ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-45-55

Новые границы алгебраической константы Никольского¹

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).

e-mail: dvgtail@mail.ru

Иван Анатольевич Мартьянов — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Пусть $M_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in [-1,1]} |P(x)|}{\int_{-1}^1 |P(x)| dx}$ — константа Никольского между равномерной и интегральной нормами для алгебраических полиномов с комплексными коэффициентами степени не выше n . D. Amir и Z. Ziegler (1976) доказали, что $0.125(n+1)^2 \leq M_n \leq 0.5(n+1)^2$ для $n \geq 0$. Аналогичная оценка сверху получена Т.К. Но (1976). F. Dai, D. Gorbachev и S. Tikhonov (2019–2020) уточнили этот результат, установив, что $M_n = Mn^2 + o(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$, где $M \in (0.141, 0.192)$ — точная константа Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ и функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$.

Мы доказываем, что для произвольного $n \geq 0$ имеем $M(n+1)^2 \leq M_n \leq M(n+2)^2$, где $M \in (0.1410, 0.1411)$. Данное утверждение также позволяет уточнить точную константу Джексона–Никольского для полиномов на евклидовой сфере $\mathbb{S}^2$. Доказательство базируется на взаимосвязи алгебраических констант Никольского с тригонометрическими константами Бернштейна–Никольского и наших результатах об оценках последних (2018–2019). Также мы применяем характеристику экстремального алгебраического полинома, полученную D. Amir и Z. Ziegler (1976), В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой (2015). С помощью этой характеристики мы составляем тригонометрическую систему для определения нулей экстремального полинома, которую решаем приближенно с необходимой точностью с помощью метода Ньютона.

Ключевые слова: алгебраический полином, тригонометрический полином, константа Никольского, неравенство Бернштейна.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Новые границы алгебраической константы Никольского // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 45–55.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-45-55

Novel bounds of algebraic Nikol'skii constant²

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Tula State University (Yekaterinburg, Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivan Anatol'evich Martyanov — Graduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: martyanov.ivan@yandex.ru

Abstract

Let $M_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|}{\int_{-1}^1 |P(x)| dx}$ be the Nikol'skii constant between the uniform and integral norms for algebraic polynomials with complex coefficients of degree at most n . D. Amir and Z. Ziegler (1976) proved that $0.125(n+1)^2 \leq M_n \leq 0.5(n+1)^2$ for $n \geq 0$. The same upper bound was obtained by T.K. Ho (1976). F. Dai, D. Gorbachev, and S. Tikhonov (2019–2020) refined this result by establishing that $M_n = Mn^2 + o(n^2)$ for $n \rightarrow \infty$, where $M \in (0.141, 0.192)$ is the sharp Nikol'skii constant for entire functions of exponential spherical type in the space $L^1(\mathbb{R}^2)$ and functions of exponential type in $L^1(\mathbb{R})$ with weight $|x|$.

We prove that for arbitrary $n \geq 0$ one has $M(n+1)^2 \leq M_n \leq M(n+2)^2$, where $M \in (0.1410, 0.1411)$. This statement also allows us to refine the exact Jackson–Nikol'skii constant for polynomials on the Euclidean sphere $\mathbb{S}^2$. The proof is based on the relationship between the algebraic Nikol'skii constants and the Bernstein–Nikol'skii trigonometric constants and our estimates of these constants (2018–2019). We also apply the characterization of the extremal algebraic polynomial obtained by D. Amir and Z. Ziegler (1976), V.V. Arestov and M.V. Deikalova (2015). Using this characterization, we compose a trigonometric system for determining the zeros of an extremal polynomial, which we solve approximately with the required accuracy using Newton's method.

Keywords: algebraic polynomial, trigonometric polynomial, the Nikolskii constant, the Bernstein inequality.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. 2020, "Novel bounds of algebraic Nikol'skii constant", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 45–55.

1. Введение

Пусть $0 < p \leq \infty$, $Q \subset \mathbb{R}$, $L^p(Q)$ — пространство Лебега функций $f: Q \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_Q |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in Q} |f(x)|, & p = \infty, \end{cases}$$

$\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

²This Research was performed by a grant of Russian Science Foundation (project 18-11-00199).

Для алгебраических полиномов известно следующее неравенство Никольского (см., например, [24, 5.3.1]). Пусть $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p[-1,1]}$, тогда для произвольного полинома $P \in \mathcal{P}_n$

$$\|P\|_q \leq ((p+1)n^2)^{1/p-1/q} \|P\|_p, \quad 1 \leq p < q \leq \infty. \quad (1)$$

Это неравенство точно по порядку при $n \rightarrow \infty$, однако точная константа в нем по нашим сведениям известна только при $(p, q) = (2, \infty)$ (см. [24, 6.1.8]).

Некоторые авторы, например, [18, 16], неравенства типа (1) называют неравенствами Маркова–Никольского, так как А.А. Марков еще в позапрошлом веке доказал точное неравенство для производной полинома $\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty$, которое затем было обобщено его братом В.А. Марков на старшие производные. Впоследствии многими авторами эти неравенства интенсивно обобщались в разных направлениях [19, глава 6].

При $q = \infty$ неравенство вида (1) доказано Д. Джексоном [22]. Обзоры результатов и историю вопроса см., например, в [24, 14], а также в [17, 16], где даны многомерные обобщения. Разные порядковые результаты в данной проблематике см. в [10, 7].

Мы рассмотрим задачу о точной константе Никольского в неравенстве (1) для случая $(p, q) = (1, \infty)$, который имеет богатую историю. Положим

$$M_n = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_1}. \quad (2)$$

Ясно, что $M_0 = 1/2$.

Неравенство (1) влечет $M_n \leq 2n^2$. Наилучшие известные нам двусторонние оценки M_n получены D. Amir, Z. Ziegler [12]: для $n \geq 0$

$$0.5(n+1)^2 \geq M_n \geq 0.125 \begin{cases} (n+2)^2, & n \text{ четное,} \\ (n+1)(n+3), & n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (3)$$

Аналогичная оценка сверху получена Т.К. Но (см. [19, 5.3.1]).

В работах [18, 14] установлено, что существует константа M , такая что

$$M_n = Mn^2 + o(n^2), \quad n \rightarrow \infty.$$

причем M одновременно является точной константой Никольского для целых функций экспоненциального сферического типа в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$ и функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$ [17, 15]. Данный результат лежит в контексте исследований из работ [23, 20, 18, 5, 6], посвященных асимптотической связи между константами Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа.

Кроме того, в работе [16] доказано, что

$$0.141 < M < 0.192, \quad (4)$$

что лучше границ (3).

Из результатов работ [12] и [13] вытекает следующее предложение, характеризующее экстремальный полином в задаче (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 ([12, 12]). Пусть $n \geq 1$.

(i) *Имеем*

$$M_n = \sup_{\substack{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\} \\ P \text{ действительный}}} \frac{P(1)}{\|P\|_1}.$$

(ii) Существует единственный экстремальный полином $\rho_n \in \mathcal{P}_n$ с единичным старшим коэффициентом, такой что

$$M_n = \frac{\rho_n(1)}{\|\rho_n\|_1}.$$

(iii) Знак $\text{sign } \rho_n$ полинома ρ_n обладает свойством ортогональности

$$\int_{-1}^1 Q(x) \text{sign } \rho_n(x) (1-x) dx = 0, \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{n-1}$$

и

$$M_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 \text{sign } \rho_n(x) dx}.$$

(iv) Полином ρ_n имеет вид

$$\rho_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \quad -1 < x_1 < \dots < x_n < 1.$$

(v) Нули полиномов ρ_n и ρ_{n+1} перемежаются.

(vi) Имеем

$$\rho_n = \underset{\substack{P(x)=x^n+Q(x) \\ Q \in \mathcal{P}_{n-1}}}{\text{argmin}} \int_{-1}^1 |P(x)| (1-x) dx.$$

Из этого предложения следует, что задачи о константе Джексона–Никольского и Чебышева о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля в пространстве $L^1[-1, 1]$ с весом $1-x$, эквивалентны. В разделе 2 будет приведена связь констант M_n и M с точными константами Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа.

Сформулируем основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Для всех $n \in \mathbb{Z}_+$

$$M(n+1)^2 \leq M_n \leq M(n+2)^2, \quad (5)$$

где

$$0.1410 < M < 0.1411. \quad (6)$$

Как пример заметим, что из $M_0 = 1/2$ и (5) вытекают оценки $0.125 \leq M \leq 0.5$ и

$$0.125(n+1)^2 \leq M_n \leq 0.5(n+2)^2,$$

ср. с (3). Также простые вычисления показывают, что $M_1 = \frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}$ (см. раздел 3). Отсюда $0.134 < M < 0.302$.

Теорему 1 полезно сравнить с соответствующим тригонометрическим неравенством Джексона–Никольского. Пусть $\mathcal{T}_n$ — множество 2π -периодических комплекснозначных полиномов степени не выше n и

$$C_n = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T\|_{L^\infty(-\pi, \pi)}}{\|T\|_{L^1(-\pi, \pi)}}.$$

Простое аналитическое выражение для константы C_n также как и для M_n неизвестно. Я.Л. Геронимус [3] выразил C_n через корень функционального определителя. На алгебраический случай с весом Чебышева этот результат переносился в работе [25]. Однако утверждения

типа Геронимуса остаются малоисследованными и, например, известные оценки C_n получены другими методами. В частности, Д. Джексон [22] с помощью неравенства Бернштейна $\|T'\|_\infty \leq n\|T\|_\infty$ для тригонометрических полиномов степени n доказал, что $C_n \leq 2n$. В работе [26] получены неравенства

$$\frac{n}{2\pi} \leq C_n \leq \frac{2n+1}{2\pi}, \quad (7)$$

Верхняя оценка ранее была доказана в [8].

С.Б. Стечкин показал, что существует константа $L > 0$, такая что

$$C_n = Ln + o(n), \quad n \rightarrow \infty$$

(устное сообщение, см. [11]). Л.В. Тайков [11] доказал результат Стечкина с остаточным членом $O(1)$ и показал, что $L \in (0.171, 0.186)$. Это сильнее границ $L \in (0.159, 0.319)$, вытекающих из (7).

Сейчас указанные оценки улучшены. В работе [4] доказан тригонометрический аналог теоремы 1

$$Ln \leq C_n \leq L(n+1), \quad n \geq 0,$$

показано, что L является точной константой в неравенстве для целых функций экспоненциального типа, установлена связь L с константой Конягина для преобразования Фурье из [1, 2] и даны границы $L \in (0.172, 0.175)$. Наконец, в работе [21] установлено, что $L \approx 0.172182$ (ср. с [5]). Вычисление точного значения L является открытой проблемой.

Задача о нахождении константы L и родственные ей в терминах преобразования Фурье имеют интересные приложения в теории чисел (см. [15]). Д. Джексон [22] использовал C_n , M_n и их аналоги для норм L^p в оценках наилучшего приближения функции в метрике L^∞ посредством метрик L^p и L^∞ .

2. Связь с константами Бернштейна–Никольского

Для доказательства неравенств (5) нам потребуются результаты из [6] и заметки [7], где исправлена одна неточность из работы [6]. Пусть $\sigma > 0$, $\mathcal{E}_\sigma$ — множество целых функций экспоненциального типа не больше σ . Напомним, что для $F \in \mathcal{E}_\sigma$ имеем $F(z) = O(e^{(\sigma+\varepsilon)|z|})$ для $\forall z \in \mathbb{C}$ и $\forall \varepsilon > 0$.

Через

$$\tilde{C}_n = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T'\|_{L^\infty(-\pi, \pi)}}{\|T\|_{L^1(-\pi, \pi)}}, \quad \tilde{L} = \sup_{F \in \mathcal{E}_1 \cap L^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|F'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{\|F\|_{L^1(\mathbb{R})}}$$

обозначим точные константы Бернштейна–Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа соответственно (штрих обозначает производную). Для функций типа не выше σ в силу однородности наилучшей константой будет $\sigma^2 \tilde{L}$.

Из результатов [7], [6] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$.

(i) Найдутся нечетные экстремальные полином $\tilde{T}_n \in \mathcal{T}_n$ и функция $\tilde{F} \in \mathcal{E}_1$, такие что $\|\tilde{T}_n\|_1 = \|\tilde{F}\|_1 = 1$ (нормы берутся в соответствующем пространстве L^1) и $\tilde{C}_n = \tilde{T}'_n(0)$, $\tilde{L} = \tilde{F}'(0)$.

(ii) Для всех $n \geq 1$ имеем

$$n^2 \tilde{L} \leq \tilde{C}_n \leq (n+1)^2 \tilde{L}.$$

Установим взаимосвязь между M_n , M и $\tilde{C}_n$, $\tilde{L}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $n \geq 0$. Полином $P_n^* \in \mathcal{P}_n$, такой что

$$\tilde{T}_{n+1}(\theta) = \sin \theta P_n^*(\cos \theta),$$

является экстремальным для M_n и

$$M_n = 2\tilde{C}_{n+1}.$$

Из предложений 5 и 4 (ii) немедленно следует, что $M = 2\tilde{L}$ и справедливы искомые неравенства (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — экстремальный алгебраический полином для M_n степени n , такой что $M_n = \frac{P(1)}{\|P\|_1}$ (см. предложения 3). Как часто в таких вопросах, сделаем тригонометрическую замену переменного $x = \cos \theta$ в интеграле

$$\|P\|_1 = \int_{-1}^1 |P(x)| dx = \int_0^\pi |P(\cos \theta)| \sin \theta d\theta = \int_0^\pi |T(\theta)| d\theta = 2^{-1} \|T\|_{L^1(-\pi, \pi)},$$

где $T(\theta) = \sin \theta P(\cos \theta)$ — нечетный тригонометрический полином степени $n+1$. При этом $T'(0) = P(1)$, следовательно,

$$M_n = \frac{P(1)}{\|P\|_1} = 2 \frac{T'(0)}{\|T\|_1} \leq 2\tilde{C}_{n+1}. \quad (8)$$

С другой стороны, нечетный экстремальный тригонометрический полином $\tilde{T}_{n+1}$ представляется в виде

$$\tilde{T}_{n+1}(\theta) = \sum_{k=1}^{n+1} b_k \sin k\theta = \sin \theta \sum_{k=0}^n b_{k+1} \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} = \sin \theta P(\cos \theta),$$

где P — алгебраический полином степени n , поэтому в (8) будет равенство. Предложение доказано. $\square$

3. Доказательство оценок (6)

Из теоремы 1 (1) имеем

$$\frac{M_n}{(n+2)^2} \leq M \leq \frac{M_n}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0.$$

Таким образом, двусторонние оценки константы M могут быть получены приближенным вычислением констант M_n с необходимой точностью для достаточно больших n . В [12] для вычисления M_n выписана система полиномиальных уравнений, вытекающая из предложения 3. Для этого свойство ортогональности (iii) применяется к базисным полиномам $\{(1-x)^{j-1}\}_{j=1}^n$. Тогда для нулей $-1 < x_1 < \dots < x_n < 1$ экстремального полинома ρ_n получаем

$$\sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (1-x)^j dx = 0,$$

где $x_0 = -1$, $x_{n+1} = 1$. Полагая $t_i = 2^{-1}(1 - x_{n-i+1})$, $0 < t_1 < \dots < t_n < 1$, приходим к системе полиномиальных уравнений [12]

$$2 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i^{j+1} + (-1)^n = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (9)$$

имеющей единственное решение в силу единственности экстремального полинома. При этом

$$M_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 \operatorname{sign} \rho_n(x) dx} = \frac{2^{-1}}{2 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} t_i + (-1)^n}.$$

При небольших n система (9) может быть эффективно решена при помощи метода Ньютона. При переходе от n к $n+1$ для выбора начального приближения можно использовать факт перемежаемости решений (см. предложение 3 (v)). Однако со все большим n появляется проблема переполнения вещественной арифметики. Действительно, достаточно сравнить определитель якобиана системы (9) с определителем Вандермонда

$$\det (t_i^{j-1})_{i,j=1}^n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t_j - t_i),$$

который экспоненциально мал от n в силу $t_j - t_i \in (0, 1)$. Поэтому требуется все большая точность вычислений, что приводит к резкому замедлению расчетов.

Для преодоления этой сложности сведем задачу к тригонометрической, делая стандартную подстановку $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Пусть

$$x_i = \cos \theta_{n-i+1}, \quad 0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < \pi, \quad \theta_i = \theta_{ni}.$$

Свойство ортогональности приобретает вид

$$\int_0^\pi T(\theta) \operatorname{sign} \rho_n(\cos \theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta = 0,$$

где T — произвольный четный тригонометрический полином порядка $n-1$. В качестве базисных полиномов T_j порядка $j-1 = 0, \dots, n-1$ выберем полиномы, для которых

$$T_j(\theta)(1 - \cos \theta) = 1 - \frac{\sin(j+1)\theta}{(j+1)\sin \theta}.$$

Тогда для θ_i получаем систему тригонометрических уравнений

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left(\sin \theta - \frac{\sin(j+1)\theta}{j+1} \right) d\theta = (-1)^n U_j(\pi) - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i U_j(\theta_i) = 0, \quad (10)$$

где $U_j(\theta) = 1 - \cos - \frac{1 - \cos(j+1)\theta}{(j+1)^2}$. Отметим, что для безвесовой тригонометрической константы Никольского схожая система имеется в работе [26]. Якобиан системы (10) легко вычисляется и можно вновь применить метод Ньютона. При этом

$$M_n = \frac{1}{1 + (-1)^n + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i \cos \theta_i}.$$

Для сходимости метода Ньютона важно выбрать начальное приближение. Было замечено, что наша оценка снизу константы M в (6) практически совпадает с нижней оценкой в (4). Как было сказано, M является точной константой Никольского для целых функций экспоненциального типа в $L^1(\mathbb{R})$ с весом $|x|$. В [16] для оценки снизу применялась функция Бесселя $x^{-5/2} J_{5/2}(x)$. Хорошо известно, что для полинома Якоби

$$n^{-\alpha} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\cos \frac{\theta}{n} \right) \sim \left(\frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha} J_\alpha(\theta), \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда было сделано предположение, что хорошим начальным приближением θ_{ni} могут быть нули $\theta_{ni}^{(5/2, 1/2)}$ косинус-полинома Якоби $P_n^{(5/2, 1/2)}(\cos \theta)$. Этот факт был подтвержден вычислениями, причем параметр $\beta = 1/2$ в каком-то смысле наилучший. Для нулей $\theta_{ni}^{(\alpha, \beta)}$ использовалась приближение L. Gatteschi

$$\theta_{ni}^{(\alpha, \beta)} \approx \frac{q_{\alpha i}}{\nu}, \quad \nu = \left(N^2 + \frac{1 - \alpha^2 - 3\beta^2}{12} \right)^{1/2}, \quad N = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2},$$

где $q_{\alpha 1} < q_{\alpha 2} < \dots$ — положительные нули функции Бесселя.

Вычисления проводились в среде Matlab, нули Бесселя были взяты из Maple. Вычислительные эксперименты показали, что тригонометрический подход позволяет эффективно вычислять θ_{ni} и M_n с нужной точностью для всех n порядка 10000, что связано с хорошей обусловленностью тригонометрического якобиана и удачным выбором начального приближения. Оценки (6) получены при $n = 16000$, в частности, имеем $\lg M_{16000} \approx 7.557790548$.

Отметим, что в работе [21] для приближенного вычисления безвесовой константы Никольского в пространстве $L^1(\mathbb{R})$ применялась функция Бесселя $x^{-3/2} J_{3/2}(x)$. Однако было показано, что эта функция не является экстремальной и проблема остается открытой, как и задача о вычислении M .

4. Заключение

В данной работе доказывается, что для алгебраической константы Никольского M_n справедливы границы $M(n+1)^2 \leq M_n \leq M(n+2)^2$, $n \geq 0$, где M — константа Никольского для целых функций экспоненциального типа принадлежит интервалу $M \in (0.1410, 0.1411)$. Данные результаты уточняет предыдущие оценки, полученные в работах D. Amir и Z. Ziegler, Т. К. Но, F. Dai, D. Gorbachev и S. Tikhonov. Данное утверждение также позволяет уточнить точную константу Джексона–Никольского для полиномов на евклидовой сфере S^2 .

Доказательство базируется на взаимосвязи алгебраических констант Никольского с тригонометрическими константами Бернштейна–Никольского и наших предыдущих результатах об оценках последних. Также мы применяем характеризацию экстремального алгебраического полинома, полученную D. Amir и Z. Ziegler, В.В. Арестовым и М.В. Дейкаловой. С помощью этой характеристики мы конструируем тригонометрическую систему для определения нулей экстремального полинома, которую решаем приближенно с необходимой точностью с помощью метода Ньютона. Наш подход может быть расширен и использован для оценок весовых констант Никольского.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Экстремальные задачи для функций с малым носителем // Матем. заметки. 1996. Том 60, № 3. С. 323–332; 2000. Том 68, № 3. С. 479–479.
2. Андреев Н.Н., Конягин С.В., Попов А.Ю. Письмо в редакцию // Матем. заметки. 2000. Том 68, № 3. С. 479.
3. Геронимус Я.Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Том 2, вып. 4. С. 445–456.
4. Горбачев Д.В. Интегральная задача Конягина и (C, L) -константы Никольского // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

5. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сб. 2018. Т. 19, № 2. С. 80–89.
6. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского-Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 143–153.
7. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Письмо в редакцию // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 3. С. 336–338.
8. Ибрагимов И.И. Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Том 121, № 3. С. 415–417.
9. Иванов В.И. Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Приближение функций полиномами и сплайнами. Сборник статей. Тр. МИАН СССР. 1980. Том 145. С. 79–110.
10. Конягин С.В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Том 243, № 5. С. 1116–1118.
11. Тайков Л.В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // УМН. 1965. Том 20, № 3. С. 205–211.
12. Amir D., Ziegler Z. Polynomials of extremal L_p -norm on the L_∞ -unit sphere // J. Approx. Theory. 1976. Vol. 18. P. 86–98.
13. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.
14. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Anal. Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120.
15. Carneiro E., Milinovich M.B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.
16. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.
17. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.
18. Ganzburg M.I. Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // J. Approx. Theory. 2017. Vol. 215. P. 92–105.
19. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // J. Approx. Theory. 2020. Vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.
20. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

21. Hörmander L., Bernhardsson B. An extension of Bohr's inequality // Boundary value problems for partial differential equations and applications. RMA Res. Notes Appl. Math. 1993. Vol. 29. P. 179–194.
22. Jackson D. Certain problems of closest approximation // Bull. Am. Math. Soc. 1933. Vol. 39. P. 889–906.
23. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.
24. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.
25. Simonov I.E., Glazyrina P.Y. Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.
26. Ziegler Z. Minimizing the $L_{p,\infty}$ -distortion of trigonometric polynomials // J. Math. Anal. Appl. 1977. Vol. 61. P. 426–431.

REFERENCES

1. Andreev, N.N., Konyagin, S.V., & Popov A.Yu. 1996. “Extremum problems for functions with small support”, *Math. Notes*, vol. 60, no. 3, pp. 241–247.
2. Andreev, N.N., Konyagin, S.V., & Popov A.Yu. 2000. “Letter to the editor”, *Math. Notes*, vol. 68, no. 3, pp. 415–416.
3. Geronimus, J. 1938. “Sur un problème extrémal de Tchebycheff”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 2, no. 4, pp. 445–456. (In Russ.)
4. Gorbachev, D.V. 2005. “An integral problem of Konyagin and the (C, L) -constants of Nikol'skii”, *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, vol. 2, pp. S117–S138. (In Russ.)
5. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2018. “On interrelation of Nikolskii Constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 80–89. (In Russ.)
6. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2019. “Interrelation between Nikolskii–Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153. (In Russ.)
7. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2020. “Letter to the Editor”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 336–338. (In Russ.)
8. Ibragimov, I.I. 1958. “Extremum problems in the class of trigonometric polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 121, no. 3, pp. 415–417. (In Russ.)
9. Ivanov, V.I. 1981. “Some extremal properties of polynomials and inverse inequalities of approximation theory”, Approximation of functions by polynomials and splines, Work collection, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 145, pp. 85–120.
10. Konyagin, S.V. 1978. “Bounds on the derivatives of polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 243, no. 5, pp. 1116–1118. (In Russ.)

11. Taikov, L.V. 1965. “A group of extremal problems for trigonometric polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk.*, vol. 20, no. 3(123), pp. 205–211. (In Russ.)
12. Amir, D. & Ziegler, Z. 1976. “Polynomials of extremal L_p -norm on the L_∞ -unit sphere”, *J. Approx. Theory*, vol. 18, pp. 86–98.
13. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. “Nicol’skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.
14. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. “Nicol’skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval”, *Anal. Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.
15. Carneiro, E., Milinovich, M.B. & Soundararajan, K. 2019. “Fourier optimization and prime gaps”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.
16. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, arXiv:1907.03832.
17. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.
18. Ganzburg, M.I. 2017. “Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics”, *J. Approx. Theory*, vol. 215, pp. 92–105.
19. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets”, *J. Approx. Theory*, vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.
20. Ganzburg, M.I. & Tikhonov, S.Y. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.
21. Hörmander, L. & Bernhardsson, B. 1993. “An extension of Bohr’s inequality”, Boundary value problems for partial differential equations and applications, *RMA Res. Notes Appl. Math.*, vol. 29, pp. 179–194.
22. Jackson, D. 1933. “Certain problems of closest approximation”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 889–906.
23. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.
24. Milovanović, G.V., Mitrinović, D.S. & Rassias, Th.M. 1994. “Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros”, World Scientific Publ. Co., Singapore.
25. Simonov, I.E. & Glazyrina, P.Y. 2015. “Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight”, *J. Approx. Theory*, vol. 192, pp. 69–81.
26. Ziegler, Z. 1977. “Minimizing the $L_{p,\infty}$ -distortion of trigonometric polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 61, pp. 426–431.

Получено 22.05.2020

Принято в печать 22.10.2020 г.