 1946 года, в которой он доказал *алгоритмическую неразрешимость элементарной теории нециклической свободной полугруппы. Элементарная теория циклической полугруппы* S_1 — это *арифметика Пресбургера*, которая, как хорошо известно, *является алгоритмически разрешимой.*

2. Фрагменты элементарных теорий конечно порожденных свободных полугрупп

Естественна постановка вопроса о возможности упрощения бескванторной части и кванторной приставки рассматриваемых формул с *сохранением алгоритмической неразрешимости.* В бескванторную часть рассматриваемых формул входят логические связки $\neg$ — *отрицание*, & — *конъюнкция* и $\vee$ — *дизъюнкция* и константы a_1, ..., a_m.

Начнем процесс упрощения с удаления отрицания $\neg$.

Формула Φ называется *позитивной*, если ее бескванторная часть Ψ не содержит отрицаний, т.е. имеет вид

$$\bigvee_{i=1}^{k} \big(\mathop{\&}_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij} \big).$$

Позитивной теорией $Th^+(S_\alpha)$ свободной полугруппы S_α называется множество всех *замкнутых позитивных* формул Φ *истинных* на свободной полугруппе S_α.

В работе [2] замечено, что для любых двух элементов U и V полугруппы S_m (m — произвольное натуральное число) справедлива эквивалентность

$$U \neq V \iff (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\bigvee_{i=1}^{m}(U = Va_i x \vee V = Ua_i x) \vee (\bigvee_{i,j=1,\, i \neq j}^{m} U = xa_i y \,\&\, V = xa_j z)),$$

поэтому из результата В. Куайна сразу следует *алгоритмическая неразрешимость позитивной теории свободной нециклической полугруппы* (этот факт в работе В. Куайна не отмечается).

В работах [3], [4] и [5] результат В. Куайна для конечно порожденных свободных полугрупп был существенно усилен — последовательно доказано, что

можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\exists y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{14} w_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b) \,=\, u_i(x, y, z, x_1, x_2, x_3, a, b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A*, элементу свободной полугруппы* S_2*, определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_3 *позитивная формула* $\Phi(A)$.

В работе [4] С. С. Марченкова *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b) \,=\, u_i(x, y, x_1, x_2, x_3, x_4, a, b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

В работе [5] получено дальнейшее усиление результатов работ [3] и [4] — *построено такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\,(\bigvee_{i=1}^{m} w_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b) \,=\, u_i(x,y,x_1,x_2,x_3,a,b)),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Естественным является вопрос о возможности дальнейшего упрощения бескванторной части. В работе Н. К. Косовского [6] построена формула $DK(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,x_3,x_4,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A \,=\, B \vee C \,=\, D) \iff S_m \models DK(A,B,C,D).$$

Это позволяет исключить знак дизъюнкции $\vee$ из бескванторной части рассматриваемых формул, однако приводит к значительному усложнению кванторной приставки.

В работе [5] был несколько усилен результат Н. К. Косовского — построена формула $DD(x,y,z,v)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A \,=\, B \vee C \,=\, D) \iff S_m \models DD(A,B,C,D).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых формул, но кванторная приставка, конечно, усложняется. В работе [7] была построена формула $DKMP_n(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n)$ вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\,w(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b) \,=\, u(y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n,x_1,x_2,a,b)$$

такая, что для произвольных элементов A_1, B_1, ... , A_n и B_n свободной полугруппы S_m справедлива эквивалентность

$$(A_1 \,=\, B_1 \vee A_2 \,=\, B_2 \vee \ldots \vee A_n \,=\, B_n) \iff S_m \models DKMP_n(A_1,B_1,\ldots,A_n,B_n).$$

Это позволяет упростить бескванторную часть рассматриваемых в работе [5] формул за счет незначительного усложнения кванторной приставки. Получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул* $\Phi(x)$ *с параметром* x *вида*

$$(\forall y)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)\,w(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b) \,=\, u(x,y,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному натуральному числу k *определить, истинна ли на свободной полугруппе* S_2 *позитивная формула* $\Phi(a^k)$.

Заметим, что в работах [5] и [7] построение формул ведется по методу Н. К. Косовского [6] с некоторыми усовершенствованиями.

В работе [2] показано, что невозможно построить формулу вида

$$w(x,y,z,v,a,b) \,=\, u(x,y,z,v,a,b)$$

такую, чтобы для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m была справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \iff S_m \models w(A, B, C, D, a, b) = u(A, B, C, D, a, b).$$

Поэтому представляет интерес следующий вопрос:
можно ли построить формулу вида

$$(\exists x_1)\, w(x, y, z, v, x_1, a, b) = u(x, y, z, v, x_1, a, b)$$

такая, чтобы для произвольных элементов A, B, C и D свободной полугруппы S_m была справедлива эквивалентность

$$(A = B \vee C = D) \iff S_m \models (\exists x_1)\, w(A, B, C, D, x_1, a, b) = u(A, B, C, D, x_1, a, b).$$

В 1976 году Г. С. Маканин [9] получил ***фундаментальный результат в теории уравнений в свободных полугруппах (уравнений в словах)*** *— он построил алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{k} w_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = u_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m)$$

определить, имеет ли она решение в свободной полугруппе S_m.

Из этого фундаментального результата Г.С. Маканина сразу следует *существование алгоритма, позволяющего по произвольной замкнутой формуле Φ с кванторной приставкой типа $\exists\exists \ldots \exists$ или типа $\forall\forall \ldots \forall$, т.е. для формул вида*

$$(\exists\, x_1)(\exists\, x_2) \ldots (\exists\, x_n)\, \Psi \text{ или вида } (\forall\, x_1)(\forall\, x_2) \ldots (\forall\, x_n)\, \Psi,$$

$$\text{где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k} ((\mathop{\&}_{j \in A_i} w_{ij} = u_{ij}) \,\&\, (\mathop{\&}_{t \in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$

$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} - \text{слова в алфавите } \{x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m\},$$

$$A_i \text{ и } B_i - \text{множества (возможно пустые)},$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_m.

В работе [2] показано, что *по произвольной замкнутой позитивной формуле Φ с кванторной приставкой типа $Q_1 Q_2 \ldots Q_n \forall$ можно построить замкнутую позитивную формулу Φ^* с кванторной приставкой типа $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ такую, что*

формула Φ истинна на свободной полугруппе S_m тогда и только тогда, когда на этой полугруппе истинна формула Φ^*.

Поэтому *вопрос об истинности на свободной полугруппе S_m позитивных формул с кванторными приставками вида $(\exists x_1) \ldots (\exists x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_m)$ алгоритмически разрешим.*

Представляет интерес *вопрос об алгоритмической разрешимости проблемы определения истинности на свободной полугруппе S_2 для позитивных формул с кванторными приставками вида $\exists\forall\exists\exists$* и $\exists\exists\forall\exists$ и *произвольной бескванторной частью*, а так же для *позитивных формул с кванторными приставками вида* $\exists\forall\exists\exists\exists\exists$, $\exists\exists\forall\exists\exists\exists$, $\exists\exists\exists\forall\exists\exists$ и $\exists\exists\exists\exists\forall\exists$ и *бескванторной частью "простейшего" возможного вида $w = u$.*

3. Фрагменты элементарной теории счетно порожденной свободной полугруппы

Выше рассматривались *конечно порожденные свободные полугруппы*. Для *счетно порожденных свободных полугрупп* ситуация несколько иная. С одной стороны, А.Д. Тайманов и Ю.И. Хмелевский в совместной работе [10] показали, что *универсальная теория свободной полугруппы счетного ранга S_ω алгоритмически разрешима*, т.е. существует алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\,\Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} \text{ -- слова в алфавите } \{x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m,\ldots\},$$
$$A_i \text{ и } B_i \text{ -- множества (возможно пустые)},$$

определить, истинна ли она на свободной полугруппе S_ω. Аналогично и для формул вида

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)\,\Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} \text{ -- слова в алфавите } \{x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m,\ldots\},$$
$$A_i \text{ и } B_i \text{ -- множества (возможно пустые)}.$$

Аналогичный результат для конечно порожденных полугрупп, конечно, сразу следует из фундаментальной теоремы Г.С. Маканина [9], так как в этом случае, как уже отмечалось выше, отношение $x \neq y$ выразимо позитивной $\exists$-формулой. В случае счетно порожденной полугруппы такой подход невозможен, поэтому А.Д. Тайманов и Ю.И. Хмелевский использовали другой метод. Но возможно и использование теоремы Г.С. Маканина, если заметить, что для формулы Φ вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)\,\Psi, \text{ где } \Psi = \bigvee_{i=1}^{k}((\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij} = u_{ij})\,\&\,(\mathop{\&}_{t\in B_i} v_{it} \neq z_{it})),$$
$$\text{где } w_{ij}, u_{ij}, v_{it}, z_{it} \text{ -- слова в алфавите } \{x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m\},$$
$$A_i \text{ и } B_i \text{ -- множества (возможно пустые)},$$

справедлива эквивалентность

$$S_\omega \models \Phi \iff S_{m+2} \models \Phi.$$

Если $S_\omega \models \Phi$, то, конечно, и $S_{m+2} \models \Phi$.

Для доказательства обратного предположим, что $S_{m+2} \models \Phi$. Тогда формула Φ истинна на ее счетно порожденной подполугруппе

$$\langle a_1,\ldots,a_m, a_{m+1}a_{m+2}a_{m+1}, a_{m+1}a_{m+2}^2a_{m+1},\ldots,a_{m+1}a_{m+2}^na_{m+1},\ldots\rangle.$$

Отображение φ, заданное равенствами

$$\varphi(a_n) = \begin{cases} a_n & \text{при n = 1, 2, \ldots, m ;} \\ a_{m+1}a_{m+2}^{n-m}a_{m+1} & \text{при n = m+1, m+2, \ldots} \end{cases},$$

является изоморфизмом свободной полугруппы S_ω на эту счетно порожденную подполугруппу, поэтому $S_\omega \models \Phi$.

В работе [2] отмечается, что *позитивная теория свободной полугруппы S_ω является рекурсивно перечислимой* и *формулируется вопрос о ее рекурсивности (алгоритмической разрешимости).*

Для установления рекурсивной перечислимости позитивной теории свободной полугруппы S_ω счетного ранга можно воспользоваться конструкцией Ю.И. Мерзлякова из работы [11], примененной им к свободным группам:

по произвольной позитивной формуле Φ, содержащей лишь свободные образующие a_1, a_2, ..., a_m, можно построить уравнение с ограничениями на решения

$$w(x_1,\ldots,x_q,a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_p) \;=\; u(x_1,\ldots,x_q,a_1,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_p)\,\&\, \mathop{\&}_{i=1}^{q} x_i \in \langle\, a_1,\ldots,a_{n_i}\,\rangle,$$

где $\langle\, a_1,\ldots,a_{n_i}\,\rangle$ — подполугруппа, порожденная элементами a_1, ..., a_{n_i}, $m \le n_1 \le n_2 \le \ldots \le$ $\le n_q = p$, такое что

формула Φ истинна на свободной полугруппе S_ω тогда и только тогда, когда это уравнение с ограничениями имеет решение в свободной полугруппе S_p.

Ю.М. Важенин и Б.В. Розенблат в работе [12] *на базе алгоритма Г.С. Маканина построили алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений с ограничениями на решения указанного вида в свободной полугруппе определить, имеет ли она решение* и доказали *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной полугруппы счетного ранга.* Аналогичным образом Г.С. Маканин [12] используя работу Ю.И. Мерзлякова [13] доказал *разрешимость позитивной теории (с константами) свободной группы любого ранга и класса всех групп.* Алгоритмическая неразрешимость элементарной теории класса всех групп была установлена А. Тарским еще в 40-ые годы XX века. Из фундаментального результата П.С. Новикова [14] о существовании конечно определенной группы с неразрешимой проблемой равенства и теоремы Борисова [15] следует, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\mathop{\&}_{i=1}^{12} w_i(x_1,x_2)=1 \;\to\; w(x_1,x_2)=1)$$

определить, истинна ли она на каждой группе. При этом можно считать, что слова $w_1(x_1,x_2)$, ..., $w_{12}(x_1,x_2)$ фиксированы, а меняется лишь слово $w(x_1,x_2)$.

Из результата Ю.В. Матиясевича [16] о существовании конечно определенной полугруппы с тремя определяющими соотношениями и неразрешимой проблемой равенства следует, что невозможно построить алгоритм, позволяющий по произвольной формуле вида

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\mathop{\&}_{i=1}^{3} w_i(x_1,x_2)=u_i(x_1,x_2) \;\to\; w(x_1,x_2)=u(x_1,x_2))$$

определить, истинна ли она на каждой полугруппе. При этом можно считать, что слова $w_1(x_1,x_2)$, $u_1(x_1,x_2)$..., $w_3(x_1,x_2)$ и $u_3(x_1,x_2)$ фиксированы, а меняется лишь слова $w(x_1,x_2)$ $u(x_1,x_2)$.

В работе K.U. Schulz [17] усиливаются результаты Г.С. Маканина, Ю.М. Важенина и Б.В. Розенблат — путем модификации алгоритма Г.С. Маканина строится *алгоритм, позволяющий по произвольной системе уравнений в свободной полугруппе с ограничениями на решения вида*

$$\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m) \;=\; u_i(x_1,\ldots,x_n,a_1,\ldots,a_m)\,\&\,\mathop{\&}_{i=1}^{n} x_i \in L_i,$$

где L_1, ..., L_n — регулярные языки, определить, имеет ли эта система решение в свободной полугруппе S_m. Отметим, что любая конечно порожденная подполугруппа является регулярным множеством.

Для установления алгоритмической неразрешимости “простых” фрагментов элементарной теории счетно порожденной свободной полугруппы S_ω по произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle a, b \mid A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi_S(X, Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cXcx \neq ycaz \,\&\, cXcx \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1 \leq j \leq n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Для облегчения понимания дальнейших рассуждений заметим, что построенная формула $\Phi_S(X, Y)$ равносильна формуле вида

$$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cXcx = ycaz \vee cXcx = ycbz) \rightarrow \\ \rightarrow \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).$$

Лемма 1. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ *на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$.*

Доказательство. Предположим, что *слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S* (равны в полугруппе S). Тогда существует такое натуральное число m и такая последовательность слов W_0, W_1, ..., W_m свободной полугруппы S_2, что

$W_0 = A$, $W_m = B$ и для любого $0 \leq i < m$ существуют в S_2 такие слова X_1 и X_2, что $W_i = X_1A_iX_2$ и $W_{i+1} = X_1B_iX_2$.

Для единообразия рассуждений, можно считать, что $m \geq 2$.

Полагаем $X_0 = W_1c\ldots cW_{m-1}$. Нетрудно понять, что на свободной полугруппе S_ω истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0 \neq ycaz \,\&\, cAcX_0 \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

Поэтому на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$.

Для доказательства обратного предположим, что на полугруппе S_ω истинна формула $\Phi_S(A, B)$. Выберем в полугруппе S_ω такое слово X_0 наименьшей возможной длины, что на S_ω истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0 \neq ycaz \,\&\, cAcX_0 \neq ycbz) \vee \\ \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

Нетрудно понять, что слово X_0 не может быть пустым.

Построим цепочку элементарных преобразований для полугруппы S:

$$A = W_0 \to W_1 \to \ldots \to W_m = B,$$

ведущую о слова A к слову B.

Полагаем $W_0 = A$.

Взяв в качестве y пустое слово, получим, что для некоторых слов X_1, X_2 и X_3 и некоторого j $(1 \leq j \leq 2n)$ выполняется равенство

$$cAcX_0cBc = cX_1A_jX_2cX_1B_jX_2cX_3.$$

Если слово X_1 содержит буквы, отличные от a и b, то слово A является его началом и для некоторого слова X_0' выполняется равенство

$$cAcX_0'cBc = cX_1B_jX_2cX_3$$

и истинна формула

$$(\forall y)(\forall z)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)((cAcX_0' \neq ycaz \,\&\, cAcX_0 \neq ycbz) \vee \vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = ycx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

что противоречит предположению о минимальности длины слова X_0. Значит X_0 не содержит букв отличных от a и b. Но тогда для некоторых слов X_2' и X_2'' выполняются равенства

$$X_2 = X_2'X_2'' \,\&\, A = X_1A_jX_2'.$$

Полагаем $W_1 = X_1B_jX_2'$.

Для построения слова W_2 берем в качестве слова y слово $cX_1A_jX_2'$ и аналогичное рассуждение дает преобразование

$$X_1B_jX_2' = W_1 \to W_2.$$

В результате получаем цепочку элементарных преобразований для полугруппы S:

$$A = W_0 \to W_1 \to \ldots \to W_m = B,$$

ведущую о слова A к слову B.

$\square$

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, получим

Теорема 2. *Элементарная $\exists\forall^2\exists^3$-теория свободной полугруппы S_ω счетного ранга алгоритмически неразрешима.*

Рассматриваемую в приведенных доказательствах формулу $\Phi_S(A, B)$ можно привести к виду

$$(\exists x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall y_3)(\forall y_4)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(u \neq v \vee w_1 = w_2),$$

т.е. виду

$$(\exists x)(\forall y_1)(\forall y_2)(\forall y_3)(\forall y_4)(\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(\exists x_4)(\exists x_5)(u \to v \to w_1 = w_2).$$

4. Формулы с ограниченными кванторами на свободных полугруппах

В ряде работ на полугруппе S_m рассматриваются два отношения частичного порядка $\leq$ и $\subseteq$, определяемые естественным образом

для произвольных элементов X и Y полугруппы S_m:

$$X \leq Y \iff \text{существует такой элемент } Z \text{ полугруппы } S_m\text{, что } Y = XZ;$$
$$X \subseteq Y \iff \text{существуют такие элементы } U \text{ и } Z \text{ полугруппы } S_m\text{, что } Y = UXZ.$$

Это позволяет рассматривать формулы с ограниченными кванторами вида $(Qz)_{z\leq t}$ и $(Qz)_{z\subseteq t}$, где Q — это $\forall$ или $\exists$, а t — слово от переменных и образующих полугруппы S_m, не содержащее переменной z.

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle\, a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \,\rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу $\Phi'_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z\leq cXcx}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cXcxcYc}$$
$$(cXcxcYc = zax_1 \vee cXcxcYc = zbx_1 \vee cXcxcYc = zcYc \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1 \leq j \leq n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Лемма 2. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ *на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$.*

Доказательство. Предположим, что *слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S* (равны в полугруппе S). Тогда существует такое натуральное число m и такая последовательность слов W_0, W_1, ..., W_m свободной полугруппы S_2, что

$$W_0 = A, \quad W_m = B \quad \text{и для любого } 0 \leq i < m \text{ существуют в } S_2$$
$$\text{такие слова } X_1 \text{ и } X_2,$$
$$\text{что } W_i = X_1A_iX_2 \text{ и } W_{i+1} = X_1B_iX_2.$$

Полагаем $X_0 = cAcW_1c\ldots cW_{m-1}$. Нетрудно понять, что на свободной полугруппе S_3 истинна формула

$$(\forall z)_{z\leq cAcX_0}(\exists x_1)_{x_1\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_2)_{x_2\subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_3)_{x_3\subseteq cAcX_0cBc}$$
$$(cAcX_0cBc = zax_1 \vee cAcX_0cBc = zbx_1 \vee cAcX_0cBc = zcBc \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).$$

Поэтому на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$.

Для доказательства обратного предположим, что на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi'_S(A,B)$. Выберем в полугруппе S_3 такое слово X_0, что на S_3 истинна формула

$$(\forall z)_{z \leq cAcX_0}(\exists x_1)_{x_1 \subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_2)_{x_2 \subseteq cAcX_0cBc}(\exists x_3)_{x_3 \subseteq cAcX_0cBc}$$
$$(cAcX_0cBc = zax_1 \vee cAcX_0cBc = zbx_1 \vee cAcX_0cBc = zcBc \vee$$
$$\vee \bigvee_{i=1}^{2n} cAcX_0cBc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3).$$

Существует такое натуральное число m, такие слова $W_m = A$, W_{m-1}, ..., W_1 и $W_0 = B$ полугруппы S_2 и такие натуральные числа $\alpha_0 = 1$, α_1, ..., α_m и $\alpha_{m+1} = 1$, что

$$cAcX_0cBc = cW_mc^{\alpha_m}W_{m-1}c^{\alpha_{m-1}}W_{m-2}c^{\alpha_{m-3}}\dots c^{\alpha_2}W_1c^{\alpha_1}W_0c.$$

Индукцией по t докажем, что W_t равно W_0 в полугруппе S. Предположим, что $m \geq t > 0$ и при любом $t > i \geq 0$: W_i равно W_0 в полугруппе S.

Полагаем: при $t < m$ Z_0 — это слово

$$cW_mc^{\alpha_m}W_{m-1}c^{\alpha_{m-1}}W_{m-2}c^{\alpha_{m-3}}\dots c^{\alpha_{t+3}}W_{t+2}c^{\alpha_{t+2}}W_{t+1}c^{\alpha_{t+1}-1},$$

а при $t = m$ Z_0 — это пустое слово. Тогда для некоторого слова U в свободной полугруппе S_3 выполнено равенство $cAcX_0cBc = Z_0cU$. Поэтому существуют такие слова X_1, X_2 и X_3, что выполняется равенство

$$cAcX_0cBc = Z_0cX_1A_iX_2cX_1B_iX_2cX_3 = Z_0cW_tc^{\alpha_t}\dots c^{\alpha_2}W_1c^{\alpha_1}W_0c.$$

1) Если в слова X_1 и X_2 не входит буква c (они элементы полугруппы S_2), то

$$W_t = X_1A_iX_2 \text{ и } W_{t-1} = X_1B_iX_2.$$

Тогда W_t равно W_{t-1} в полугруппе S, а по индуктивному предположению W_{t-1} равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

2) Если в слово X_1 входит буква c, то существует такое слово X_{1r} полугруппы S_3, что

$$cX_1 = cW_tcX_{1r}.$$

Поэтому существует $j < t$ такое, что $W_t = W_j$. По индуктивному предположению W_j равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

3) Предположим, что буква c не входит в слово X_1, но входит в слово X_2. В этом случае существует такое слово X_{2l} полугруппы S_2 и такое слово X_{2r} полугруппы S_3, что

$$X_2 = X_{2l}cX_{2r}, \quad cW_tc = cX_1A_iX_{2l}c \quad W_t = X_1A_iX_{2l}.$$

Существует $j < t$ такое, что $cX_1B_iX_{2l}c = cW_jc$. Значит $X_1B_iX_{2l} = W_j$. По индуктивному предположению W_j равно W_0 в полугруппе S. Значит W_t равно W_0 в полугруппе S.

□

Для удаления из формулы знака дизъюнкции $\vee$ воспользуемся обозначениями и результатами работы [7]. Следуя этой работе полагаем для произвольного слова w $\langle w\rangle = wawb$. В цитируемой работе доказана эквивалентность для произвольной полугруппы S_m $(m \geq 2)$

$$\bigvee_{i=1}^{n} W = W_i \iff (\exists Z)(\exists Z')U = ZVZ',$$
$$\text{где } v = WW_1\dots W_n, \quad V = \langle v\rangle^2W\langle v\rangle^2, \quad U = \langle v\rangle^2W_1\langle v\rangle^2W_2\langle v\rangle^2\dots\langle v\rangle^2W_n\langle v\rangle^2.$$

Легко видеть, что $Z, Z' \subseteq U$. Это дает возможность по формуле $\Phi'_S(X,Y)$ построить формулу $\Phi_S(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{z \le t}(\exists x_1)_{x_1 \subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2 \subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3 \subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4 \subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5 \subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ на полугруппе S_3 истинна формула $\Phi_S(A,B)$.

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы $\Phi_S(X)$ — формулу $\Phi_S(X,B)$, получим

Теорема 3. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул $\Phi_S(X)$ с параметром X вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{z \le t}(\exists x_1)_{x_1 \subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2 \subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3 \subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4 \subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5 \subseteq t_2}$$
$$w(X, x, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b, c) = u(X, x, z, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a, b, c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_3 позитивная формула $\Phi_S(A)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

По произвольной конечно определенной полугруппе

$$S = \langle a, b \,|\, A_1 = B_1, \ldots, A_n = B_n \rangle$$

без пустых определяющих слов построим формулу ${\Phi'_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc \le cXcx}(\exists x_1)_{x_1 \subseteq cXcxcYc}(\exists x_2)_{x_2 \subseteq cXcxcYc}(\exists x_3)_{x_3 \subseteq cXcxcYc}$$
$$(\bigvee_{i=1}^{2n} cXcxcYc = zcx_1A_ix_2cx_1B_ix_2cx_3),$$

где при любом $1 \le j \le n$: $A_{n+j} = B_j$ и $B_{n+j} = A_j$.

Доказательство следующей леммы проходит по той же схеме, что и доказательство лемм 2 и 1.

Лемма 3. *Для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность*

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\iff$ *на полугруппе S_ω истинна формула ${\Phi'_S}^{\omega}(A,B)$.*

По той же схеме, что и выше, из формулы ${\Phi'_S}^{\omega}(A,B)$ удаляем знак дизъюнкции $\vee$. Получим формулу ${\Phi_S}^{\omega}(X,Y)$ вида

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2} w = v,$$
$$\text{где } t = cXcx,\ t_1 = cXcxcYc,\ t_2 = U$$

такую, что для произвольных непустых слов A и B в алфавите образующих полугруппы S справедлива эквивалентность

слова A и B задают один и тот же элемент полугруппы S

$\Longleftrightarrow$ *на полугруппе S_ω истинна формула ${\Phi_S}^{\omega}(A,B)$.*

Взяв в качестве полугруппы S полугруппу с непустыми определяющими словами и с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства непустому слову B, а в качестве формулы ${\Phi_S}^{\omega}(X)$ — формулу ${\Phi_S}^{\omega}(X,B)$, получим

Теорема 4. *Можно построить такое однопараметрическое семейство формул ${\Phi_S}^{\omega}(X)$ с параметром X вида*

$$(\exists x)(\forall z)_{zc\le t}(\exists x_1)_{x_1\subseteq t_1}(\exists x_2)_{x_2\subseteq t_1}(\exists x_3)_{x_3\subseteq t_1}(\exists x_4)_{x_4\subseteq t_2}(\exists x_5)_{x_5\subseteq t_2}$$
$$w(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c) = u(X,x,z,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,a,b,c),$$

что невозможно создать алгоритм, позволяющий по произвольному слову A, элементу свободной полугруппы S_2, определить, истинна ли на свободной полугруппе S_ω позитивная формула ${\Phi_S}^{\omega}(A)$.

Заметим, что в рассматриваемых формулах только один неограниченный квантор $\exists$, а *вопрос об истинности на произвольной свободной полугруппе S_m формул, в кванторных приставках которых все кванторы ограниченные, и произвольной бескванторной частью алгоритмически разрешим.*

Выше рассматривались формулы, содержащие в виде констант образующие элементы свободных полугрупп (формулы с константами) и основное внимание уделялось возможности упрощения кванторной приставки и бескванторной части путем удаления пропозициональных связок, с сохранением алгоритмической неразрешимости.

Естественно возникает вопрос о возможности удаления констант из бескванторной части формул. Интересные результаты в этом направлении получил Перязев Н.А.: в работе [18] и в ряде других своих работ он доказал, в частности, что при $2 \le n < m$ *позитивные теории свободных моноидов S_n и S_m (свободных полугрупп с единицей) в сигнатуре $\langle \cdot, 1, a_1, \ldots, a_{n-2}\rangle$ совпадают,*

при $n \ge 2$ *позитивная теория $Th^+(S_n)$ свободного моноида S_n (свободной полугруппы с единицей) в сигнатуре $\langle \cdot, 1, a_1, \ldots, a_{n-2}\rangle$ алгоритмически разрешима, а в сигнатуре $\langle \cdot, 1, a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle$ алгоритмически неразрешима.*

В частности это означает, что *позитивная формула Φ без констант, т.е. имеющая вид*

$$(Q_1\, x_1)(Q_2\, x_2)\ldots(Q_m\, x_m) \bigvee_{i=1}^{k} \big(\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(x_1,\ldots,x_m) = u_{ij}(x_1,\ldots,x_m)\big).$$

истинна на свободном моноиде S_2 (свободной полугруппе с единицей) тогда и только тогда, когда она истинна на любом свободном моноиде S_n $(n \ge 2)$,

позитивная формула Φ без констант истинна на свободном моноиде S_2 тогда и только тогда, когда она истинна на счетнопорожденном свободном моноиде S_ω, *при любом n позитивная теория без констант свободного моноида S_n алгоритмически разрешима.*

Однако *при удалении из бескванторной части формул констант усложняется кванторная приставка*, а при $n = 2$ *нельзя удалить конъюнкцию* & *и дизъюнкцию* $\vee$ (без использования двух констант).

Нетрудно понять, что справедлива следующая эквивалентность:
позитивная формула Φ *с одной константой, имеющая вид*

$$(\forall x)(\exists x_1)(\exists x_2)\dots(\exists x_m) \bigvee_{i=1}^{k} (\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(x, x_1, \dots, x_m, a) = u_{ij}(x, x_1, \dots, x_m, a)),$$

истинна на свободном моноиде S_2 тогда и только тогда, когда на нем истинна формула

$$\bigvee_{i=1}^{k} (\mathop{\&}_{j\in A_i} w_{ij}(b, x_1, \dots, x_m, a) = u_{ij}(b, x_1, \dots, x_m, a)).$$

Так как по теореме Г.С. Маканина [9] последний вопрос алгоритмически разрешим, то *позитивная $\forall\exists^m$-теория с одной константой свободного моноида S_2 алгоритмически разрешима при любом m.*

Интересно сравнить этот факт с *алгоритмической неразрешимостью позитивной $\forall\exists^3$-теории с двумя константами свободного моноида S_2* [5].

5. Заключение

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость $\exists\forall^2\exists^3$-теории свободной полугруппы счетного ранга, алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall\exists^5$-теории свободной полугруппы ранга 2 с бескванторной частью “простейшего” вида $w = u$ и алгоритмическая неразрешимость позитивной $\exists\forall_{\leq}\exists^5_{\subseteq}$-теории свободной полугруппы ранга 3 с с бескванторной частью “простейшего” вида $w = u$.

Поэтому, на наш взгляд, представляет интерес вопрос об алгоритмической разрешимости $\exists\forall\exists^3$-теории и $\forall^2\exists^3$-теории свободной полугруппы счетного ранга и об алгоритмической разрешимости позитивной $\exists\forall\exists^2$-теории $\exists^2\forall\exists$-теории свободных полугрупп ранга 2 и 3. Заметим, что при любых m и p позитивная $\exists^m\forall^p$-теория любой свободной полугруппы алгоритмически разрешима.

Формула $(\forall x)(\exists y)(xx = x \vee x = ay \vee x = by)$ истинна на свободном моноиде S_2, но ложна на свободном моноиде S_3. Удалив знак дизъюнкции $\vee$, получим формулу вида

$$(\forall x)(\exists y)(\exists y_1)(\exists y_2)w(x, y, y_1, y_2, a, b) = u(x, y, y_1, y_2, a, b),$$

истинную на свободном моноиде S_2, но ложную на свободном моноиде S_3.

Возникает вопрос, *можно ли построить формулу вида*

$$(\forall x)(\exists y)(\exists y_1)w(x, y, y_1, a, b) = u(x, y, y_1, a, b),$$

истинную на свободном моноиде S_2, но ложную на свободном моноиде S_3?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Quine W. Concatenation as a basis for arithmetic // J. Symbolic Logic. 1946. V. 11. P. 105-114.

2. Дурнев В. Г. О позитивной теории свободной полугруппы // В сб.: Вопросы теории групп и полугрупп. Тула: Тульск. гос. пед. ин-т. имени Л.Н. Толстого. 1972. С.122-172.

3. Дурнев В. Г. Позитивная теория свободной полугруппы // ДАН СССР. 1973. Том 211, № 4. С. 772-774.

4. Марченков С. С. Неразрешимость позитивной $\forall\exists$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1982. Том 23, № 1. С. 196-198.

5. Дурнев В. Г. Неразрешимость позитивной $\forall\exists^3$-теории свободной полугруппы // Сиб. матем. журн. 1995. Том 36 № 5. С. 1067-1080.

6. Косовский Н. К. Элементы математической логики и ее приложения к теории субрекурсивных алгоритмов. Ленинград: Изд-во. ЛГУ, 1981. 192 с.

7. Karhumaki J., Mignosi F., Plandowski W. On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables // Bull. Belg. Math. Soc. 2001. Vol. 8, № 2. P. 293-303.

8. Lothaire M. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge Univ. Press. 2002. 504 p.

9. Маканин Г. С. Проблема разрешимости уравнений в свободной полугруппе / Математический сборник. 1977. Том 103(145), № (6). С. 147-236.

10. Тайманов А. Д., Хмелевский Ю.И. Разрешимость универсальной теории свободной полугруппы / Сиб. матем. журн. 1980. Том 21, № 1. С. 228-230.

11. Мерзляков Ю.И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Том 5, вып. 4. С. 25-42.

12. Важенин Ю.М., Розенблат Б.В. Разрешимость позитивной теории счетнопорожденной полугруппы // Матем. сборник. 1981. 116(158):1(9). С. 120-127.

13. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы / Изв. АН СССР. Серия матем. 1984. № 2. С. 735-749.

14. Новиков П.С. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп // Труды МИАН. 1955. Том 44.

15. Борисов В.В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Матем. заметки. 1969. Том 6, вып. 5. С. 521-532.

16. Матиясевич Ю.В. Простые примеры неразрешимых ассоциативных исчислений // Докл. АН СССР. 1967. Том 173, № 6. С. 1264-1266.

17. Schulz Klaus U. Makanin's Algorithm — Two Improvements and a generalization // Habilitationsschrift. Wilhelm-Schickard-Institut fur Informatik. 1990. 106 p.

18. Перязев Н.А. О позитивной эквивалентности свободных полугрупп. Иркутск, изд-во. Иркутского ВЦ СО АН СССР. 1986.14 с.

REFERENCES

1. Quine W. 1946, "Concatenation as a basis for arithmetic.", textitJ. Symbolic Logic., vol. 11, pp. 105–114.

2. Durnev, V. G. 1972, "The positive theory of a free semi-ussian).

3. Durnev, V. G. 1973, "A positive theory of a free semi-group", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 211, no. 4, pp. 772–774 (in Russian).

4. Marchenkov, S. S. 1982,"Unsolvability of positive $\forall\exists$-theory of free semi-group", *Siberian Math. J.*, vol. 23, no. 1, pp. 196–198 (in Russian).

5. Durnev, V. G. 1995, "Undecidability of the positive $\forall\exists^3$-theory of a free semi-group", *Siberian Math. J.*, vol. 36, no. 5, pp. 917–929.

6. Kosovsky, N. K. 1981, *Elements of Mathematical Logic and Its Application to the Theory of Subrecursive Algorithms*, LSU Publ., Leningrad, 192 pp. (in Russian).

7. Yu. M. Vazhenin, Yu. M. and Rozenblat, B. V. 1983, "Decidability of the positive theory of a free countably generated semigroup", *Math. USSR-Sb.*, vol. 44, no. 1, pp. 109–116.

8. Merzlyakov, Yu. I. 1966, "Positive formulae over free groups", *Algebr Logic*, vol. 5, no. 4, pp. 25-42 (in Russian).

9. Schulz, K. U. 1990, "Makanin's Algorithm — Two Improvements and a generalization", in: *Word Equations and Related Topics. IWWERT 1990. Lecture Notes in Computer Science*, ed. by Schulz K.U., vol. 572. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 85-150.

10. Lothaire, M. 2002, *Algebraic Combinatorics on Words.* Cambridge Univ. Press. 2002. 504 pp.

11. Karhumaki, J., Mignosi, F., and Plandowski W. 2001, "On the expressibility of languages by word equations with a bounded number of variables", *Bull. Belg. Math. Soc.*, vol. 8, no 2, pp. 293–303.

12. Makanin, G. S. 1977, "The problem of solvability of equations in a free semigroup", *Math. USSR-Sb.*, vol. 32, no. 2, pp. 129-198

13. Novikov, P. S. 1958, "Algorithmic Unsolvability of the Word Problem in Group Theory", *J. Symb. Logic*, vol. 23, no. 1, pp. 50-52.

14. Borisov, V. V. 1969, "Simple examples of groups with unsolvable word problem", *Math. Notes*, vol. 6, no. 5, pp. 768–775.

15. Matiyasevich, Yu. V. 1967, "Simple examples of undecidable associative calculi", *Soviet Math. Dokl.* vol. 8 pp. 555–557.

16. Taimanov, A. D. and Hmelevskii, Ju. I., 1980, "Decidability of the universal theory of a free semigroup", *Siberian Math. J.*, vol. 21, no. 1, pp. 228–230 (in Russian).

17. Makanin, G. S., 1985, "Decidability of the universal and positive theories of a free group", *Math. USSR Izv.*, vol. 25, no. 1, pp. 75-88.

18. Peryazev, N.A. On positive equivalence of free semi-groups. Irkutsk. Publishing House of Irkutsk VC SO Academy of Sciences of the USSR. 1986. 14 p.

Получено 24.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.