

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 519.21

О СКОРОСТИ ДОСТИЖЕНИЯ ТОЧНЫХ ГРАНИЦ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА В ПРОБЛЕМЕ ГЕККЕ-КЕСТЕНА ¹

А. В. Шутов (г. Владимир)

Аннотация

В работе для иррациональностей с ограниченными неполными частными разложения в цепную дробь доказано, что время ε -приближения к точной границе остаточного члена в проблеме Гекке-Кестена обратно пропорционально ε .

Ключевые слова: равномерное распределение, проблема Гекке-Кестена, теорема о трех длинах.

ON THE SPEED OF ATTAINMENT OF THE REMAINDER TERM EXACT BOUNDARIES IN THE HECKE-KESTEN PROBLEM

A. V. Shutov (Vladimir)

Abstract

For irrationalities of bounded combinatorial type it is proved that the time of ε -approximation of exact boundary of the remainder term in Hecke-Kesten problem is inversely to ε .

Keywords: uniform distribution, Hecke-Kesten problem, three length theorem.

1. Введение

Для любого иррационально α и любого интервала $I \subset [0; 1)$ определим величину

$$N(\alpha, n, I) = \#\{i : 0 \leq i < n, \{i\alpha\} \in I\},$$

подсчитывающую количество точек последовательности $\{i\alpha\}$, попавших в интервал I . Здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть числа.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00578-а.

Согласно теореме Вейля о равномерном распределении [12], справедлива асимптотическая формула

$$N(\alpha, n, I) = n|I| + o(n). \quad (1)$$

Обозначим через $r(\alpha, n, I)$ остаточный член данной асимптотики, то есть

$$r(\alpha, n, I) = N(\alpha, n, I) - n|I|$$

и

$$r(\alpha, n, I) = o(n).$$

Гекке [7] показал, что для интервалов I , удовлетворяющих условию $|I| \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ справедлива значительно более сильная асимптотическая формула

$$r(\alpha, n, I) = O(1). \quad (2)$$

Более того, им была доказана оценка

$$|r(\alpha, n, I)| \leq |h(I)|, \quad (3)$$

где $h(I)$ – единственное целое число, удовлетворяющее условию $|I| - h(I)\alpha \in \mathbb{Z}$.

Позднее Кестен [8] доказал, что из оценки (2) вытекает, что $|I| \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, а также высказал гипотезу о возможности существенного усиления оценки (3). Соответствующие интервалы I будем называть интервалами ограниченного остатка. Оценка (3) в дальнейшем улучшалась в целом ряде работ, например в [3], [4], [5], [11]. Точная по порядку $h(I)$ оценка $r(\alpha, n, I)$ для интервалов ограниченного остатка была доказана в работе [2].

Пусть I – произвольный интервал ограниченного остатка. Определим точные границы остаточного члена $r(\alpha, n, I)$ на этом интервале

$$r^+(\alpha, I) = \sup_n r(\alpha, n, I),$$

$$r^-(\alpha, I) = \inf_n r(\alpha, n, I).$$

Точные формулы для $r^+(\alpha, I)$ и $r^-(\alpha, I)$ были получены в работе [1].

Пусть $\varepsilon \in (0; r^+(\alpha, I) - r^-(\alpha, I))$. Определим величины

$$S^+(\alpha, I, \varepsilon) = \min\{n : r(\alpha, n, I) > r^+(\alpha, I) - \varepsilon\}, \quad (4)$$

$$S^-(\alpha, I, \varepsilon) = \min\{n : r(\alpha, n, I) < r^-(\alpha, I) + \varepsilon\}, \quad (5)$$

$$S(\alpha, I, \varepsilon) = \max\{S^+(\alpha, I, \varepsilon), S^-(\alpha, I, \varepsilon)\}.$$

Величина $S(\alpha, I, \varepsilon)$ характеризует скорость достижения точных границ $r^+(\alpha, I)$ и $r^-(\alpha, I)$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть I – интервал ограниченного остатка и все неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены. Тогда справедлива оценка

$$S(\alpha, I, \varepsilon) \leq \frac{(1 + C(\alpha))|h(I)|}{\varepsilon}, \quad (6)$$

где $C(\alpha)$ – наибольшее из неполных частных разложения α в цепную дробь.

Автор благодарит Владимира Георгиевича Журавлева за постановку задачи.

2. Время первого попадания точки в интервал

Для произвольного интервала $I \subset [0; 1)$ определим величину

$$n(\alpha, I) = \min\{i \geq 0 : \{i\alpha\} \in I\},$$

описывающую время первого попадания точек последовательности $\{i\alpha\}$ в интервал I . Также определим величину

$$n(\alpha, \varepsilon) = \sup_{I, |I|=\varepsilon} n(\alpha, I).$$

Из теоремы Вейля о равномерном распределении (1) легко следует оценка

$$n(\alpha, \varepsilon) \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil,$$

где $\lceil \cdot \rceil$ – верхняя целая часть числа. Цель данного параграфа состоит в доказательстве верхней оценки для $n(\alpha, \varepsilon)$.

Пусть $\{q_i\}$ – последовательность неполных частных разложения α в цепную дробь, а $\{Q_i\}$ – последовательность знаменателей подходящих дробей к α . Нам потребуется следующий результат [9].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $T(\alpha, t)$ – разбиение интервала $[0; 1)$ точками $\{i\alpha\}$, $0 \leq i < Q_t + Q_{t-1}$. Тогда наибольшая из длин интервалов разбиения $T(\alpha, t)$ равна $\|Q_{t-1}\alpha\|$, где $\|\cdot\|$ – расстояние до ближайшего целого.

Отметим, что теорема 2 является частным случаем хорошо известной теоремы о трех длинах [6], [10].

ЛЕММА 1. Пусть $|I| > \|Q_{t-1}\alpha\|$. Тогда $n(\alpha, I) < Q_t + Q_{t-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, то есть $n(\alpha, I) \geq Q_t + Q_{t-1}$. Тогда интервал I не содержит точек из разбиения $T(\alpha, t)$. Это означает, что I содержится в некотором интервале J этого разбиения. При этом $|J| > |I| > \|Q_{t-1}\alpha\|$, что противоречит теореме 2.

ЛЕММА 2. Пусть $|I| > \frac{1}{Q_t}$. Тогда $n(\alpha, I) < Q_t + Q_{t-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство немедленно вытекает из леммы 1 и оценки $\|Q_{t-1}\alpha\| < \frac{1}{Q_t}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$t(\varepsilon) = \min\{t : Q_t > \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Тогда

$$n(\alpha, \varepsilon) < \frac{q_{t(\varepsilon)} + 1}{\varepsilon}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть I – интервал с $|I| = \varepsilon$. Тогда, в силу определения $t(\varepsilon)$, имеем $|I| > \frac{1}{Q_{t(\varepsilon)}}$. Применяя лемму 2, получаем, что

$$\begin{aligned} n(\alpha, I) &< Q_{t(\varepsilon)} = q_{t(\varepsilon)}Q_{t(\varepsilon)-1} + Q_{t(\varepsilon)-1} = \\ &= (q_{t(\varepsilon)} + 1)Q_{t(\varepsilon)-1}. \end{aligned}$$

По определению $t(\varepsilon)$,

$$Q_{t(\varepsilon)-1} < \frac{1}{\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$n(\alpha, I) < \frac{q_{t(\varepsilon)} + 1}{\varepsilon}.$$

Для доказательства (7) остается заметить, что последняя оценка не зависит от выбора конкретного интервала I длины ε .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены и

$$C(\alpha) = \max_i q_i(\alpha).$$

Тогда

$$n(\alpha, \varepsilon) < \frac{1 + C(\alpha)}{\varepsilon}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство немедленно вытекает из теоремы 3 и определения $C(\alpha)$.

3. Доказательство теоремы 1

Перейдем к доказательству теоремы 1. Доказательства в случаях $h(I) > 0$ и $h(I) < 0$ полностью аналогичны, поэтому мы приведем рассуждения только для случая $h(I) > 0$.

Пусть I – интервал ограниченного остатка с $h = h(I) > 0$. Тогда можно записать $I = [\delta; \delta + \{h\alpha\})$.

В работе [7] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Справедливо равенство*

$$r(\alpha, n, I) = \{h\alpha\} + \sum_{i=1}^h (\{(i-n-1)\alpha + \delta\} - \{i\alpha + \delta\}). \quad (9)$$

Пусть

$$C_h(\alpha, x) = \sum_{i=1}^h \{(i-1)\alpha + \delta - x\}.$$

Тогда (9) переписывается в виде

$$r(\alpha, n, I) = C_h(\alpha, \{n\alpha\}) + D_h(\alpha),$$

где

$$D_h(\alpha) = \{h\alpha\} - C_h(\alpha, -\alpha)$$

не зависит от n . Пусть

$$C_h^+ = \sup_n C_h(\alpha, \{n\alpha\}),$$

$$C_h^- = \inf_n C_h(\alpha, \{n\alpha\}).$$

Поскольку дробные доли $\{n\alpha\}$ равномерно распределены на $[0; 1)$, имеем

$$C_h^+ = \sup_{x \in [0; 1)} C_h(\alpha, x),$$

$$C_h^- = \inf_{x \in [0; 1)} C_h(\alpha, x).$$

Тогда определения (4) и (5) могут быть переписаны в виде

$$S^+(\alpha, I, \varepsilon) = \min\{n : C_h(\alpha, \{n\alpha\}) > C_h^+ - \varepsilon\},$$

$$S^-(\alpha, I, \varepsilon) = \min\{n : C_h(\alpha, \{n\alpha\}) < C_h^- + \varepsilon\}.$$

Пусть теперь

$$J^+(\varepsilon) = \{x \in [0; 1) : C_h(\alpha, x) > C_h^+ - \varepsilon\},$$

$$J^-(\varepsilon) = \{x \in [0; 1) : C_h(\alpha, x) < C_h^- + \varepsilon\}.$$

Тогда

$$S^+(\alpha, I, \varepsilon) = n(\alpha, J^+(\varepsilon)), \quad (10)$$

$$S^-(\alpha, I, \varepsilon) = n(\alpha, J^-(\varepsilon)), \quad (11)$$

В работе [1] показано, что функция $C_h(\alpha, x)$, рассматриваемая как функция $x \in [0; 1) = \mathbb{S}^1$, является кусочно-линейной функцией, определенной на окружности единичной длины, причем ее точками нелинейности являются в точности точки вида $x_i = \{i\alpha + \delta\}$, $i = 1, 2, \dots, h-1$. Эти точки разбивают интервал $[0; 1)$

на h интервалов $J_0, J_1, \dots, J_{h-1}$. На каждом интервале J_k функция $C_h(\alpha, x)$ является линейной и может быть записана в виде

$$C_h(\alpha, x) = -hx + j_k \quad (12)$$

с некоторым эффективно вычислимым j_k . При этом

$$j_k \neq j_{k+1}. \quad (13)$$

Пусть

$$C_{h,k}^+ = \sup_{x \in J_k} C_h(\alpha, x),$$

$$C_{h,k}^- = \inf_{x \in J_k} C_h(\alpha, x).$$

Определим интервалы

$$J_k^+(\varepsilon) = \{x \in J_k : C_h(\alpha, x) = -hx + j_k > C_{h,k}^+ - \varepsilon\},$$

$$J_k^-(\varepsilon) = \{x \in J_k : C_h(\alpha, x) = -hx + j_k < C_{h,k}^- + \varepsilon\},$$

Кусочно-линейная функция, определенная на окружности, может принимать экстремальные значения только в точках нелинейности. Поэтому существуют k_{min} и k_{max} такие, что

$$C_h^+ = C_{h,k_{max}}^+,$$

$$C_h^- = C_{h,k_{min}}^-.$$

Тогда

$$J_{k_{max}}^+(\varepsilon) \subseteq J^+(\varepsilon),$$

$$J_{k_{min}}^-(\varepsilon) \subseteq J^-(\varepsilon).$$

Заметим, что данное включение не обязано быть равенством множеств в силу возможной неединственности значений k_{min} и k_{max} .

Отсюда, (10) и (11) переписываются в виде

$$S^+(\alpha, I, \varepsilon) \leq n(\alpha, J_{k_{max}}^+(\varepsilon)), \quad (14)$$

$$S^-(\alpha, I, \varepsilon) \leq n(\alpha, J_{k_{min}}^-(\varepsilon)), \quad (15)$$

Из (12) и (13), получаем, что

$$|J_{k_{max}}^+(\varepsilon)| = |J_{k_{min}}^-(\varepsilon)| = \frac{\varepsilon}{h}$$

и, следовательно,

$$S(\alpha, I, \varepsilon) \leq n(\alpha, \frac{\varepsilon}{h}).$$

Для завершения доказательства теоремы 1 нам остается только воспользоваться оценкой (8).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красильщиков В. В., Шутов А. В. Описание и точные значения максимума и минимума остаточного члена проблемы распределения дробных долей // Математические заметки. 2011. Т. 89, вып. 1. С. 43—52.
2. Шутов А. В. Оптимальные оценки в проблеме распределения дробных долей на множествах ограниченного остатка // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2007. Вып. 7(57) С. 168—175.
3. Шутов А. В. О распределении дробных долей // Чебышевский сборник. 2004. Т. 5, вып. 3. С. 112—121.
4. Шутов А. В. О распределении дробных долей II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. Ун-та, 2005. Вып 3. С. 146—158.
5. Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 3. С. 110—128.
6. Floreik K. Une remarque sur la repartition des nombres $m\xi \bmod 1$ // Coll. Math. Wroclaw. 1951. Vol. 2. P. 323—324.
7. Hecke E. Eber Analytische Funktionen und die Verteilung van Zahlen mod Eins // Math. Sem. Hamburg Univ. 1921. Vol. 5. P. 54—76.
8. Kesten H. On a conjecture of Erdős and Szűsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arithmetica. 1966. Vol. 12. P. 193—212.
9. Siegel A. Theoreme des trois longueurs et suites sturmiennes: mots d'agencement des longueurs // Acta Arithmetica. 2001. Vol. 97. P. 195—210.
10. Slater N. B. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$ // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1967. Vol. 63. P. 1115—1123.
11. Shutov A. V. New estimates in the Hecke-Kesten problem // Anal. Probab. Methods Number Theory. Edited by E. Manstavičius et al. Vilnius: TEV, 2007.
12. Weyl H. Über die Gibbs'sche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene // Rendicontidel Circolo Mathematico di Palermo. 1910. Vol. 30. P. 377—407.

Владимирский Государственный Университет
Поступило 5.05.2013