

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 4.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-19-28

**Борис Максимович Бредихин
и его научно-педагогическая деятельность**

Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков

Николай Михайлович Добровольский — доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: dobvol@tspu.ru

Урусби Мухамедович Пачев — доктор физико-математических наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет (г. Нальчик).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Аннотация

Статья посвящена жизни и научно-педагогической деятельности известного математика, доктора физико-математических наук Бориса Максимовича Бредихина (1920–1994) в связи со 100-летием со дня его рождения. В ней сначала приводятся биографические сведения из его жизни. Основная часть нашей работы посвящена достижениям Б. М. Бредихина в теории чисел. Дается анализ его научных публикаций.

Ключевые слова: Борис Максимович Бредихин, теория чисел, характер полугруппы, бинарная аддитивная полугруппа, дисперсионный метод, метод сглаживания

Библиография: 65 названий.

Для цитирования:

Н. М. Добровольский, У. М. Пачев, В. Н. Чубариков. Борис Максимович Бредихин и его научно-педагогическая деятельность // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 19–28.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 4.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-19-28

**Boris Maximovich Bredikhin and his scientific
and pedagogical activity**

N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov

Nikolai Mihailovich Dobrovolsky — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Tula State University named after L. N. Tolstoy (Tula).

e-mail: dobrovol@tspu.ru

Urusbi Mukhamedovich Pachev — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Kabardino–Balkarian State University named after H. M. Berbekov (Nalchik).

e-mail: urusbi@rambler.ru

Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, Moscow State University named after M. V. Lomonosov (Moscow).

e-mail: chubarik2009@live.ru

Abstract

The article is devoted to the life and scientific and pedagogical activity of the famous mathematician, doctor of physical and mathematical sciences, professor Boris Maximovich Bredikhin (1920–1994) in connection with the 100th anniversary of his birth. In first provides brief biological information from his life. The main part of our work is devoted to the achievements of B. M. Bredikhin in number theory. An analysis of his scientific is given.

Keywords: Boris Maximovich Bredikhin, number theory, character of the semigroup, dispersion method, smoothing method

Bibliography: 65 titles.

For citation:

N. M. Dobrovolsky, U. M. Pachev, V. N. Chubarikov, 2020, "Boris Maximovich Bredikhin and his scientific and pedagogical activity", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 19–28.

Борис Максимович Бредихин родился 18 декабря 1920 г. в с. Грачевка Оренбургской области в семье служащего. С 1920 по 1935 гг. Бредихин Б. М. жил и учился в г. Куйбышева. С 1935 г. по 1937 г. в связи с выездом родителей в г. Чкалов учился там до возвращения в г. Куйбышев. В 1938 г. с отличием окончил школу № 1 им. Л. Толстого и осенью того же года поступил на физико–математический факультет Горьковского университета. Проучившись два года, осенью 1940 г. в силу сложившихся тяжёлых материальных обстоятельств он оставил учёбу в университете и поступил на работу учителем математики в Макарьевскую сельскую школу Горьковской области, где работал с октября 1940 г. по август 1942 г.

Несмотря на тяжёлое военное время Борис Максимович был целеустремлённым и вернувшись в г. Куйбышев поступил на третий курс математического отд. физико–математического факультета.

По окончании КГПИ (1944 г.) Бредихин Б. М. был приглашён в аспирантуру при кафедре математического анализа (научный руководитель Пулькин С. П. — специалист по дифференциальным уравнениям и вычислительной математике), в которой учился в 1944–1945 гг.

Однако, как он потом писал в своей автобиографии, «Ошибка в выборе научного направления (функциональный анализ) повлекла за собой мой уход из аспирантуры в январе 1945 г.» (Архив СГПУ, личное дело Бредихина Б. М.).

С марта 1945 г. Б. М. Бредихин работал в Куйбышевском педагогическом институте на кафедре математического анализа последовательно на должностях ассистента, старшего преподавателя и доцента, а с 1965 г. и до конца жизни (1994 г.) — профессором, заведующим кафедрой элементарной математики, алгебры, теории чисел и методики преподавания математики (ныне кафедра алгебры).

Теперь мы перейдём к научной и научно—педагогической деятельности Б. М. Бредихина.

В связи с тем, что научные интересы будущего учёного—математика относились к другой области — теории чисел с 1 октября 1953 г. по просьбе директора КГПИ Б. М. Бредихин на один год был прикомандирован в аспирантуру Саратовского университета к известному во всём мире специалисту по теории чисел Н. Г. Чудакову. За короткий срок после публикации [1] Б. М. Бредихин в 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию (см. [2]) на тему «Характеры числовых полугрупп с конечной и с бесконечной достаточно редкой базой» и ему была присуждена учёная степень кандидата физико—математических наук. Прежде чем продолжить наше изложение, отметим, что научно—педагогической деятельности Б. М. Бредихина посвящена также глава 4 кандидатской диссертации А. А. Копанёвой [3].

Исследования Б. М. Бредихина можно разделить на следующие циклы:

1. Изучение поведения арифметических функций на полугруппах.
2. Бинарные аддитивные задачи; дисперсионный метод, его дальнейшее развитие и упрощение.
3. Метод сглаживания в аддитивных задачах.

Цикл 1 исследований охватывает статьи [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Из них в [3] установлено, что конечный гомоморфизм любой полугруппы вещественных чисел с конечной базой обладает неограниченно растущей сумматорной функцией. В противоположность этому в статье Б. М. Бредихин даёт первое приближение к решению поставленной Н. Г. Чудаковым [4] вопроса о существовании обобщённых характеров полугрупп натуральных чисел, отличных от характеров полугрупп Дирихле, построив при этом пример обобщённого характера некоторой более обширной полугруппы рациональных чисел $r \geq 0$. В совместной работе с Н. Г. Чудаковым [7] для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп было найдено интересное применение равенства Парсеваля из теории рядов Фурье.

В статье [8], связанной со степенными плотностями свободных полугрупп обобщаются результаты работ Канольда [5] и Шерка [6], относящиеся к естественным плотностям множеств натуральных чисел, характеризующихся своим наибольшим квадратным делителем.

Характерной особенностью математического творчества Б. М. Бредихина является элементаризация применяемых методов и доказательств, с помощью которых получают нужные результаты. Так в [10] даётся элементарное доказательство асимптотического закона для числовых полугрупп с заданными системами образующих элементов. В ней на свободной числовой полугруппе G рассматриваются функции

$$\nu_G(x) = \sum_{\substack{N(\alpha) \leq x \\ \alpha \in G}} 1 \quad \text{и} \quad \pi_G(x) = \sum_{\substack{N(\omega) \leq x \\ \omega \in P}} 1,$$

где $N(t)$ — норма элемента $t \in G$; т. е. $N(t)$ — образ элемента t при гомоморфизме полугруппы G в некоторую мультипликативную числовую полугруппу. Б. М. Бредихин вводит важное понятие степенной Θ -плотности полугруппы G как значение $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\nu_G(x)}{x^\Theta}$, где $\Theta > 0$ и затем

изучается взаимосвязь $\nu_G(x)$ и $\pi_G(x)$. В этих исследованиях заслуга Б. М. Бредихина состоит в том, что он значительно обобщил известные асимптотические формулы при $x \rightarrow \infty$ для классических функций $\pi(x)$, $\theta(x)$ и $\psi(x)$ на случай произвольной свободной полугруппы G со степенной Θ -плотностью; при $\Theta = 1$ получаются обычные результаты для указанных функций (см. теорему 2 из [10]), соответствующие полугруппе натуральных чисел.

В этой работе Б. М. Бредихин доказал следующие асимптотические значения для распределения образующих элементов в свободных числовых полугруппах со степенной Θ -плотностью:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi_G(x)}{x^\Theta / \log x} = \frac{1}{\Theta};$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta_G(x)}{x^\Theta} = \frac{1}{\Theta};$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi_G(x)}{x^\Theta} = \frac{1}{\Theta}.$

при условии, что $\nu_G(x) = cx^\Theta + O(x^{\Theta_1})$, где $0 < \Theta_1 < \Theta$.

Основные результаты Б. М. Бредихина, содержащиеся в статьях [10, 11, 12, 13, 14] описываются вместе с их применениями в книге А. Г. Постникова [7].

Исследования Б. М. Бредихина, относящиеся к числовым полугруппам со степенными плотностями недавно были значительно продвинуты (см. напр. [1, 2]) представителями тульской школы теории чисел. Особенно плодотворными оказались новые понятия бесконечной экспоненциальной последовательности простых чисел и дзета-функции моноидов натуральных чисел, введенные впервые Н. Н. Добровольским. В связи с этим отметим также, что Н. Н. Добровольским, И. Ю. Ребровой и Н. М. Добровольским в статье [2] получены новые аналоги результатов Б. М. Бредихина, но используя при этом новое понятие C логарифмической θ -степенной плотности, где $C = \pi \sqrt{\frac{2}{3 \ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$, q — натуральное число, с помощью которого образуется последовательность простых чисел.

Следующий по нашему разбиению цикл работ Б. М. Бредихина относится к бинарным аддитивным задачам и применениям к ним дисперсионного метода Ю. В. Линника [8]. Следует отметить, что по ходу самостоятельного выполнения исследовательской работы Борис Максимович обратил внимание на публикации Ю. В. Линника, в которых были заложены основные идеи его дисперсионного метода. Б. М. Бредихин быстро освоил этот метод и даже у него появились свои соображения об этом методе, которые он изложил в личном письме акад. Ю. В. Линнику. Это положило начало их творческой дружбе и в результате научного сотрудничества ими было опубликовано 10 совместных статей.

Статья [15] из этого цикла фактически является алгебраической работой (и по-видимому единственная в его творчестве), в которой даются алгебраические аналоги проблемы Гольдбаха и проблемы Гарди—Литлвуда, при этом доказательство теорем основано на известных критериях неприводимости многочленов над полем рациональных чисел.

Заметим, что во всех остальных работах Б. М. Бредихина используется дисперсионный метод, созданный Ю. В. Линником в 1958–1961 гг. для решения бинарных задач вида

$$\alpha + \beta = n,$$

где α и β принадлежат к достаточно густым и хорошо распределённым в арифметических прогрессиях последовательностям натуральных чисел.

В связи с этим хотя бы в общих чертах охарактеризуем этот метод. Дисперсионный метод соединяет в себе понятие дисперсии числа решений изучаемого диофантова уравнения с аналитическими и алгебраическими идеями И. М. Виноградова [14] и А. Вейля [15].

Суть этого метода состоит в сведении рассматриваемого выше уравнения к нескольким бинарным уравнениям вида

$$\nu D' + \beta = n,$$

где ν , D' принадлежат к некоторым интервалам. Если оценка дисперсии числа решений такого уравнения не слишком большая, то получается асимптотика числа решений исходного уравнения $\alpha + \beta = n$.

Объединение чисел решений всех получающихся уравнений вида $\nu D' + \beta = n$ приводит к асимптотической формуле заданного бинарного уравнения $\alpha + \beta = n$.

В диофантовых уравнениях, к которым применяется дисперсионный метод, слагаемое α , например пробегает некоторые простые числа, а β является квадратичной формой такого или иного вида.

Большим достижением Б. М. Бредихина явилось полное и безусловное решение в работе [18] с помощью дисперсионного метода проблемы для сдвинутых простых чисел, поставленной Е. С. Титчмаршем [9] в 1930 г., заключающейся в отыскании асимптотической формулы при $n \rightarrow \infty$ для выражения

$$\sum_{0 < p-l < n} \tau(p-l),$$

где τ — функция числа делителей; l — заданное число; суммирование ведётся по некоторым простым числам p .

Сам Титчмарш получил асимптотику такой суммы только условно при справедливости расширенной гипотезы Римана. Дисперсионный метод позволил Ю. В. Линнику найти полное и безусловное решение этой проблемы, но только при $l = 1$.

Подбирая наиболее подходящие когерентные числа для ожидаемого числа решений бинарного уравнения Б. М. Бредихину удалось получить полное и безусловное решение проблемы Титчмарша [9].

Возвращаясь к своим результатам из [16], Б. М. Бредихин в работе [18] даёт полное решение проблемы о количестве представлений числа в виде разности простого числа и двух квадратов. Как следствие основного результата [18] получено решение гипотезы Серпинского [12] и Голомба [13] в более общем виде, а именно что имеется бесконечно много простых чисел вида $x^2 + y^2 + a$ при любом целом значении a . Если обозначить через $Q(n)$ число решений уравнения $p - \xi^2 - \eta^2 = a$, где $0 < \xi^2 + \eta^2 < n$, a — фиксированное натуральное число, то

$$Q(n) = C \cdot \frac{n}{\ln n} + R(n),$$

где $R = O\left(n(\ln n)^{-1,042}\right)$ — лучшая оценка по сравнению с ранее известной; C — постоянная, зависящая только от a .

Такое улучшение остаточного члена для $Q(n)$ получено Б. М. Бредихиным за счёт уточнения негипотетической части рассуждений С. Хооли [10] с помощью метода П. Эрдеша [11].

В случае $a = 1$ новое доказательство этого результата Б. М. Бредихина дано в [16]. Результаты работ [16, 17, 18, 19, 20, 21] составили основу докторской диссертации Б. М. Бредихина на тему «Исследования по дисперсионному методу», защищённой в 1964 г. в математическом институте им. В. А. Стеклова.

Вслед за проведением исследований по применению дисперсионного метода к бинарным аддитивным проблемам неопределённых типов I–IV Б. М. Бредихин в статье [23] излагает основные идеи дисперсионного метода применительно к решению бинарных проблем определённого типа.

В следующих статьях [24, 25, 26], написанных совместно с Ю. В. Линником наряду с дисперсионным методом используются элементарные эргодические свойства решений и их геометрическое распределение (см. напр. [17]).

Статья [28], опубликованная совместно с Чудаковым Н. Г. и Линником Ю. В. в немецком журнале, посвящённом бинарным аддитивным задачам смешанного типа.

Остальные публикации Б. М. Бредихина мы относим к третьему циклу его исследований. При этом он продолжал ещё дальше развивать дисперсионный метод, но в основном со своими учениками. Совместные с Б. М. Бредихиным и самостоятельные публикации имеет Л. И. Уфимцева (см. [29, 18]). В статье [30] Б. М. Бредихин и Ю. В. Линник на основе применения идеи И. М. Виноградова о сглаживании рассматривают разрешимость уравнения несколько необычного вида

$$n = \frac{\nu_1 \varphi_1 - \nu_2 \varphi_2}{\nu_1 - \nu_2}$$

при некоторых ограничениях на плотности простых чисел ν_1 и ν_2 и на распределения чисел φ_1 и φ_2 в арифметических прогрессиях, где $\varphi_1, \varphi_2 < n$; при этом получена оценка снизу для числа решений такого уравнения.

Отмеченный цикл исследований Б. М. Бредихина с 1972 г. по 1984 г. характеризуется значительным развитием и упрощением дисперсионного метода в его работах [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 43, 46] и [47], связанных с методом сглаживания. В результате своей интенсивной научной деятельности Борис Максимович Бредихин внёс крупный вклад в развитие теории чисел, особенно в элементаризации применяемых методов, так и доказательств многих важных результатов в этой области.

Наряду с этим он много времени уделял и научно—педагогической работе (см. напр. его публикации [40, 41, 44, 45] в математической энциклопедии), в результате чего сумел вовлечь в математическую науку своих талантливых учеников. Под руководством Б. М. Бредихина в Куйбышевском педагогическом институте сформировалось научное направление «Разработка максимально элементарных методов решения задач аддитивной теории чисел». Куйбышевская группа теоретико—числовиков (Б. М. Бредихин, А. А. Полянский, Л. И. Уфимцева, Т. М. Фецулина, Т. И. Гришина, Н. А. Яковлева, Л. Ф. Кондакова, Ж. В. Пиядина, Н. П. Рыжова и другие) внесла весомый вклад в решение ряда трудных классических задач аддитивной теории чисел. Исследования учеников Б. М. Бредихина всегда имели высокий научный уровень, о чём свидетельствуют их публикации в наших престижных журналах, так и в зарубежных изданиях.

Считаем, что его исследования всё ещё представляют большой интерес для специалистов по теории чисел не только у нас, но и за рубежом.

Печатные работы Б. М. Бредихина

1. О характеристиках числовых подгрупп с достаточно редкой базой // ДАН СССР, нов. серия, 1953, Т. 90, № 5. С. 707–710.
2. Характеристика числовых полугрупп с конечной и бесконечной достаточно редкой базой : Автореф. дисс. на соискание учёной степени канд. физ.-мат. наук. Саратов 1953.
3. О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп // ДАН СССР. 1954. Т. 94, № 4. С. 609–612.
4. Теория характеров числовых полугрупп // Научный ежегодник Саратовск. ун-та. 1955. С. 5–8 (Совм. с Н. Г. Чудаковым)
5. Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп // Труды 3^{го} Всесоюзного съезда. Т. 1. 1956. М. АН СССР. С. 3–4.
6. Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией // УМН. 1956. Т. 11, № 4(40). С. 119–122.

7. Применение равенства Парсеваля для оценок сумматорных функций характеров числовых полугрупп // УМЖ. 1956. Т. 8, № 4. С. 347–360 (Совм. с Н. Г. Чудаковым)
8. Нормированные характеры коммутативных полугрупп // Учён. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та. 1958. Вып. 21. С. 269–279.
9. О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп // Изв. вузов. Сер. математика. 1958. Вып. 3. С. 24–30.
10. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // Матем. сб. 1958. Т. 46(88), № 2. С. 143–158.
11. Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями // ДАН СССР 1958. Т. 118, № 6. С. 855–857.
12. Обращение некоторых теорем о степенных плотностях упорядоченных полугрупп // Уч. зап. Куйбышевского гос. ун-та. 1959. Вып. 29. С. 13–20.
13. Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп // Матем. сб. 1960. Т. 50, № 2. С. 221–232.
14. Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$ // Изв. вузов. Сер. матем. 1960. № 6(19). С. 40–49.
15. Алгебраические аналоги некоторых аддитивных проблем // УМН. 1961. Т. 16, № 4. С. 137–139.
16. Улучшение остаточного члена в проблемах типа Харди—Литлвуда // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат., мех., астроном. 1962. Т. 19. С. 766–768.
17. Бинарные аддитивные проблемы с простыми числами // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 766–768.
18. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа I. Проблема делителей для сдвинутых простых чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 2. С. 439–462.
19. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа II. Аналог проблемы Харди—Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 3. С. 577–612.
20. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа III. Аддитивные проблемы делителей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1963. Т. 27, № 4. С. 777–794.
21. Применение дисперсионного метода в бинарных аддитивных проблемах // ДАН СССР. 1963. Т. 149, № 1. С. 9–11.
22. Бинарные аддитивные проблемы неопределённого типа IV. Аналог обобщённой проблемы Харди—Литлвуда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1409–1440.
23. Дисперсионный метод и бинарные аддитивные проблемы определённого типа // УМН. 1965. Т. 20, № 2(122). С. 89–130.
24. Бинарные аддитивные задачи с эргодическими свойствами решений // Докл. АН СССР. 1966. Т. 166, № 6. С. 1267–1269 (Совм. с Ю. В. Линником)
25. Асимптотика в общей проблеме Харди—Литлвуда // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 5. С. 975–977 (Совм. с Ю. В. Линником)

26. Асимптотика и эргодические свойства решений обобщённого уравнения Харди—Литтлвуда // Матем. сб. новая серия. 1966. Т. 71, № 2. С. 145–161. (Совм. с Ю. В. Линником)
27. Дисперсионный метод Ю. В. Линника и бинарные аддитивные проблемы. В кн. Исследования теории чисел. 1966. Вып. 1. Саратов. С. 6–11.
28. Über binäre additive Problem gemischten Art // Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis. Berlin. 1968. S. 25–37 (Linnik Y. V., Tschudakoff N. G.)
29. Бинарные аддитивные задачи и мультипликативные функции // Тр. МИАН СССР. 1972. Т. 128. С. 66–75 (Совм. с Л. И. Уфимцевой)
30. Применение теорем о простых числах в диофантовых задачах особого типа // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 243–250 (Совм. с Ю. В. Линником)
31. Remarks on some new application of the dispersion method // Acta Arithm. 1972. V. 21. pp. 409–410 (Совм. с Ю. В. Линником)
32. Новый метод аналитической теории чисел // Сб. «Актуальные проблемы аналитической теории чисел» Минск : «Наука и техника». 1974. С. 5–22 (Совм. с Ю. В. Линником)
33. Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных задачах с простыми числами // Докл. АН СССР. 1974. Т. 217, № 1. С. 14–17.
34. Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных задачах с простыми числами // Тезисы докладов Всесоюзн. конф. «Проблемы аналитической теории чисел и её применений» Вильнюс. 1974. С. 34–35.
35. Применение дисперсионного метода в бинарной проблеме Гольдбаха // Тезисы докладов Всесоюзной конф. «Проблемы аналитической теории чисел и её применений» Вильнюс. 1974. С. 36–37 (Совм. с Н. А. Яковлевой)
36. К тернарной проблеме Гольдбаха // Исследования по теории чисел. Саратовский университет. 1975. Вып. 6. С. 5–18.
37. Обоснование эвристического принципа в аддитивных задачах с простыми числами // Матем. заметки. 1975. Т. 17, № 4. С. 659–668 (Совм. с Н. А. Яковлевой)
38. Применение дисперсионного метода к проблеме Гольдбаха // Acta Arithmetica. XXVII. 1975. pp. 253–263 (Совм. с Н. А. Яковлевой)
39. Метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 88–100.
40. Аддитивные проблемы делителей. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 1. 1977. С. 90.
41. Аддитивная теория чисел. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 1. 1977. С. 91–94.
42. Элементарная оценка $G(n)$ в проблеме Варинга // Мат. заметки. 1978. Т. 24, № 1. С. 7–18 (Совм. с Т. И. Гришиной)
43. Разбиение на слагаемые с простыми числами // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. 1978. Т. 16. С. 5–33.
44. Ковариация числа решений. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 2. М., 1979. С. 902–903.
45. Дисперсионный метод. В кн. «Мат. энциклопедия». Т. 2. М., 1979. С. 223–225.

46. Метод сглаживания в задачах на варингоского типа // *Acta Arithm.* 1980. Vol. 37. Pp. 391–404 (Совм. с Т. И. Гришиной)
47. Метод сглаживания в аддитивных задачах // *Тр. МИАН СССР.* 1984. Т. 163. С. 23–27.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // *Чебышевский сб.* 2017. Т. 15, Вып. 4. С. 187–207.
2. Добровольский Н. Н., Реброва И. Ю., Добровольский Н. М. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // *Чебышевский сб.* 2020. Т. 21, № 1(73). С. 165–185.
3. Копанева А. А. Развитие вероятностей теории чисел в трудах отечественных математиков. Автореферат на соискание учён. степени канд. физ.-мат. наук. Орёл : 2008.
4. Чудаков Н. Г. Об одном классе вполне мультипликативных функций // *УМН.* VIII. 1953. Вып. 3(55). С. 149–150.
5. Kanold H. J. *Reine und angew. Math. m.* 196. N 3–4. 1954.
6. Scherk P. J. *Reine und angew. Math. m.* 196. N 1–2. 1956.
7. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. Изд.-во «Наука». М. 1971.
8. Линник Ю. В. Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах. Л. 1961. 208 с.
9. Titchmarsh E. C. A division problem. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, V. 54. 1930. pp. 414–429.
10. Hooley C. On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime // *Acta Math.* V. 97. 1957. pp. 189–210.
11. Эрдеш П. Об одном асимптотическом неравенстве в теории чисел // *Вестник ЛГУ*, Вып. 13. 1960. С. 41–49.
12. Sierpinski W. *Teoria liczł*, II. Warszawa. PWN. 1959.
13. Golomb S. W. Sets of primes with intermediate density. *Math. Scand.*, 3. 2. 1959. pp. 264–274.
14. Виноградов И. М. Избранные труды. Изд.-во АН СССР. 1952.
15. Weil A. On some exponential sums // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* V. 34. 1948. pp. 204–207.
16. Friedlander J., Jwaniec H., 2018. “On a theorem of Bredikhin and Linnik”, *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 19, no. 3. pp. 35–39.
17. Линник Ю. В. Эргодические свойства алгебраических полей. Л. Изд.-во ЛГУ. 1967. 208 с.
18. Уфимцева Л. И. Обобщение аддитивной проблемы делителей // *Матем. заметки.* 1970. Т. 4, вып. 4. С. 477–482.

REFERENCES

1. Dobrovolsky N. N. The Zeta function monoids of natural numbers with unique factorization // Chebyshevskii SB. 2017. Vol. 15, Issue 4. P. 187–207.
2. Dobrovolsky N. N., Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M. The inverse problem for the monoid with exponential sequence of simple // Chebyshevskii SB. 2020. T. 21, № 1(73). P. 165–185.
3. Kopaneva A. A. Development of probabilities of number theory in the works of Russian mathematicians. Abstract for the academic competition. degrees of candidate of physical and mathematical Sciences. Orel : 2008.
4. Chudakov N. G. On a class of fully multiplicative functions // SMART. VIII. 1953. Issue 3 (55). P. 149 – 150.
5. Kanold H. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 3–4. 1954.
6. Scherk P. J. Reine und angew. Math. m. 196. N 1–2. 1956.
7. Postnikov A. G. Introduction to analytical number theory. Nauka publishing house, Moscow, 1971.
8. Linnik Yu. V. Dispersion method in binary additive problems. L. 1961. 208 p.
9. Titchmarsh E. C. A division problem. Rend. Circ. Mat. Palermo, V. 54. 1930. pp. 414–429.
10. Hooley C. On the representation of numbers as the sum of two squares and a prime // Acta Math. V. 97. 1957. pp. 189–210.
11. Erdesh P. On an asymptotic inequality in number theory / / Bulletin of LSU, Vol. 13. 1960. P. 41 – 49.
12. Sierpinski W. Teoria liczł, II. Warszawa. PWN. 1959.
13. Golomb S. W. Sets of primes with intermediate density. Math. Scand., 3. 2. 1959. pp. 264–274.
14. Vinogradov I. M. Selected works. Publishing house of the USSR Academy of Sciences. 1952.
15. Weil A. On some exponential sums // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. V. 34. 1948. pp. 204–207.
16. Friedlander J., Jwaniec H., 2018. ‘On a theory of Bredikhin and Linnik Chebyshevsky sbornik, Vol. 19, no. 3. pp. 35–39.
17. Linnik Yu. V. Ergodic properties of algebraic fields.
LSU Publishing house. 1967. 208 p.
18. Ufimtseva L. I. A generalization of the additive problem of divisors of // Mod. notes. 1970. Vol. 4, issue 4. P. 477–482.

Получено 11.04.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.