ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 4.

УДК 511.33 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-9-18

О работах С. Б. Стечкина по теории чисел

М. Р. Габдуллин, С. В. Конягин

Михаил Рашидович Габдуллин — кандидат физико-математических наук, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru
Сергей Владимирович Конягин — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук (г. Москва).
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Аннотация

Данная работа посвящена анализу вклада С. Б. Стечкина в некоторые вопросы в аналитической теории чисел. Выделены пять направлений его исследований в области теории чисел. Рассмотрены работы С. Б. Стечкина по теории дзета-функции Римана. Определенную роль в этих исследованиях сыграли его результаты по четным тригонометрическим полиномам. Другое направление исследований, в которое существенный вклад внёс С. Б. Стечкин вместе с А. Ю. Поповым, относится к вопросам асимптотического распределения простых чисел в среднем. Третий вопрос, которому было посвящено творчество С. Б. Стечкина в области аналитической теории чисел, связан с теоремой о среднем И. М. Виноградова основным методом в оценке сумм Г. Вейля. Четвертое направление исследований, где С. Б. Стечкину удалось получить результат, который не смогли усилить за последние 30 лет, — это оценки полных рациональных тригонометрических сумм. Наконец, пятое направление — это изучение сумм Гаусса. Оценка, полученная здесь С. Б. Стечкиным, и поставленная им задача послужили источником многочисленных работ вплоть до настоящего времени.

Ключевые слова: тригонометрические суммы, дзета-функция Римана, распределение простых чисел.

Библиография: 33 названия.

Для цитирования:
М. Р. Габдуллин, С. В. Конягин. О работах С. Б. Стечкина по теории чисел // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 4, с. 9–18.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 4.

UDC 511.33 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-4-9-18

Stechkin's works in number theory

M. R. Gabdullin, S. V. Konyagin

Mikhail Rashidovich Gabdullin — Candidate of physico-mathematical sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: gabdullin.mikhail@yandex.ru
Sergei Vladimirovich Konyagin — Member of the RAS, Doctor of physico-mathematical sciences, Professor, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences (Moscow).
e-mail: konyagin@mi-ras.ru

Abstract

This paper is devoted to the analysis of S. B. Stechkin's contribution to some questions in analytic number theory. There are five areas of his research in the field of number theory. First, the works of S. B. Stechkin on the theory of the Riemann zeta function are considered. His results on even trigonometric polynomials played a role in these studies. Another area of research to which S. B. Stechkin made a significant contribution together with A. Y. Popov, relates to the asymptotic distribution of prime numbers on average. The third question, to which one of the works of S. B. Stechkin in analytic number theory was devoted, is related to Vinogradov's mean value theorem, the main method for estimating Weyl sums. The fourth area of research, where S. B. Stechkin managed to get a result that could not be strengthened over the past 30 years, is the estimation of complete rational trigonometric sums. Finally, the fifth direction is the study of Gauss sums. Stechkin's result in this direction and the problem he posed inspired followers to the present time.

Keywords: trigonometric sums, the Riemann zeta-function, distribution of prime numbers.

Bibliography: 33 titles.

For citation:
M. R. Gabdullin, S. V. Konyagin, "Stechkin's works in number theory", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 4, pp. 9–18.

1. Введение

Прошло 25 лет со дня кончины Сергея Борисовича Стечкина. Вскоре после его смерти появилась обзорная статья А.Ю. Попова [21]. В ней прекрасно изложены история и суть работ С. Б.Стечкина по теории чисел. Мы думаем, однако, что четверть века спустя настало время еще раз вспомнить эти работы и обсудить связь некоторых из них с современными тенденциями развития теории чисел. Не ставя своей целью дублировать работу [21], мы тем не менее вынуждены были частично повторить ее содержание. Настоящая статья может рассматриваться в качестве дополнения к [21], где материал изложен более полно и обстоятельно.

Первая работа С. Б. Стечкина [24] по теории чисел опубликована в 1968 году. В ней было предложено упрощенное доказательство постулата Бертрана. Статья имеет при упорядочении в mathnet.ru в обратном хронологическом порядке номер 46 из 98 публикаций Сергея Борисовича. Это означает, что к этому времени большинство его статей уже были опубликованы.

Сергей Борисович пришел в теорию чисел известным математиком, имевшим ряд ярких результатов по теории приближений, во многом определившим ее развитие. За плечами были фактически создание и организация работы Института математики и механики в (тогда еще) Свердловске, создание журнала "Математические заметки". Эти детища Сергея Борисовича и поныне играют большую роль в развитии отечественной математики.

С. Б. Стечкин занимался теорией чисел и публиковал статьи до конца своей жизни. Всего вышло не менее 11 его теоретико–числовых работ. В то же время он продолжал активно заниматься теорией приближений: писал статьи, ежегодно проводил школы, вел семинары в МГУ и МИАН, читал специальные курсы, постоянно их обновляя и совершенстуя, руководил студентами и аспирантами.

Означает ли это, что теория чисел была для Сергея Борисовича своеобразной отдушиной, хобби? Ни в коем случае. Сергей Борисович относился к исследованием по теории чисел очень серьезно и ответственно, как и к любому делу, за которое он брался. И его результаты, как теперь принято говорить, соответствовали мировому уровню.

2. Основной текст статьи

1. Ряд его работ связан с функцией ζ и распределением простых чисел. Обозначим через $P_n\,(n \geqslant 2)$ класс четных тригонометрических полиномов

$$t_n(\varphi) = a_0 + a_1 \cos\phi + \cdots + a_n \cos(n\phi),$$

удовлетворяющих условиям
1) $t_n(\varphi) \geqslant 0$ для всех φ;
2) $a_k \geqslant 0\,(k = 0, \ldots, n)$;
3) $a_0 < a_1$.

Полином $3 + 4\cos\phi + \cos(2\varphi) = 2(1 + \cos\varphi)^2 \geqslant 0$ показывает, что классы P_n непусты при $n \geqslant 2$. Для полинома $t_n \in P_n$ положим

$$V(t_n) = \frac{t_n(0) - a_0}{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_0})^2},$$

$$V_n = \inf_{t_n \in P_n} V(t_n), \quad V_\infty = \lim_{n\to\infty} V_n.$$

Валле–Пуссен [10] указал важные применения полиномов класса P_n к дзета–функции Римана и распределению простых чисел. Он доказал, что

$$R(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{du}{\log u} = O(x \exp(-K\sqrt{\log x})),$$

где $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих x, а $K < K^* = \sqrt{2/V_\infty}$. С. Б. Стечкин в 1970 году опубликовал две статьи [25], [26], связанные с величинами V_n. В первой он изучал V_n и оценил снизу и сверху величину V_∞. Далее эти оценки улучшались В.П. Кондратьевым [13], А.В. Резцовым [23] и В.В. Арестовым и Кондратьевым [1].

Оценки для $R(x)$ связаны с оценками области, свободной от нулей дзета-функции Римана ζ. В [26] С. Б. Стечкин усилил неравенство, оценивающее эту область через V_∞, и доказал, что $\zeta(\sigma + it)$ не имеет нулей в области $\sigma \geqslant 1 - 1/(9.65\log t)$, $t \geqslant 12$. Дальнейшее уточнение этих результатов получено им в [30].

Хотя для нулей $\sigma + it$ при очень больших значениях t известны лучшие по порядку оценки снизу разности $1 - \sigma$ (из результатов Н.М. Коробова [18] и И.М. Виноградова [12] следует, что $1 - \sigma \geqslant c/((\log(|2+|t|))^{1/3}(\log\log(20+|t|))^{1/3})$, $c > 0$), оценки С. Б. Стечкина хорошо работают для всех t. Дальнейшее улучшение этих оценок получил К. Форд [31].

Аналогичные задачи об оценках области, свободной от нулей, возникают не только для дзета-функции Римана, но и для ее обобщений. Улучшение констант, ограничивающих такие области для L-функций Дирихле, оказалось важным в исследованиях, связанных с теоремой Линника, утверждающей существование в любой арифметической прогрессии $a \mod q$, $(a,q)=1$, $q>1$, простого числа, не превосходящего q^C, где C — абсолютная константа. Т. Ксилурис [19] доказал, что для больших q можно взять $C=5.18$. Кроме того, в [19] описна история исследования проблемы и указаны авторы, на протяжении полувека последовательно улучавшие константы C.

2. В 1996 году вышла работа А.Ю. Попова и С. Б. Стечкина [22], в которой изучалось локальное поведение функции

$$R(x)=\psi(x)-x, \quad \psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n),$$

и соответствующих функций $R^+(x)=\max(0,R(x))$, $R^-(x)=-\min(0,R(x))$. В частности, показано, что при $x\geqslant 1$

$$\int_x^{Ax} R^{\pm}(u)du \geqslant x^{3/2},$$

где A — абсолютная константа.

3. С. Б. Стечкин уделял большое внимание оценкам тригонометрических сумм и, в частности, сумм Вейля. Положим $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $e(y)=\exp(2\pi iy)$ ($y\in\mathbb{R}$ или $y\in\mathbb{T}$),

$$f(u)=f_n(u)=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu u^\nu \quad (n\in\mathbb{N},\, n\geqslant 2,\, \alpha_\nu\in\mathbb{R},\, u\in\mathbb{R}),$$

$$S(X)=S_n(X)=\sum_{1\leqslant k\leqslant X} e(f_n(k)) \quad (k\in\mathbb{N},\, X\in\mathbb{R},\, X\geqslant 1).$$

Поведение тригонометрических сумм и близких к ним сумм тесно связано с поведением средних значений модуля $S(X)$, т.е. интеграла

$$J=J_n(X,l)=\int_{\mathbb{T}^n}|S_n(X)|^{2l}d\alpha_1\dots d\alpha_l \quad (l\in\mathbb{R},\, l\geqslant 0).$$

Разработка и развитие метода тригонометрических сумм были связаны с оценками J методом И.М. Виноградова, полученными Виноградовым и его последователями. Важное продвижение было сделано С. Б. Стечкиным в 1975 году [27].

Теорема 1. *Пусть*

$$n,r\in\mathbb{N},\, n\geqslant 2,\, l\in\mathbb{R},\, l\geqslant rn,\, X\in\mathbb{R},\, X\geqslant 1.$$

Тогда

$$J_n(X,l)\leqslant D(r,n)X^{2l-\frac{n(n+1)}{2}+(n^2/2)(1-1/n)^r},$$

где

$$D(r,n)=\exp\left(C_0\min(r,n)n^2\log n\right)$$

и C_0 — абсолютная константа.

В дальнейшем появилось много работ, связанных с теоремой о среднем И.М. Виноградова (оценке $J_n(X,l)$). Ж. Бурган, С. Деметер и Л. Гуф [7] нашли правильный показатель степени от X, доказав, что для любого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$J_n(X,l)\leqslant C(n,l,\varepsilon)X^{\varepsilon+\max(l,2l-\frac{n(n+1)}{2})}.$$

Этот впечатляющий результат имеет интересные приложения к ряду теоретико–числовых задач. Однако, в некоторых приложениях оценка С. Б. Стечкина работает лучше, так как в ней получена хорошая граница для коэффициента при степени X, в то время как в [7] значение $C(n, l, \varepsilon)$ слишком велико.

Работа [27] выполнена в стиле Сергея Борисовича: при исследовании величин, зависящих от нескольких параметров, он старался найти ее порядок, равномерный по всем параметрам, или хотя бы получить возможно лучшие оценки по всем параметрам, не удовлетворяюсь зависимостью от какого-то одного параметра. Такой подход в теоретико–числовых задачах является очень полезным.

4. С. Б. Стечкин проявлял большой интерес к оценке рациональных тригонометрических сумм. Пусть f — многочлен с целыми коэффициентами и q — натуральное число. Рассматриваются полные рациональные тригонометрические суммы

$$S(f, q) = \sum_{k=1}^{q} e(f(x)/q).$$

Изучение таких сумм легко сводится к случаю

$$(a_1, \ldots, a_n, q) = 1, \tag{1}$$

где

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Если $\deg f = n$ и выполнено условие (1), то будем писать, что $f \in K_n(q)$. Рассмотрим величину

$$H_n(q) = \sup_{f \in K_n(q)} |S(f, q)|.$$

В.И. Нечаев [20] доказал, что

$$H(n, q) \leqslant A(n) q^{1-1/n},$$

где $A(n) \leqslant \exp(5n^2/\log n)$ для $n \geqslant 3$. С. Б. Стечкин [29] установил, что можно взять

$$A(n) \leqslant \exp(n + O(n/\log n)).$$

Последняя оценка не улучшена, т.е. оказалась устойчивой по Стечкину — так Сергей Борисович называл результаты, не обязательно окончательные, но остающиеся незыблемыми в течение 30 и более лет.

В той же работе С. Б. Стечкин изучал величину $\rho(f, q)$ — количество сравнения $f(x) \equiv 0 \bmod q$. Снова вопрос сводится к случаю $f \in K_n(q)$. С.В. Конягин [14] определил величину

$$c_n = \sup_{q, f \in K_n(q)} |S(f, q)|/q^{1-1/n}$$

и показал, что $c_n = n/e + O(\log^2 n)$ при $n \geqslant 2$. Позже он и С. Б. Стечкин [16] установили, что $c_n \leqslant n$, то есть для любого многочлена $f \in K_n(q)$ справедливо неравенство

$$|S(f, q)| \leqslant n q^{1-1/n}.$$

5. Если многочлен f является одночленом, то рациональные тригонометрические суммы являются суммами Гаусса

$$S_n(a, q) = \sum_{k=1}^{q} e(a x^n/q).$$

Опять же они сводятся к случаю $(a,q)=1$. В 1975 году С. Б. Стечкин опубликовал статью [28], в которой изучал суммы Гаусса. Обозначим

$$A_n^* = \sup_{(a,q)=1} |S_n(a,q)|/q^{1-1/n}.$$

Г.Х. Харди и Д.Э. Литтлвуд [32], стр. 11–12, доказали, что $A_n^* < \infty$, а И.М. Виноградов [11], стр.38, приводит оценку

$$A_n^* \leqslant n^{n^6}.$$

Очевидно, Иван Матвеевич ставил своей целью оценить A_n^* возможно более простым образом, не гоняясь за точностью оценки.

С. Б. Стечкин [28] кардинально улучшил оценку на A_n^*, доказав, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C(n/\varphi(n))^2\right).$$

Отсюда и из известной границы функции $n/\varphi(n)$ вытекает, что

$$A_n^* \leqslant \exp\left(C'(\log\log n)^2\right) \quad (n \geqslant 3).$$

В статье был поставлен вопрос: верно ли, что величина A_n^* не превосходит абсолютной константы?

С. Б. Стечкин показал, что рассмотрение сумм Гаусса сводится к случаю, когда они берутся по простому модулю. Пусть p — простое число. Нетрудно показать, что если $d=(n,p-1)$, то $S_n(a,p)=S_d(a,p)$. Поэтому при исследовании сумм Гаусса по простому модулю можно считать, что n делит $p-1$. Харди и Литтлвуд [32], стр. 175, доказали, что

$$|S_n(a,p)| \leqslant (n-1)\sqrt{p}.$$

Эта оценка становится хуже тривиальной, если $n > \sqrt{p}+1$. Для доказательства ограниченности A_n^* при $n\to\infty$ следовало получить нетривиальные оценки на $|S_n(a,p)|$ при $p^{1/2-\delta} \leqslant n \leqslant p^{1/2+\delta}$ для некоторого $\delta>0$. Ограниченность A_n^* при $n\to\infty$ разными способами доказали И.Е. Шпарлинский [33] и Конягин [15]; позже они объединили усилия, рассмотрели ряд близких задач и приложений и написали книгу [17].

Тематика, связанная с оценками сумм Гаусса и их обобщениями, получила мощный импульс в нулевых годах нашего столетия после того, как ею заинтересовался Жан Бурган ([2]-[9]). Его вклад в развитие этого направления был в 2010 году отмечен Shaw Prize.

Если отвлечься от денежной составляющей этой премии (1 миллион долларов), то можно утверждать, что данная история является характерной для творчества Сергея Борисовича. Ему принадлежит ряд статей, каждая из которых привела к созданию большого и активно развивающегося направления в математике. И его работа [28] является одной из таких статей.

3. Заключение

Сергей Борисович всегда умел отделить зерна от плевел, занимаясь важными и перспективными задачами. Он обладал выдающимся научным чутьем, поэтому и сейчас его задачи и результаты, в том числе и по теории чисел, сохраняют актуальность. И многие его начинания имели и имеют свое продолжение в работах его учеников и последователей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В. В., Кондратьев В. П. Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1990. Том 47, №1. С. 15–28.

2. Bourgain, J. Mordell's exponential sum estimate revisited // Journal of the American Mathematical Society. 2005. Vol. 18. № 2, P. 477–499.

3. Bourgain, J. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // International Journal of Number Theory. 2005. Vol. 1, №1. P. 1-32.

4. Bourgain, J. On the construction of affine extractors // Geom. funct. anal. 2007. Vol. 17. P. 33–57.

5. Bourgain, J. Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources // Geom. funct. anal. 2009. Vol. 18. P. 1477–1502.

6. Bourgain, J. On exponential sums in finite fields // An Irregular Mind, Janos Bolyai Mathematical Soceity, Budapest. 2010. P. 219–242.

7. Bourgain J., Demeter C., Guth L. Proof of the main conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for degrees higher than three // Ann. Math. 2016. Vol. 184, № 2. P. 633–682.

8. Bourgain, J., Glibichuk, A. Exponential sims estimates over a subgroup in an arbitrary finite fields //J. Anal. Math. 2011. Vol. 115. P. 51–70.

9. Bourgain, J., Konyagin S. V. Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 2003. vol. 337.

10. Vallée Poussin C. J. La fonction zéta de Riemann et les nombres premiers en général // Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I. 1896.

11. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел // Труды МИАН. 1947. Том 23.

12. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$// Изв. АН СССР, сер. матем. 1958. Том 22, № 2. С. 161–164.

13. Кондратьев В. П. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1977. Том 22, №3. С. 371-374.

14. Конягин С. В. О числе решений сравнения n-й степени с одним неизвестным // Матем. сб. 1979. Том 109 (151), №2 (6) С. 171–187.

15. Конягин С. В. Об оценках сумм Гаусса и проблеме Варинга по простому модулю // Труды МИАН. 1992. Том 198. С. 111–124.

16. Конягин С. В., Стечкин С. Б. Оценка числа решений сравнения n-й степени с одним неизвестным // Теория приближений. Гармонический анализ, Сборник статей, посвященный памяти профессора Сергея Борисовича Стечкина, Тр. МИАН. 1997. Том 219, Наука, М. С. 249–257.

17. Konyagin S., Shparlinski I. Character sums with exponential functions and their applications // Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1999. 163 p.

18. Коробов Н. М. Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук. 1958. Том 13, № 4 (82). С. 185–192.

19. Xylouris T. On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions // Acta Arithm. 2011. Vol. 150, № 1. P. 65–91.

20. Нечаев В. И. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Матем. заметки. 1975. Том 17, №6. С. 839–849.

21. Попов А. Ю. Работы С. Б. Стечкина по теории чисел // Фунд. прикл. матем. 1997. Том 3, № 4. С. 1029–1042.

22. Попов А. Ю., Стечкин С. Б. Асимптотическое распределение простых чисел в среднем // Успехи матем. наук. 1996. Том 51, № 6 (312). С. 21–88.

23. Резцов А. В. Некоторые экстремальные свойства неотрицательных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1986. Том 39, №2. С. 245–252.

24. Стечкин С. Б. Простое доказательство теоремы Чебышёва о простых чисел // Успехи матем. наук. 1968. Том 23, № 5 (143). С. 221–222.

25. Стечкин С. Б. О некоторых экстремальных свойствах положительных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1970. Том 7, №4. С. 411–422.

26. Стечкин С. Б. О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1970. Том 8, № 4. С. 419–429.

27. Стечкин С. Б. О средних значениях модуля тригонометрической суммы // Теория функций и ее приложения, Сборник статей. Посвящается академику Сергею Михайловичу Никольскому к его семидесятилетию, Тр. МИАН СССР. 1975. Том 134. С. 283–309.

28. Стечкин С. Б. Оценка сумм Гаусса // Матем. заметки. 1975. Том 17, №4. С. 579–588.

29. Стечкин С. Б. Оценка полной рациональной тригонометрической суммы // Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР. 1977. Том 143. С.188–207.

30. Стечкин С. Б. Рациональные функции и нули дзета–функции Римана // Труды МИАН. 1989. Том 189. С. 110–116.

31. Ford K. Zero–free regions for the Riemann zeta function // in: Number Theory for the Millenium (Urbana, Il., 2000) (Bennett V. F., Berndt D. C., Boston N., Diamond H. G., Hildebrand A. G. and Philipps, eds). Vol. 2. 2002. P. 25–56.

32. Hardy G. H., Littlewood J. E. Some problems of "Partitio Numerorum":VI. Further researches in Waring's problem // Math. Zeitschr. 1925. Vol. 23. № 1. P. 1–37.

33. Шпарлинский И. Е. Об оценках сумм Гаусса // Матем. заметки, 1991. Том 50, №1. С. 122–130.

REFERENCES

1. Arestov, V. V., Kondrat'ev, V. P., "Certain extremal problem for nonnegative trigonometric polynomials", *Math. Notes*, vol. 47, no. 1, pp. 10–20.

2. Bourgain, J., 2005, "Mordell's exponential sum estimate revisited", *Journal of the American Mathematical Society*, vol. 18, no. 2, pp. 477–499.

3. Bourgain, J., 2005, "More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications", *International Journal of Number Theory*, vol. 1, no. 01, pp. 1-32.

4. Bourgain, J., 2007, "On the construction of affine extractors", Geom. funct. anal. vol. 17, pp. 33–57.

5. Bourgain, J., 2009, "Multilinear exponential sums in prime fields under optimal entropy condition on the sources", *Geom. funct. anal.*, vol. 18, pp. 1477–1502.

6. Bourgain, J., 2010, "On exponential sums in finite fields" *An Irregular Mind, Janos Bolyai Mathematical Soceity, Budapest*, pp. 219–242.

7. Bourgain, J., Demeter, C., Guth, L. 2016, "Proof of the main conjecture in Vinogradov's Mean Value Theorem for degrees higher than three", *Ann. Math.*, vol. 184, no. 2, pp. 633–682.

8. Bourgain, J., Glibichuk, A., 2011, "Exponential sims estimates over a subgroup in an arbitrary finite fields", *J. Anal. Math.*, vol. 115, pp. 51–70.

9. Bourgain, J., Konyagin S. V., 2003, "Estimates for the number of sums and products and for exponential sums over subgroups in fields of prime order", *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, vol. 337.

10. Vallée Poussin, C. J., 1896, "La fonction zéta de Riemann et les nombres premiers en général", *Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér.*.

11. Vinogradov, I. M., 1947, "The method of trigonometric sums in the theory of numbers", *Trudy Mat. Inst. Steklov*, vol. 23; reprinted in his Selected works, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1952; English transl., Interscience, 1954.

12. Vinogradov, I. M., 1958, "New estimate for function $\zeta(1+it)$", *Izv. AN USSR ser. matem.*, vol. 22, no. 2, pp. 161-164 [in Russian].

13. Kondrat'ev, V. P., 1977, "Some extremal properties of positive trigonometric polynomials", *Math. Notes*, vol. 22, no.3, pp. 696–698.

14. Konyagin, S. V., 1980, "On the number of solutions of an nth degree congruence with one unknown", *Math. USSR-Sb.*, vol. 37, no. 2, pp. 151–166.

15. Konyagin S. V., 1994, "On estimates of sums of Gauss and Waring's problem for prime module", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 198, pp. 105–117.

16. Konyagin, S. V., Stechkin, S. B. , 1997, "An Estimate of the Number of Solutions of the nth Degree Congruence in One Variable", *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 219, pp. 245–253.

17. Konyagin, S. V., Shaprlinski, I. E., "Character Sums with Exponential Functions and their Applications", Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1999. 163 p.

18. Korobov, N. M., 1958, “Estimates for trigonometric sums and its applications”, *Uspekhi. matem. nauk*, vol. 13, no.4 (82), pp. 185–192 [in Russian].

19. Xylouris, T., 2011, “On the least prime in an arithmetic progression and estimates for the zeros of Dirichlet L-functions”, *Acta Arithm.*, vol. 150, no. 1, pp. 65–91.

20. Nechaev, V. I., 1975, “Estimate of a complete rational trigonometric sum”, *Math. Notes*, vol. 17, no. 6, pp. 504–511.

21. Popov, A. Yu., 1997, “Stechkin’s works in number theory”, *Fund. prikl. matem.*, vol. 3, no 4., pp. 1029–1042 [in Russian].

22. Popov, A. Yu., Stechkin, S. B., 1996, “The asymptotic distribution of prime numbers on the average”, *Russian Math. Surveys*, vol. 51, no. 6, pp. 1025–1092.

23. Reztsov A. V., 1986, “Some extremal properties of nonnegative trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 39, no. 2, pp. 133–137.

24. Stechkin, S. B., 1968, “A simple proof of Chebyshev’s theorem on prime numbers”, *Uspekhi matem. nauk*, vol. 23, no. 5 (143), pp. 221–222.

25. Stechkin, S. B., 1970, “Some extremal properties of positive trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 7, no. 4, pp. 248–255.

26. Stechkin, S. B., 1970, “Zeros of the Riemann zeta-function”, *Math. Notes*, vol. 8, no. 4, pp. 706–711.

27. Stechkin, S. B., 1975, “Mean values of the modulus of a trigonometric sum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 134, pp. 321–350.

28. Stechkin, S. B., 1975, “An estimate of Gaussian sums”, *Math. Notes*, vol. 17, no. 4, pp. 342–349.

29. Stechkin, S. B., 1980, “An estimate of a complete rational trigonometric sum”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 143, pp. 201–220.

30. Stechkin, S. B., 1990, “Rational inequalities and zeros of the Riemann zeta function”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 189, pp. 127–134.

31. Ford, K., 2002, “Zero–free regions for the Riemann zeta function”, *Number Theory for the Millenium* (Urbana, Il., 2000) (Bennett V. F., Berndt D. C., Boston N., Diamond H. G., Hildebrand A. G. and Philipps, eds), vol. 2, pp. 25–56.

32. Hardy, G. H., Littlewood, J. E., 1925, “Some problems of "Partitio Numerorum:VI.Further researches in Waring’s problem”, *Math. Zeitschr.*, vol. 23, no. 1, pp. 1–37.

33. Shparlinskii, I. E., 1991, “Estimates of Gaussian sums”, *Math. Notes*, vol. 50, no. 1, pp. 740–746.

Получено 11.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.