ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-29-44

**Константы Маркова — Бернштейна — Никольского
для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра¹**

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов

Дмитрий Викторович Горбачев — доктор физико-математических наук, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; Тульский государственный университет (г. Екатеринбург, г. Тула).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Иван Анатольевич Мартьянов — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

Мы изучаем точное неравенство Маркова–Бернштейна–Никольского вида $\|D^s u\|_\infty \leq C_p(n; s)\|u\|_p$ при $p \in [1, \infty]$ для тригонометрических и алгебраических полиномов u степени не выше n в весовом пространстве L^p с дифференциальным оператором Гегенбауэра–Данкля D . В частных случаях эти неравенства сводятся к классическим неравенствам теории приближений типа Маркова, Бернштейна, Никольского, которым посвящены многочисленные работы. Мы применяем результаты В.А. Иванова (1983, 1992), В.В. Арестова и М.В. Дейкаловой (2013, 2015), F. Dai, D.V. Gorbachev и S.Yu. Tikhonov (2020) для алгебраических констант в L^p на компактных римановых многообразиях ранга 1 (включая евклидову сферу) и отрезке с весом Гегенбауэра, ссылаемся на работы E. Levin и D. Lubinsky (2015), M.I. Ganzburg (2017, 2020), обзор классических результатов G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović и Th.M. Rassias (1994).

Ранее мы изучили случай $s = 0$. В этой работе мы рассматриваем случай $s \geq 0$. Наш основной результат заключается в доказательстве существования в тригонометрическом случае для чётных $s = 2r$ экстремальных полиномов u_* , которые действительные, четные и $C(n; s) = \frac{|D^s u_*(0)|}{\|u_*\|_p}$. С помощью этого факта доказывается взаимосвязь с алгебраической константой для веса Гегенбауэра. С одной стороны, это позволяет автоматически охарактеризовать экстремальные алгебраические полиномы. С другой стороны, известные алгебраические результаты переносятся на более общий тригонометрический вариант. Основным методом доказательства является применение гармонического анализа Гегенбауэра–Данкля, построенного Д.В. Чертовой (2009). Как следствие, мы приводим точные константы при $p = 2, \infty$ (при помощи результатов В.А. Иванова), даем соотношения ортогональности и двойственности (доказываемые методами выпуклого анализа из теории приближений), устанавливаем один асимптотический результат типа Левина–Любинского (благодаря связи с многомерной константой Никольского для сферических полиномов).

Ключевые слова: тригонометрический полином, алгебраический полином, константа Никольского, вес Гегенбауэра.

Библиография: 20 названий.

¹Работа Д.В. Горбачева выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. Исследование И.А. Мартьянова выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

Для цитирования:

Д. В. Горбачев, И. А. Мартьянов. Константы Маркова — Бернштейна — Никольского для полиномов в пространстве L^p с весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 29–44.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 517.5

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-29-44

Markov–Bernstein–Nicol’skii constants for polynomials in L^p -space with the Gegenbauer weight²

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov

Dmitry Viktorovich Gorbachev — Doctor of physical and mathematical sciences, N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Tula State University (Yekaterinburg, Tula).

e-mail: dvgmail@mail.ru

Ivan Anatol’evich Martyanov — Graduate student, Tula State University (Tula).

e-mail: martyanov.ivan@yandex.ru

Abstract

We study the sharp Markov–Bernstein–Nicol’skii inequality of the form $\|D^s u\|_\infty \leq C_p(n; s) \times \|u\|_p$, $p \in [1, \infty]$ for trigonometric and algebraic polynomials u of degree at most n in the weighted space L^p with the Gegenbauer–Dunkl differential operator D . In particular cases, these inequalities are reduced to the classical inequalities of approximation theory of the Markov, Bernstein, and Nicol’skii type, to which numerous papers are devoted. We apply the results of V.A. Ivanov (1983, 1992), V.V. Arestov and M.V. Deikalova (2013, 2015), F. Dai, D.V. Gorbachev and S.Yu. Tikhonov (2020) for algebraic constants in L^p on compact Riemannian manifolds of rank 1 (including the Euclidean sphere) and an interval with Gegenbauer weight, refer to the works of E. Levin and D. Lubinsky (2015), M.I. Ganzburg (2017, 2020), a review of the classic results of G.V. Milovanović, D.S. Mitrinović and Th.M. Rassias (1994).

Earlier we studied the case $s = 0$. In this paper, we consider the case $s \geq 0$. Our main result is to prove the existence in the trigonometric case for even $s = 2r$ of extremal polynomials u_* that are real, even, and $C(n; s) = \frac{|D^s u_*(0)|}{\|u_*\|_p}$. With the help of this fact, the relationship with the algebraic constant for the Gegenbauer weight is proved. On the one hand, this relationship allows to automatically characterize extremal algebraic polynomials. On the other hand, well-known algebraic results carry over to a more general trigonometric version. The main method of proof is the application of the Gegenbauer–Dunkl harmonic analysis constructed by D.V. Chertova (2009). As a consequence, we give the explicit constants for $p = 2, \infty$ (using the results of V.A. Ivanov), we give the relations of orthogonality and duality (proved by methods of convex analysis from approximation theory), we establish one asymptotic result of the Levin–Lubinsky type (due to the connection with the multidimensional Nicol’skii constant for spherical polynomials).

Keywords: trigonometric polynomial, algebraic polynomial, the Bernstein–Nikolskii constant, the Markov–Nikolskii constant, the Gegenbauer weight.

Bibliography: 20 titles.

²The work of D.V. Gorbachev was performed as part of research conducted in the Ural Mathematical Center. The reported study of I.A. Martyanov was funded by RFBR, project number 19-31-90152.

For citation:

D. V. Gorbachev, I. A. Martyanov. 2020, "Markov–Bernstein–Nicol’skii constants for polynomials in L^p -space with the Gegenbauer weight", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 29–44.

1. Введение

Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал, $v: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ — весовая функция, $p \geq 1$, $L^p(I; v)$ — весовое пространство Лебега функций $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p(I;v)} = \begin{cases} (\int_I |f(x)|^p v(x) dx)^{1/p}, & p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in I} |f(x)|, & p = \infty; \end{cases}$$

$\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ — одномерный тор, $\alpha \geq -1/2$, $L^p_\alpha(\mathbb{T}) = L^p(\mathbb{T}; |\sin x|^{2\alpha+1})$ — пространство Лебега с периодическим весом Гегенбауэра–Данкля; $\mathbb{I} = [-1, 1]$, $L^p_\alpha(\mathbb{I}) = L^p(\mathbb{I}; (1-t^2)^\alpha)$ — пространство Лебега с алгебраическим весом Гегенбауэра; $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{T}_n$ — множество комплекснозначных тригонометрических полиномов $T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ порядка не выше n ; $\mathcal{P}_n$ — множество комплекснозначных алгебраических полиномов $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ степени не выше n .

Если из контекста понятно, что речь идет о тригонометрическом или алгебраическом случае, то для краткости будем обозначать $\|f\|_{p,\alpha} = \|f\|_{L^p_\alpha(\mathbb{T})}$, $\|f\|_{L^p_\alpha(\mathbb{I})}$, $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty,\alpha}$.

В работе [9] была изучена точная константа Джексона–Никольского между метриками $L^\infty_\alpha(\mathbb{T})$ и $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ при $p \geq 1$, $\alpha \geq -1/2$ и установлена ее связь с соответствующей точной константой для алгебраических полиномов в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{I})$ из работы [12].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([9]). Пусть $1 \leq p < \infty$, $\alpha \geq -1/2$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Через

$$C_{p,\alpha}(n) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad M_{p,\alpha}(n) = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}$$

обозначим точные константы Джексона–Никольского для тригонометрических и алгебраических полиномов соответственно. Тогда

$$C_{p,\alpha}(n) = \frac{T_*(0)}{\|T_*\|_{p,\alpha}},$$

где T_* — экстремальный действительный четный тригонометрический полином порядка n . При $1 < p < \infty$ и $p = 1$, $\alpha > -1/2$ он единственный с точностью до положительного множителя.

Кроме того,

$$C_{p,\alpha}(n) = 2^{-1/p} M_{p,\alpha}(n)$$

и $T_*(x) = P_*(\cos x)$, где P_* — экстремальный в проблеме $M_{p,\alpha}(n)$ алгебраический полином степени n .

Результаты данного типа о возможности замены L^∞ -нормы функции значением в крайней точке позволяют установить взаимосвязь между разными экстремальными задачами, применить теорию двойственности, охарактеризовать экстремальные функции, исследовать асимптотическое поведение констант (см., например, [12, 15]). Основным методом доказательства в весовых пространствах L^p является применение положительных операторов обобщенного сдвига (см. [12, 9]). В нашем случае необходимая теория в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ была построена в работе [11] и адаптирована в [9].

В данной работе мы развиваем данный подход на случай точных тригонометрических констант Бернштейна–Никольского в $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ и соответствующих им точных алгебраических констант Маркова–Никольского в $L^p_\alpha(\mathbb{I})$ для дифференциальных операторов Гегенбауэра. Случай

веса Гегенбауэра для полуцелых $\alpha = d/2 - 1$ тесно связан с гармоническим анализом на n -мерной сфере $\mathbb{S}^d$ (см. доказательство следствия 4 в разделе 7). В частности, алгебраические полиномы могут быть рассмотрены как сужения зональных полиномов на сфере, а дифференциальный оператор Гегенбауэра как сужение оператора Лапласа–Бельтрами. Сфера является частным случаем компактного риманова многообразия ранга 1. В этой связи рассматриваемые далее задачи для алгебраических полиномов будут перекликаться с результатами работ [5, 6, 1]. Однако в нашем случае $\alpha \geq -1/2$ произвольное и мы делаем основным тригонометрический случай с гармоническим анализом Гегенбауэра–Данкля [11].

Будем продолжать опираться на факты из работы [11], а также на общие сведения об ортогональных полиномах [10]. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$, $R_k^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{P_k^{(\alpha, \beta)}(t)}{P_k^{(\alpha, \beta)}(1)}$ — ортогональные полиномы Якоби, $R_k^{(\alpha)}(t) = R_k^{(\alpha, \alpha)}(t)$ — ортогональные полиномы Гегенбауэра, $\psi_k(x) = R_k^{(\alpha)}(\cos x)$ — косинус-полиномы Гегенбауэра; $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ — ортогональный базис Гегенбауэра–Данкля в гильбертовом пространстве $L^2_\alpha(\mathbb{T})$, состоящий из тригонометрических полиномов степени n , таких что

$$e_0(1) = 1, \quad e_n(x) = \psi_{|n|}(x) - \frac{i}{\lambda_n} \psi'_{|n|}(x), \quad n \neq 0,$$

где $\lambda_n = \text{sign } n \sqrt{|n|(|n| + 2\alpha + 1)}$,

$$|e_n(x)| \leq e_n(0) = 1, \quad x \in \mathbb{T}; \quad (1)$$

D_α — дифференциально-разностный оператор Гегенбауэра–Данкля первого порядка:

$$D_\alpha f(x) = f'(x) + (\alpha + 1/2) \frac{f(x) - f(-x)}{\text{tg } x}, \quad D_\alpha e_n = i\lambda_n e_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

На четных функциях $f(x) = f(-x)$ оператор D_α^2 совпадает с дифференциальным оператором Гегенбауэра второго порядка:

$$D_\alpha^2 f(x) = f''(x) + \frac{2\alpha + 1}{\text{tg } x} f'(x), \quad D_\alpha^2 \psi_k = -\lambda_k^2 \psi_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Последнее соотношение отвечает дифференциальному уравнению для косинус-полиномов Гегенбауэра ψ_k [10].

Пусть $s \in \mathbb{Z}_+$. Любой тригонометрический полином $T \in \mathcal{T}_n$ представляется в виде [11]

$$T(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k(x),$$

поэтому для степени оператора Гегенбауэра–Данкля имеем

$$D_\alpha^s T(x) = \sum_{|k| \leq n} (i\lambda_k)^s c_k e_k(x). \quad (2)$$

Для четных полиномов $T(x) = \sum_{k=0}^n a_k \psi_k(x)$ и четного $s = 2r$ получаем

$$D_\alpha^{2r} T(x) = \sum_{k=0}^n (-\lambda_k^2)^r a_k \psi_k(x). \quad (3)$$

Аналогично для алгебраических полиномов Гегенбауэра $R_k^{(\alpha)}$ имеем [10]

$$D_\alpha^2 R_k^{(\alpha)} = -\lambda_k^2 R_k^{(\alpha)}, \quad D_\alpha^2 f(t) = (1 - t^2)f''(t) - (2\alpha + 2)tf'(t).$$

Для произвольного полинома $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k R_k^{(\alpha)}(t)$ положим (формально при нечетных s)

$$\mathcal{D}_\alpha^s P(t) = \sum_{k=0}^n (i\lambda_k)^s a_k R_k^{(\alpha)}(t). \quad (4)$$

Рассмотрим тригонометрическое неравенство типа Бернштейна–Никольского

$$\|D_\alpha^s T\|_\infty \leq C \|T\|_{p,\alpha}, \quad T \in \mathcal{T}_n, \quad (5)$$

и соответствующее алгебраическое неравенство типа Маркова–Никольского

$$\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty \leq M \|P\|_{p,\alpha}, \quad P \in \mathcal{P}_n. \quad (6)$$

Точные константы в них соответственно определяются равенствами

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|D_\alpha^s T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \mathcal{M}_{p,\alpha}(n; s) = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\|\mathcal{D}_\alpha^s P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}}. \quad (7)$$

Стандартные рассуждения показывают существование экстремальных полиномов в этих проблемах. Ясно, что $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 0)$, $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 0)$.

Наш основной результат является продолжением предложения 1.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\alpha \geq -1/2$, $n, r \in \mathbb{Z}_+$.

(i) Существует экстремальный действительный четный тригонометрический полином T_{*r} порядка n , такой что $T_{*r}(x) = \sum_{k=0}^n a_k \psi_k(x)$ и

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}}.$$

(ii) Имеем

$$2^{1/p} \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}},$$

где экстремальный алгебраический полином P_{*r} степени n связан с T_{*r} тригонометрической подстановкой $P_{*r}(\cos x) = T_{*r}(x)$.

(iii) При $p \in [1, \infty)$ справедливы следующие соотношения, характеризующие экстремальные полиномы T_{*r} , P_{*r} :

$$\begin{aligned} \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) |T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx &= (-D_\alpha^2)^r T(0), \quad \forall T \in \mathcal{T}_n, \\ \frac{(-D_\alpha^2)^r P_{*r}(1)}{\|P_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{-1}^1 P(x) |P_{*r}(t)|^{p-1} \operatorname{sign} P_{*r}(t) (1-t^2)^\alpha dt &= (-D_\alpha^2)^r P(1), \quad \forall P \in \mathcal{P}_n. \end{aligned}$$

В частности, экстремальные полиномы меняют знак на отрезке интегрирования.

(iv) При $p \in (1, \infty)$ экстремальные полиномы в обеих задачах единственные с точностью до множителей. Если $p = 1$ и $\alpha > -1/2$, то любой экстремальный тригонометрический полином T обязательно действительный, четный и $\|D_\alpha^{2r} T\|_\infty = |D_\alpha^{2r} T(0)|$.

Теорема доказывается в разделе 2. К сожалению, наш метод не позволяет получить ее для произвольного s , в том числе для дробных производных типа Вейля, что является интересной задачей. В разделе 7 мы дадим несколько следствий из основной теоремы 1, в частности, обсудим взаимосвязь величин $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s)$ и $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n; s)$ с классическими неравенствами Бернштейна и Маркова, выведем значения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ для $p = 2, \infty$ на основе результатов [6], докажем соотношение двойственности для $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ при $p \in [1, \infty)$ и докажем результат типа Левина–Любинского об асимптотическом поведении $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 0)$ для полуцелых α .

2. Доказательство теоремы 1

Также как в работе [9] нам потребуется оператор обобщенного сдвига T^y в пространстве $L_\alpha^p(\mathbb{T})$, построенный и изученный в [11]. Пусть $x, y \in \mathbb{T}$, тогда

$$T^y f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)], & \alpha = -1/2, \\ a_\alpha \int_0^\pi [f(A(\theta))(1+B(\theta)) + f(-A(\theta))(1-B(\theta))] \sin^{2\alpha} \theta d\theta, & \alpha > -1/2, \end{cases}$$

где $a_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}$, $A(\theta) = \arccos(\cos x \cos y + \sin x \sin y \cos \theta)$, $B(\theta) = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y \cos \theta}{\sin A(\theta)}$.

Оператор T^y линейный, действительный, положительный, $T^y 1 = 1$, $T^0 f = f$, $|T^y f| \leq T^y |f|$. Имеем $T^y f(x) = T^x f(y)$ для четных f . Однако в общем случае оператор T^y несимметричный, поэтому как в [9] удобно ввести оператор обобщенного сдвига S^y , такой что $S^y f(x) = T^x f(y)$.

Нам потребуется следующее утверждение, вытекающее из результатов работ [11, 9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $p \in [1, \infty]$, $\alpha \geq -1/2$, $T(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k(x)$ — произвольный полином из $\mathcal{T}_n$, $x_0 \in \mathbb{T}$ — произвольная фиксированная точка.

(i) Имеем

$$S^{x_0} T(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k \psi_{|k|}(x) e_k(x_0), \quad S^{x_0} T(0) = T(x_0).$$

(ii) Справедлива оценка

$$\|S^{x_0} T\|_{p,\alpha} \leq \|T\|_{p,\alpha}.$$

(iii) Если $\alpha > -1/2$ и $\|S^{x_0} T\|_{1,\alpha} = \|T\|_{1,\alpha}$, то $\pm T \geq 0$ на $\mathbb{T}$.

Факт (i) установлен в [11], а факты (ii), (iii) — в [9].

Приступим к доказательству теоремы 1.

3. Часть (i)

Рассмотрим тригонометрическую проблему $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ из (7). Покажем, что в этой задаче можно выбрать действительный экстремальный полином. Пусть $T \in \mathcal{T}_n$ — некоторый экстремальный полином, такой что

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{\|D_\alpha^{2r} T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}}, \quad \|D_\alpha^{2r} T\|_\infty = |D_\alpha^{2r} T(x_0)|, \quad x_0 \in \mathbb{T}. \quad (8)$$

Не ограничивая общности можно считать, что

$$|D_\alpha^{2r} T(x_0)| = (-D_\alpha^2)^r T(x_0) > 0,$$

иначе T можно умножить на некоторую комплексную константу и воспользоваться линейностью оператора D_α^{2r} .

Пусть $T = T_1 + iT_2$, где T_j — действительные полиномы степени n . Оператор D_α^{2r} действительный, поэтому $D_\alpha^{2r} T_2(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$(-D_\alpha^2)^r T(x_0) = (-D_\alpha^2)^r T_1(x_0).$$

Так как $|T_1(x)| \leq |T(x)|$ для всех x , имеем $\|T_1\|_{p,\alpha} \leq \|T\|_{p,\alpha}$. Таким образом,

$$\frac{\|D_\alpha^{2r} T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}} \leq \frac{(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0)}{\|T_1\|_{p,\alpha}},$$

поэтому T_1 — экстремальный полином.

Пусть $T_1(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k(x)$. В силу (2)

$$(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0) = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k^{2r} c_k e_k(x_0). \quad (9)$$

Рассмотрим полином

$$S(x) = S^{x_0} T_1(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k(x_0) \psi_{|k|}(x). \quad (10)$$

Так как оператор S^y действительный, S будет действительным четным полиномом степени n . При этом в силу (10), (3), (9)

$$(-D_\alpha^2)^r S(0) = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k^{2r} c_k e_k(x_0) = (-D_\alpha^2)^r T_1(x_0).$$

По предложению 2 имеем

$$\|S\|_{p,\alpha} \leq \|S^{x_0} T_1\|_{p,\alpha} \leq \|T_1\|_{p,\alpha}.$$

Таким образом,

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_1(x_0)}{\|T_1\|_{p,\alpha}} \leq \frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}}$$

и, значит, S — экстремальный. Утверждение (i) теоремы 1 установлено.

4. Часть (ii)

Пусть $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k R_k^{(\alpha)}(t)$ — произвольный алгебраический полином степени не выше n , $P \neq 0$. Тогда $T(x) = P(\cos x)$ будет четным тригонометрическим полиномом степени не выше n , для которого в силу (3) и (4) будет $D_\alpha^{2r} T(x) = \mathcal{D}_\alpha^{2r} P(t)$. При этом

$$\|T\|_{p,\alpha} = \left(2 \int_0^\pi |P(\cos x)|^p (\sin x)^{2\alpha+1} dx \right)^{1/p} = 2^{1/p} \left(\int_{-1}^1 |P(t)|^p (1-t^2)^\alpha dt \right)^{1/p} = 2^{1/p} \|P\|_{p,\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{\|\mathcal{D}_\alpha^{2r} P\|_\infty}{\|P\|_{p,\alpha}} = 2^{1/p} \frac{\|D_\alpha^{2r} T\|_\infty}{\|T\|_{p,\alpha}} \leq 2^{1/p} \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r),$$

откуда следует, что $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 2r) \leq 2^{1/p} \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$. Если положить $P(\cos x) = S(x)$, то получим равенство. Часть (ii) доказана.

5. Часть (iii)

Воспользуемся известными соотношениями ортогональности из теории приближений при $p \in [1, \infty)$ (см., например, [20]). Достаточно рассмотреть тригонометрический случай.

В части (i) мы доказали, что

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}}.$$

Покажем, что полином S будет экстремальным тогда и только тогда, когда

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r S(0)}{\|S\|_{p,\alpha}^p} \int_{\mathbb{T}} T(x) |S(x)|^{p-1} \operatorname{sign} S(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = (-D_\alpha^2)^r T(0), \quad \forall T \in \mathcal{T}_n. \quad (11)$$

Нормируем S так, чтобы $(-D_\alpha^2)^r S(0) = 1$. При этом условии S будет полиномом с наименьшей нормой $\|S\|_{p,\alpha} = C^{-1}$. Поскольку любой полином T с условием $(-D_\alpha^2)^r T(0) = 1$ можно представить в виде $T = S + H$, $H \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — замкнутое (в силу конечномерности) подпространство полиномов из $\mathcal{T}_n$ с условием $(-D_\alpha^2)^r H(0) = 0$, получаем

$$C^{-1} = \|S\|_{p,\alpha} = \min_{H \in \mathcal{H}} \|S - H\|_{p,\alpha}.$$

Получили задачу наилучшего приближения S замкнутым подпространством. При $1 \leq p < \infty$ необходимым и достаточным условие экстремальности нулевого элемента будет условие ортогональности функции $|S|^{p-1} \text{sign } S$ подпространству $\mathcal{H}$ (см. [20, гл. 4]). При $p = 1$ надо еще учесть, что полином S не может обращаться в нуль на множестве положительной меры. Таким образом, получаем

$$\int_{\mathbb{T}} H(x) |S(x)|^{p-1} \text{sign } S(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = 0, \quad \forall H \in \mathcal{H}. \quad (12)$$

Поскольку любой полином $T \in \mathcal{T}_n$ можно представить в виде $T = (-D_\alpha^2)^r T(0)S + H$, где $H \in \mathcal{H}$, то (12) эквивалентно

$$0 = \int_{\mathbb{T}} [T(x) - (-D_\alpha^2)^r T(0)S(x)] |S(x)|^{p-1} \text{sign } S(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx$$

или

$$\frac{1}{\|S\|_{p,\alpha}^p} \int_{\mathbb{T}} T(x) |S(x)|^{p-1} \text{sign } S(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = (-D_\alpha^2)^r T(0).$$

Здесь можно умножить S на произвольную положительную постоянную и получить (11).

Из (12) видно, что экстремальный полином обязан менять знак на отрезке интегрирования. Утверждение (iii) установлено.

6. Часть (iv)

Для $1 < p < \infty$, $\alpha \geq -1/2$ единственность экстремальных полиномов с точностью до множителей стандартно вытекает из строгой нормированности пространства L^p .

Пусть $p = 1$, $\alpha > -1/2$. Достаточно рассмотреть случай $n \geq 1$. Пусть T — произвольный экстремальный полином вида (8). Построим для него по схеме из части (i) действительный четный полином S . Тогда $\|S\|_{1,\alpha} = \|S^{x_0} T\|_{1,\alpha} = \|T\|_{1,\alpha}$. Отсюда по предложению 2 (iii) получаем, что T не меняет знак на $\mathbb{T}$, а, значит, и S не меняет знака в силу положительности оператора обобщенного сдвига. Но это противоречит условию ортогональности из части (iii) теоремы. Часть (iv), а вместе с ней и теорема 1, доказаны.

7. Следствия из теоремы 1

Приведем несколько следствий из основной теоремы, касающихся точных значений константы $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s)$ и ее асимптотического поведения при $n \rightarrow \infty$.

Вначале отметим взаимосвязь неравенств (5), (6) с классическими неравенствами типа Бернштейна и Маркова. В безвесовом случае $\alpha = -1/2$ имеем $e_n(x) = e^{inx}$, $D_{-1/2} f(x) = f'(x)$. Поэтому при $p = \infty$ приходим к классическому неравенству Бернштейна с точной константой

$$\|T^{(s)}\|_\infty \leq n^s \|T\|_\infty, \quad s \geq 1 \quad (13)$$

(причем s можно считать дробным); см. обзоры результатов [2, 19]. Таким образом,

$$\mathcal{C}_{\infty,-1/2}(n; s) = n^s, \quad n, s \in \mathbb{N}.$$

Классическое неравенство Маркова (или братьев Марковых) для полиномов $P \in \mathcal{P}_n$ имеет следующий вид:

$$\|P^{(s)}\|_{\infty,0} \leq T_n^{(s)}(1)\|P\|_{\infty,0}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad T_n^{(s)}(1) \asymp n^{2s}, \quad (14)$$

где $T_n = R_n^{(-1/2)}$ — полином Чебышева [19, 6.1.2]. Наш случай для $s = 2$ отвечает неравенству из [19, 6.1.10]

$$\|(1-t^2)P''(t) - (2\alpha+2)tP'(t)\|_{\infty} \leq 2(2|\alpha|+1)n^2\|P\|_{\infty}, \quad \alpha > -1. \quad (15)$$

Эту оценку можно итерировать, но константа в нем неточная для $\alpha \geq -1/2$. Действительно, применяя теорему 1 для экстремального полинома P с нормой $\|P\|_{\infty} = 1$, с помощью неравенства Маркова (14) находим

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n; 2r) = (-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r P(1) = (2\alpha+2)P'(1) \leq (2\alpha+2)n^2,$$

причем для полинома Чебышева $P = T_n$ здесь будет равенство. Таким образом,

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n; 2) = (2\alpha+2)n^2,$$

ср. с (15).

Точная константа $\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n; 2r)$ для всех $r \in \mathbb{Z}_+$ и полуцелых $\alpha \geq -1/2$ связана с точной константой Маркова–Никольского на многомерной сфере (см. (24) для $r = 0$), которая была вычислена в работе [6]. Доказательство из [6] переносится на произвольные $\alpha \geq -1/2$, что дает равенство

$$\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n; 2r) = (-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r T_n(1). \quad (16)$$

В [6] дана асимптотическая эквивалентность для этого выражения при $n \rightarrow \infty$, из которой следует $\mathcal{M}_{\infty,\alpha}(n; 2r) \asymp n^{2r}$.

Доказательство (16) основывается на том факте, что для любого полинома $P \in \mathcal{P}_n$ при $\alpha \geq -1/2$, $r \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$(-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r P(1) = \sum_{k=1}^r \rho_{rk\alpha} P^{(k)}(1), \quad (17)$$

где коэффициенты $\rho_{rk\alpha} \geq 0$. Например,

$$\begin{aligned} (-\mathcal{D}_{\alpha}^2)P(1) &= (2\alpha+2)P'(1), \\ (-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^2 P(1) &= (2\alpha+2)^2 P'(1) + (2\alpha+2)(2\alpha+4)P''(1). \end{aligned}$$

Из представления (17) и неравенства Маркова (14) следует, что

$$(-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r P(1) \leq \sum_{k=1}^r \rho_{rk\alpha} T_n^{(k)}(1)\|P\|_{\infty} = (-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r T_n(1)\|P\|_{\infty},$$

причем для $P = T_n$ здесь будет равенство.

Из соотношения (16) и теоремы 1 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для всех целых $r \geq 0$ имеем*

$$\mathcal{C}_{\infty,\alpha}(n; 2r) = ((-\mathcal{D}_{\alpha}^2)^r \cos(n \cdot))(0),$$

полином $\cos nx$ экстремальный.

Отметим, что не ясно, как вывести этот результат напрямую, например, из теоремы Бернштейна (13). Также получение тригонометрических аналогов соотношения (17) непросто.

В [6] исследован, но не завершён, вопрос о дробном неравенстве Маркова–Никольского при $p = \infty$, когда полином Чебышева остаётся экстремальным. Было бы интересно продолжить эти исследования.

Также в [6] методом квадратичного программирования вычислена алгебраическая константа при $p = 2$. Из нее и теоремы 1 легко вычислить $\mathcal{C}_{2,\alpha}(n; s)$. Через

$$K_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} e_k(x) = \sum_{k=0}^n \|\psi_k\|_{2,\alpha}^{-2} \psi_k(x) = K_n(0) R_n^{(\alpha+1,\alpha)}(\cos x) \quad (18)$$

обозначим ядро Дирихле в подпространстве полиномов $\mathcal{T}_n$. При выводе (18) равенств мы воспользовались формулой Кристоффеля и свойствами полиномов Якоби [10]. Пусть

$$K_{n,s}(x) = (-iD_\alpha)^s K_n(x) = \sum_{|k| \leq n} \lambda_k^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} e_k(x).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех целых $n, s \geq 0$

$$\mathcal{C}_{2,\alpha}(n; s) = \|K_{n,s}\|_{2,\alpha} = \left(\sum_{|k| \leq n} \lambda_k^{2s} \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} \right)^{1/2}$$

и $K_{n,s}$ единственный (с точностью до множителя) экстремальный полином.

Следствие легко доказывается для произвольного s напрямую с помощью неравенства Коши–Буняковского. Действительно, используя (2) и (1), находим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|k| \leq n} \lambda_k^s c_k \right| &= |D_\alpha^s T(0)| \leq \|D_\alpha^s T\|_\infty \leq \sum_{|k| \leq n} |\lambda_k|^s |c_k| = \sum_{|k| \leq n} |\lambda_k|^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-1} |c_k| \|e_k\|_{2,\alpha} \\ &\leq \left(\sum_{|k| \leq n} \lambda_k^{2s} \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} \right)^{1/2} \left(\sum_{|k| \leq n} |c_k|^2 \|e_k\|_{2,\alpha}^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{|k| \leq n} \lambda_k^{2s} \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} \right)^{1/2} \|T\|_{2,\alpha}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство будет равенством, если $|\lambda_k|^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-1} = |c_k| \|e_k\|_{2,\alpha}$ или $|c_k| = |\lambda_k|^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}$. Чтобы обратить в равенство оставшиеся неравенства нужно, чтобы $\lambda_k^s c_k = |\lambda_k|^s |c_k|$. В итоге, получаем коэффициенты экстремального полинома $c_k = \lambda_k^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2}$ и искомое значение константы $\mathcal{C}_{2,\alpha}(n; s)$.

Из известных выражений для $\|\psi_k\|_{2,\alpha}$ [10] следует, что

$$\|K_{n,s}\|_{2,\alpha} \sim c_\alpha n^{s+\alpha+1}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где константа c_α выписывается явно.

Полином $K_{n,2r}$ также применяется для следующего соотношения двойственности, связанного с неравенством типа Бора–Фавара.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $p \in [1, \infty)$, $p' = \frac{p}{p-1}$ – сопряжённый показатель, $(\mathcal{T}_n)_{p',\alpha}^\perp \subset L_\alpha^{p'}(\mathbb{T})$ – подпространство функций F , ортогональных подпространству полиномов $\mathcal{T}_n$:

$$\int_{\mathbb{T}} F(x) T(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_n.$$

Тогда для всех целых $n, r \geq 0$ имеем следующее соотношение двойственности:

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \min_{F \in (\mathcal{T}_n)_{p',\alpha}^\perp} \|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha}.$$

При поиске нижней грани можно ограничиться действительными четными F . Функция

$$F_{*r}(x) = K_{n,2r}(x) - \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} |T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x) \quad (20)$$

является экстремальной в двойственной задаче.

Доказательство. Вновь применим основную теорему 1. Часть (i) утверждает, что

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \sup_{\substack{T \in \mathcal{T}_n \\ \|T\|_{p,\alpha}=1}} |(-D_\alpha^2)^r T(0)|.$$

Здесь можно ограничиться действительными четными полиномами, но это необязательно. Легко проверить с помощью равенства Парсеваля [11], что

$$(-iD_\alpha)^s T(0) = \int_{\mathbb{T}} T(x) K_{n,s}(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = \langle K_{n,s}, T \rangle_\alpha. \quad (21)$$

Воспользуемся теперь теорией двойственности в задачах теории приближений (см., например, [20, гл. 5]). Пространство $(\mathcal{T}_n)_{p',\alpha}^\perp$ будет сопряженным к $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_n \cap L_\alpha^p(\mathbb{T})$. Поэтому

$$\sup_{\substack{T \in \mathcal{T}_n \\ \|T\|_{p,\alpha}=1}} |\langle K_{n,s}, T \rangle_\alpha| = \min_{F \in (\mathcal{T}_n)_{p',\alpha}^\perp} \|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha}.$$

Соотношение двойственности установлено. В нем при поиске нижней грани можно ограничиться действительными четными функциями, поскольку полином $K_{n,2r}$ действительный и четный.

По теореме 1 (iii) и (21) для экстремального полинома T_{*r} и любого $T \in \mathcal{T}_n$ имеем

$$\frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \int_{\mathbb{T}} T(x) |T_{*r}(x)|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r}(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = \int_{\mathbb{T}} T(x) K_{n,2r}(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx$$

или

$$\int_{\mathbb{T}} T(x) F_{*r}(x) |\sin x|^{2\alpha+1} dx = 0,$$

где функция F_{*r} определяется равенством (20). Таким образом, F_{*r} ортогональна $\mathcal{T}_n$ и

$$\|K_{n,2r} - F\|_{p',\alpha} = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \left\| |T_{*r}|^{p-1} \operatorname{sign} T_{*r} \right\|_{p',\alpha} = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}^p} \|T_{*r}\|_{p,\alpha}^{p-1} = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r).$$

Следствие установлено. $\square$

Общая асимптотическая оценка $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ может быть выведена из результатов [5] для константы $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 2r)$ (формально для полуцелых α , что не меняет сути):

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) \asymp n^{2r+(2\alpha+2)/p}.$$

Покажем, как ее можно получить при $p \in [1, 2]$ для всех $\alpha \geq -1/2$.

Из следствия 3, полагая $F = 0$ в соотношении двойственности, для всех $p \in [1, \infty)$ получаем оценку

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) \leq \|K_{n,2r}\|_{p',\alpha}, \quad (22)$$

точную при $p = 2$ (ср. со следствием 2). При $p \in [1, 2]$ (когда $p' \geq 2$) для произвольного $s \geq 0$ по неравенству Гёльдера имеем

$$\|K_{n,s}\|_{p',\alpha} \leq \|K_{n,s}\|_{\infty}^{1-2/p'} \|K_{n,s}\|_2^{2/p'},$$

где в силу (19)

$$\|K_{n,s}\|_{\infty} \leq \sum_{|k| \leq n} |\lambda_k|^s \|e_k\|_{2,\alpha}^{-2} = \|K_{n,s/2}\|_2^2 \asymp n^{s+2\alpha+2}.$$

Поэтому для некоторой постоянной $C > 0$

$$\|K_{n,s}\|_{p',\alpha} \leq C(n^{s+2\alpha+2})^{1-2/p'} (n^{s+2\alpha+2})^{2/p'} = Cn^{s+(2\alpha+2)/p}.$$

Интересно было бы получить асимптотическое разложение $\|K_{n,s}\|_{q,\alpha}$ для всех значений параметров. При $\alpha = -1/2$ эта задача сводится к оценке нормы производной тригонометрического ядра Дирихле, где такие разложения известны.

Мы упомянули точное неравенство типа Бора–Фавара. К нему приводит следующая экстремальная проблема [5]:

$$\sup \{ \|F\|_{q,\alpha} : \|D_{\alpha}^s F\|_{p,\alpha} \leq 1, F \in \mathcal{T}_{np}^{\perp} \};$$

ср. с точки зрения двойственности с исходной задачей

$$\sup \{ \|D_{\alpha}^s T\|_{q,\alpha} : \|T\|_{p,\alpha} \leq 1, T \in \mathcal{T}_n \}.$$

Явные значения констант Маркова–Бернштейна–Никольского при $p \neq 2, \infty$ нам неизвестны, только оценки вида (22) или порядковые равенства (см., например, [8, 7, 5, 6, 19, 14]). В связи с вопросом асимптотического поведения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r)$ представляет интерес следующий результат, лежащий в русле работ [18, 17, 15, 4, 14, 16].

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\alpha = -1/2, 1, 3/2, \dots$ — полуцелое число, $p \geq 1$. Тогда существует положительная константа $\mathcal{L}_{p,\alpha}$, с точностью до множителя равная константе Никольского для целых функций экспоненциального типа в пространстве $L^p(\mathbb{R}; |x|^{2\alpha+1})$, такая что

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 0) = \mathcal{L}_{p,\alpha} n^{(2\alpha+2)/p} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathbb{S}^d$ — единичная евклидова сфера в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$ с обычной лебеговой мерой dx и площадью ω_d , Π_n^d — множество сферических полиномов степени не выше n (сужений алгебраических полиномов $d+1$ -переменных степени не выше n на сферу), $\mathcal{E}^{dp}$ — множество целых функций $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ экспоненциального сферического типа не выше 1; для $p > 0$ через

$$\mathcal{C}(n, d, p) = \sup_{u \in \Pi_n^d \setminus \{0\}} \frac{\|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{S}^d)}}{\|u\|_{L^p(\mathbb{S}^d)}}, \quad \mathcal{L}(d, p) = \sup_{f \in \mathcal{E}^{dp} \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}}$$

обозначим точные константы Никольского для полиномов и функций соответственно.

В работе [14] доказано, что для всех $d \in \mathbb{N}$, $p > 0$

$$\mathcal{C}(n, d, p) = \mathcal{L}(d, p) n^{d/p} (1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \quad (23)$$

В [1] (см. также [6]) установлено, что если $p \geq 1$, то при поиске супремума в задаче $\mathcal{C}(n, d, p)$ можно ограничиться зональными сферическими полиномами с заданным полюсом, ∞ -норма которых достигается в этом полюсе. Это означает, что

$$\mathcal{C}(n, d, p) = \omega_{d-1}^{-1/p} \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{P(1)}{\|P\|_{L^p(\mathbb{I}; (1-t^2)^{d/2-1})}} = \omega_{d-1}^{-1/p} \mathcal{M}_{p,d/2-1}(n; 0). \quad (24)$$

Отсюда, теоремы 1 (или предложения 1) и (23) находим

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 0) = (\omega_{d-1}/2)^{1/p} \mathcal{L}(d, p) n^{(2\alpha+2)/p} (1 + o(1)), \quad \alpha = d/2 - 1.$$

В работе [13] показано, что константу Никольского $\mathcal{L}(d, p)$ при $p \geq 1$ можно искать на радиальных функциях в $L^p(\mathbb{R}^d)$ и с точностью до множителя $\mathcal{L}(d, p)$ совпадает с точной константой Никольского для четных целых функций экспоненциального типа не выше 1 в пространстве $L^p(\mathbb{R}; |x|^{d-1})$. В работе [3] с помощью гармонического анализа Данкля показано, что условие четности функций можно опустить. Следствие доказано. $\square$

Отметим, что для следствий 1, 2 перенос многомерных результатов [5, 6] с полуцелых α на произвольные $\alpha \geq -1/2$ не представляет сложности. В отличие от этого, примененные при доказательстве следствия 4 результаты для сферической константы Никольского были доказаны в [14] существенно “многомерными” методами. Например, было применено утверждение о существовании на сфере $\mathbb{S}^d$ хорошо распределенных сферических дизайнов с оптимальным порядком роста числа узлов. Было бы интересно доказать следствие 4 в полном объеме “одномерными” методами для всех $\alpha \geq -1/2$ как при $r = 0$, так и при всех $r \geq 0$.

8. Заключение

В данной работе изучено точное неравенство Бернштейна–Никольского $\|D_\alpha^s T\|_\infty \leq \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s) \|T\|_{p,\alpha}$ для тригонометрических полиномов $T \in \mathcal{T}_n$ в пространстве периодических функций $L^p((-\pi, \pi]; |\sin x|^{2\alpha+1})$ при $p \geq 1$ с периодическим весом Гегенбауэра–Данкля, а также родственное точное неравенство Маркова–Никольского $\|D_\alpha^s P\|_\infty \leq \mathcal{M}_{p,\alpha}(n; s) \|P\|_{p,\alpha}$ для алгебраических полиномов $P \in \mathcal{P}_n$ в пространстве $L^p([-1, 1]; (1 - t^2)^\alpha)$ с алгебраическим весом Гегенбауэра, D_α — дифференциально-разностный оператор Гегенбауэра–Данкля, $\mathcal{D}_\alpha$ — квадратный корень из оператора Гегенбауэра. В частных случаях получаем классические неравенства теории приближений типа Маркова, Бернштейна, Никольского, которым посвящены многочисленные работы и которые имеют важное значение в приложениях, например, теории чисел и метрической геометрии. Мы применяем результаты В.А. Иванова, В.В. Арестова, М.В. Дейкаловой, F. Dai, D.V. Gorbachev, S.Yu. Tikhonov, E. Levin, D. Lubinsky, M.I. Ganzburg и других авторов.

Один из основных результатов работы заключается в доказательстве для четного $s = 2r$ равенства $2^{1/p} \mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n; 2r)$. Для этого мы показываем, что существует экстремальный действительный четный тригонометрический полином T_{*r} порядка n , такой что $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; 2r) = \frac{(-D_\alpha^2)^r T_{*r}(0)}{\|T_{*r}\|_{p,\alpha}}$. Основным методом доказательства является применение гармонического анализа Гегенбауэра–Данкля, построенного Д.В. Чертовой, включая положительный оператор обобщенного сдвига, действующий в пространстве $L^p((-\pi, \pi]; |\sin x|^{2\alpha+1})$. Как следствие, мы приводим точные значения констант при $p = 2, \infty$, даем соотношения ортогональности и двойственности, устанавливаем один асимптотический результат типа Левина–Любинского.

На наш взгляд, перспективными направлениями исследований являются: доказательство для константы $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n; s)$ результата типа Левина–Любинского для произвольных значений параметров, а не только полуцелого α и $s = 0$; интересен случай $p \in (0, 1)$; вычисление константы при $p = 1$ или доказательство тесных границ для нее; вычисление точных констант на классах полиномов с ограничениями, в частности, неотрицательных полиномов; приложения в метрической геометрии и теории чисел.

9. Благодарности

Д.В. Горбачеву принадлежат следствия из теоремы 1 и раздел 7, работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре. И.А. Мартьянову принадлежит основная теорема 1 и раздел 2, исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В.В., Дейкалова М.В. Неравенство Никольского для алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Том 19, № 2. С. 34–47.
2. Арестов В.В., Глазырина П.Ю. Неравенство Бернштейна–Сеге для дробных производных тригонометрических полиномов // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Том 20, № 1. С. 17–31.
3. Горбачев Д.В., Добровольский Н.Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1} dx)$ // Чебышевский сб. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79.
4. Горбачев Д.В., Мартьянов И.А. Взаимосвязь между константами Никольского–Бернштейна для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2019. Том 20, № 3. С. 143–153.
5. Иванов В.А. О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1 // УМН. 1983. Том 38, № 3(231). С. 179–180.
6. Иванов В.А. Точные результаты в задаче о неравенстве Бернштейна–Никольского на компактных симметрических римановых пространствах ранга 1 // Тр. МИАН СССР: сб. тр.: Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Ч. 14. Т. 194. М.: Наука, 1992. С. 111–119.
7. Иванов В.И. Некоторые экстремальные свойства полиномов и обратные неравенства теории приближения // Приближение функций полиномами и сплайнами. Сборник статей. Тр. МИАН СССР. 1980. Том 145. С. 79–110.
8. Конягин С.В. Оценки производных от многочленов // Докл. АН СССР. 1978. Том 243, № 5. С. 1116–1118.
9. Мартьянов И.А. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник. 2020. Том 21, № 1. С. 247–258.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
11. Чертова Д.В. Теоремы Джексона в пространствах L_p , $1 \leq p < 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.
12. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.
13. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019.
14. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Anal. Math. 2020. Vol. 140, no. 1. P. 161–185.

15. Ganzburg M.I. Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics // *J. Approx. Theory*. 2017. Vol. 215. P. 92–105.
16. Ganzburg M.I. Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets // *J. Approx. Theory*. 2020. Vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.
17. Ganzburg M.I., Tikhonov S.Y. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // *Constr. Approx.* 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.
18. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // *Comput. Methods Funct. Theory*. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.
19. Milovanović G.V., Mitrinović D.S., Rassias Th.M. *Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros*. Singapore: World Scientific Publ. Co., 1994.
20. Shapiro H. *Topics in approximation theory. Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 187. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1971.

REFERENCES

1. Arestov, V.V. & Deikalova, M.V. 2014. “Nicol’skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere”, *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23.
2. Arestov, V.V. & Glazyrina, P.Y. 2015. “The Bernstein–Szegő inequality for fractional derivatives of trigonometric polynomials”, *Proc. Steklov Inst. Math.* vol. 288, pp. 13–28.
3. Gorbachev, D.V. & Dobrovolskii, N.N. 2018. “Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1} dx)$ spaces”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 67–79. (In Russ.)
4. Gorbachev, D.V. & Martyanov, I.A. 2019. “Interrelation between Nikolskii–Bernstein constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 20, no. 3, pp. 143–153. (In Russ.)
5. Ivanov, V.A. 1983. “On the Bernstein–Nicol’skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1”, *Russian Math. Surveys*, vol. 38, no. 3, pp. 145–146.
6. Ivanov, V.A. 1993. “Precise results in the problem of the Bernstein–Nicol’skij inequality on compact symmetric Riemannian spaces of rank 1”, *Investigations in the theory of differentiable functions of many variables and its applications*, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 194, pp. 115–124. (In Russ.)
7. Ivanov, V.I. 1981. “Some extremal properties of polynomials and inverse inequalities of approximation theory”, *Approximation of functions by polynomials and splines*, Work collection, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 145, pp. 85–120.
8. Konyagin, S.V. 1978. “Bounds on the derivatives of polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 243, no. 5, pp. 1116–1118. (In Russ.)
9. Martyanov, I.A. 2020. “Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258. (In Russ.)
10. Szegő, G. 1974. “Orthogonal polynomials”, Third Edition, American Mathematical Society.

11. Chertova, D.V. 2009. “Jackson theorems in L_p -spaces, $1 \leq p \leq 2$, with periodic Jacobi weight”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russ.)
12. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. “Nicol’skii inequality between the uniform norm and L_q -norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.
13. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, arXiv:1907.03832.
14. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2020. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *J. d’Anal. Math.*, vol. 140, no. 1, pp. 161–185.
15. Ganzburg, M.I. 2017. “Sharp constants in V.A. Markov–Bernstein type inequalities of different metrics”, *J. Approx. Theory*, vol. 215, pp. 92–105.
16. Ganzburg, M.I. 2020. “Sharp constants of approximation theory. III. Certain polynomial inequalities of different metrics on convex sets”, *J. Approx. Theory*, vol. 252. DOI: 10.1016/j.jat.2019.105351.
17. Ganzburg, M.I. & Tikhonov, S.Y. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.
18. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.
19. Milovanović, G.V., Mitrinović, D.S. & Rassias, Th.M. 1994. “Topics in polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros”, World Scientific Publ. Co., Singapore.
20. Shapiro, H. 1971. “Topics in approximation theory. Lecture Notes in Mathematics”, vol. 187, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Получено 11.04.2020

Принято в печать 22.10.2020 г.