ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316

Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации
пластических деформаций¹

В. А. Левин, К. М. Зингерман, К. Ю. Крапивин, М. Я. Яковлев

Владимир Анатольевич Левин — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной механики механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Константин Моисеевич Зингерман — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики, Тверской государственный университет (г. Тверь).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Кирилл Юрьевич Крапивин — ООО «Фидесис» (г. Москва).

e-mail: k.krapivin@gmail.com

Максим Яковлевич Яковлев — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Аннотация

В статье предложен метод спектральных элементов, построенных на полиноме Лежандра для плоских стационарных задач упруго-пластического течения при больших деформациях. Метод спектральных элементов основывается на вариационном принципе, методе Галеркина. Решение указанных задач обладает феноменом локализации пластических деформаций в узких областях - линиях скольжения. Исследована возможность применения спектрального элемента для численного решения указанных задач с разрывными решениями. Условие текучести материала - критерий Мизеса. Напряжения интегрируются методом радиального возврата по неявной обратной схеме Эйлера. Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Ньютона. Приведено численное решение примера растяжения полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием, в плоском напряженном и плоском деформированном состояниях. Получены кинематические поля и предельная нагрузка. Приведены сравнения численных результатов с аналитическим решением, полученным для несжимаемых сред, построенным методом характеристик.

Ключевые слова: спектральный элемент, феномен локализации, пластичность, метод характеристик, конечные деформации, итерационный метод Ньютона

Библиография: 20 названий.

¹Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках базовой части Государственного задания по научной деятельности (проект № 9.7446.2017/8.9) в части, связанной с математической постановкой задачи, при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Москвы в рамках научного проекта № 19-38-70001 в части, связанной с разработкой математического метода и алгоритма решения задачи, и за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10008) в части, связанной с разработкой и верификацией программного обеспечения и анализом результатов расчетов.

Для цитирования:

В. А. Левин, К. М. Зингерман, К. Ю. Крапивин, М. Я. Яковлев. Спектральный элемент Лежандра в задачах локализации пластических деформаций // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 306–316.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 517.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-306-316

Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains²

V. A. Levin, K. M. Zingerman, K. Yu. Krapivin, M. Ya. Yakovlev

Vladimir Anatolyevich Levin — Doctor of physical and mathematical sciences, professor, Professor of the department of computational mechanics of the faculty of mechanics and mathematics of Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: v.a.levin@mail.ru

Konstasntin Moiseevich Zingerman — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair of mathematical modeling and computational mathematics, Tver State University (Tver).

e-mail: zingerman@rambler.ru

Kirill Yurievich Krapivin — CAE Fidesys (Moscow).

e-mail: k.krapivin@gmail.com

Maksim Yakovlevich Yakovlev — candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University (Moscow).

e-mail: m.ya.yakovlev@yandex.ru

Abstract

In paper the method of spectral elements based on the Legendre polynomial for time-independent elastic-plastic plane problems at large strains is proposed. The method of spectral elements is based on the variational principle (Galerkin's method). The solution of these problems has the phenomenon of localization of plastic deformations in narrow areas called slip-line or shear band. The possibility of using a spectral element for the numerical solution of these problems with discontinuous solutions is investigated. The yield condition of the material is the von Mises criterion. The stresses are integrated by the radial return method by backward implicit Euler scheme. The system of nonlinear algebraic equations is solved by the Newton's iterative method. A numerical solution is given of an example of stretching a strip weakened by cuts with a circular base in a plane stress and plane deformed state. Kinematic fields and limit load are obtained. Comparisons of numerical results with the analytical solution obtained for incompressible media constructed by the method of characteristics are presented

²This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of the basic part of the Government task for scientific activity (project No. 9.7446.2017 / 8.9) in the part related to the mathematical formulation of the problem, with financial support from the Russian Foundation of Basic Research and the Moscow Government (project No. 19-38-70001) in the part related to the development of the mathematical method and algorithm for problem solving, with financial support from the Russian Science Foundation (project No. 19-71-10008) in the part related to development and verification of software and analysis of calculation results.

Keywords: spectral method, localization phenomenon, plasticity, slip-line, finite strains, iterative Newton's method

Bibliography: 20 titles.

For citation:

V. A. Levin, K. M. Zingerman, K. Yu. Krapivin, M. Ya. Yakovlev. 2020, "Legendre spectral element for plastic localization problems at large scale strains", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 306–316.

1. Введение

Пластическое течение как металлов, так и геоматериалов, при значительных деформациях имеет свойство локализации пластических деформаций в некоторой области. При определенных условиях напряженно-деформированного состояния известен феномен интенсивной локализации сдвиговых пластических деформаций в узких областях, называемых линиями скольжения (shear band). Феномен достаточно хорошо изучен и описан в литературе [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Теоретический анализ, приведенный в литературе, показывает равенство нулю толщины линий скольжения и также, вызываемые их наличием, неединственность и разрывность решения.

Сложность конечно-элементного моделирования процесса формирования линий скольжения связана с тем, что стандартные конечно-элементные формулировки не допускают разрывных решений внутри элементов.

В данной статье для приближенного моделирования разрывных решений используются полиномиальные элементы высокого порядка, называемые спектральными элементами. Первоначально спектральный элемент, построенный на полиноме Чебышева, был предложен для задач вычислительной гидродинамики [14]. В работе [15] спектральный элемент предложен с полиномом Лежандра. Отметим связь задачи об определении узлов интерполяции в спектральном элементе с задачей построения оптимальных кубатурных формул [16]. Спектральные элементы являются аналогом $h-p$ элемента [13]; применяются в различных дисциплинах: гидродинамика, акустические волны, геофизика, медицина. В задачах упруго-пластического деформирования метод не сильно распространен, например, в [20] рассмотрены задачи упругости для околонежимаемых сред; в [18, 19] рассмотрено применение метода к пластическому деформированию сыпучих дилатирующих сред; обоими авторами решение получено с определяющими соотношениями в малых деформациях.

В данной статье метод спектральных элементов на указанных задачах исследован, учитывая конечность деформаций. Формирование линий скольжения рассмотрено на примере растяжения полосы, ослабленной вырезами с круговым основанием в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний. Для данного примера существует построенное в рамках несжимаемого тела аналитическое решение. Ранее в [21] смоделировано развитие больших деформаций в объемном случае с локализацией и образованием “шейки”, применяя стандартный квадратичный изопараметрический конечный элемент.

2. Основные уравнения

2.1. Формулировка задачи

Рассматривается статическая задача с учетом конечности деформаций. Уравнение равновесия без инерционных членов в координатах деформированного состояния:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \text{ на } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{t}_n \text{ на } \Gamma_t,\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ — напряжения Коши, f — вектр массовых сил

Уравнение равновесия в слабой формулировке:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta u \cdot t_n d\Gamma_t, \quad (2)$$

где δu — вариация допустимых перемещений.

2.2. Спектральная интерполяция

Перемещение ищется в виде:

$$\mathbf{u} = \sum_a^n N_a(\xi) \bar{\mathbf{u}}_a. \quad (3)$$

В спектральном элементе Лежандра функция формы элемента N_a определяется как тензорное произведение одномерных полиномов Лагранжа степени $n = N - 1$ в узлах интерполяции Гаусса - Лобатто - Лежандра (GLL)

$$l_a^n(\xi) = \prod_{b=1; a \neq b}^N \frac{\xi - \xi_b}{\xi_a - \xi_b}$$

$$N_a = l_i^n(\xi_a) l_j^n(\eta_a),$$

где $i \leq N, j \leq N$ — индексы узла a , ξ, η — координаты на референсном квадрате. Координаты точек GLL определяются как корни уравнения: $(1 - \xi^2)P'_n(\xi) = 0$, где P_n — полином Лежандра степени n .

Для случая $n = 1$ получается простой результат для изопараметрического элемента: $N_a = \frac{1}{4}(1 + \xi_a \xi)(1 + \eta_a \eta)$.

2.3. Кинематические соотношения

Аффино́р деформаций определяется через градиент вектора перемещений $\mathbf{u}$ следующим образом [12]:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I} + \overset{0}{\nabla} \mathbf{u}. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичный тензор.

Тензорные меры деформаций Грина $\mathbf{C}$ и Фингера $\mathbf{b}$ определяются через аффино́р деформаций:

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\Psi}^*, \quad \mathbf{b} = \boldsymbol{\Psi}^* \cdot \boldsymbol{\Psi},$$

символ $*$ обозначает транспонирование.

Соотношение для кратности изменения элементарного объёма:

$$J = \det \boldsymbol{\Psi}. \quad (5)$$

Тензор деформации Грина:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

Вариация тензора деформации Грина выражается через вариацию тензора малых деформаций ε и аффинов деформаций:

$$\delta E_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \Psi_{ik} \Psi_{jl} = \delta \varepsilon_{ij} \Psi_{ik} \Psi_{jl}$$

2.4. Уравнения Галеркина

Подставляя перемещения (3) в уравнения в слабой формулировке (2) получим систему уравнений Галеркина при больших деформациях:

$$K \mathbf{u} = F,$$

$$\begin{aligned} \text{где } K &= \int_{\Omega} B^T \mathbf{a}_{\text{ер}} B d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial N_b}{\partial x_j} d\Omega, \\ F &= \int_{\Omega} N^T f d\Omega + \int_{\Gamma_t} N^T \bar{t}_n d\Gamma_t - \int_{\omega} B^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega, \\ B_a &= \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial N}{\partial x_2} & \frac{\partial N}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\mathbf{a}_{\text{ер}}$ — линеаризованная тангенциальная определяющая матрица.

Система нелинейных алгебраических уравнений решается итерационным методом Ньютона - Рафсона. Для улучшения сходимости используется метод продолжения по параметру.

2.5. Определяющие соотношения для упругопластического материала

В случае конечных деформаций аффинов деформаций можно разложить на упругую и пластическую мультипликативные составляющие [8, 9]: $\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}^p \cdot \boldsymbol{\Psi}^e$.

Упругое поведение материала характеризуется определяющими соотношениями для гиперупругого материала. Эти соотношения записываются в виде, который позволяет не использовать объективные скорости напряжений. Функция накопленной энергии деформации (упругий потенциал) представляется следующим образом:

$$\mathcal{W} = U(J^e) + W(\bar{\mathbf{b}}^e) = \frac{1}{2} K \left(\frac{1}{2} (J^{e^2} - 1) - \ln J^e \right) + \frac{1}{2} \mu (\text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) - 3), \quad (6)$$

где $\bar{\mathbf{b}}^e = \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{e*} \cdot \bar{\boldsymbol{\Psi}}^e$ — сохраняющая объем часть тензора меры упругих деформаций Фингера; $\bar{\boldsymbol{\Psi}}^e = J^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{\Psi}^e$ — сохраняющая объем часть аффинора упругой деформации; K, μ — упругие модули объемного сжатия и сдвига; tr — первый инвариант тензора второго ранга.

Тензор напряжений Кирхгофа выражается через упругий потенциал следующим образом:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \boldsymbol{\Psi}^{e*} \cdot \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{C}^e} \cdot \boldsymbol{\Psi}^e. \quad (7)$$

Для упругого потенциала, записанного в форме (6), выражение (7) имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{K}{2} J^e \left(J^e - \frac{1}{J^e} \right) \mathbf{I} + \mu \text{dev}[\bar{\mathbf{b}}^e],$$

здесь dev — девиатор тензора. Напряжения Коши связаны с напряжениями Кирхгофа:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \boldsymbol{\tau}$$

Условие пластичности Мизеса, записанное в напряжениях Кирхгофа:

$$f_y(\boldsymbol{\tau}, \alpha) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| - (h(\alpha) + \sigma_0), \quad (8)$$

где $\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| = \sqrt{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) \cdot \text{dev}(\boldsymbol{\tau})}$, σ_0 — предел текучести, $h(\alpha)$ — функция упрочнения. Ассоциированный с функцией (8) закон течения [10]:

$$\dot{\mathbf{C}}^{p-1} = -\frac{2}{3}\lambda \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \boldsymbol{\Psi}^{-1*} \cdot \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{-1}, \quad \mathcal{L}_v \bar{\mathbf{b}}^e = -\frac{2}{3}\lambda \text{tr}(\bar{\mathbf{b}}^e) \cdot \mathbf{n}, \quad (9)$$

где $\mathcal{L}_v$ — производная Ли, $\mathbf{n} = \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|}$ — нормаль к поверхности напряжений, λ — множитель Лагранжа, для условия Мизеса равный:

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda$$

Замыкающими соотношениями, котрым соответствует внутренняя переменная α являются условие Куна - Таккера:

$$f(\tau, \alpha) \leq 0, \dot{\alpha} \geq 0, \dot{\alpha} f(\tau, \alpha) = 0$$

и условие совместности:

$$\lambda \dot{f}(\tau, \alpha) = 0. \quad (10)$$

Уравнения (9) интегрируются по обратной неявной схеме Эйлера; обновление напряжений производится методом радиального возврата [11].

Линеаризованная тангенциальная определяющая матрица выписывается из условия совместности (10):

$$\mathbf{a}_{ep} = \mathbf{a}_e - \frac{\nabla_{\sigma} f^T \mathbf{a}_e \otimes \mathbf{a}_e^T \nabla_{\sigma} f}{\mathcal{H} + \nabla_{\sigma} f^T \mathbf{a}_e \nabla_{\sigma} f}$$

3. Метод характеристик

В случае несжимаемого материала при малых деформациях решение плоской задачи восстанавливается методом характеристик [1, 2, 3].

В плоском деформированном состоянии система уравнений равновесия является гиперболической, линии скольжения являются ее характеристиками. Направления α и β линий скольжения определяются свободной от нагрузок формой границы. В нашем случае полосы с вырезами с круговым основанием семейства α и β будут гиперболическими спиралями, Рис. 1а. Окружное напряжение в окрестности вырезов определяется по формуле $\sigma_{\phi} = \sigma_0 \ln(1 + \frac{r}{a})$, где r расстояние от центра окружности. Элементарная предельная нагрузка равна $P_0^* = \frac{4}{\sqrt{3}} h \sigma_0$, σ_0 — предел текучести. Отношение P^*/P_0^* (коэффициент усиления) выражается следующей формулой:

$$P^*/P_0^* = (1 + \frac{a}{h}) \ln(1 + \frac{h}{a}).$$

Угол γ половины раствора дуги AB , Рис. 1а, зависит от h : $\gamma = \ln(1 + \frac{h}{a})$.

В плоском напряженном состоянии решение получено в [3]. В окрестности свободной границы уравнения гиперболические. Два семейства α и β , исходящих от границы линий (Рис. 1б) в точке O сливаются в одну линию, где уравнения становятся параболическими. Элементарная предельная нагрузка равна $P_0^* = 2h\sigma_0$. Отношение P^*/P_0^* при $h \leq 1.07$ равняется:

$$P^*/P_0^* \approx 1 + 0.23 \frac{h}{a + h}$$

Рис. 1: Вид линий скольжения в области пластического течения

4. Результат численного решения

Полоса шириной $2l = 200\text{мм}$, высотой $4l$ имеет вырезы с круговыми основаниями радиуса $a = l/2$, ширина шейки $h = a$, $h = 1.07a$ в случаях плоского деформированного и плоского напряженного состояний, соответственно. Рассчитана четверть полосы с условиями симметрии на границах; на верхней границе прикладывается перемещение, Рис. 1, 2. Материал рассмотрен близким к несжимаемому с модулем Юнга $E = 100\text{ГПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.49$ и постоянным пределом текучести $\sigma_0 = 5\text{МПа}$; упрочнение и разупрочнение не применяются.

Зависимости предельной нагрузки от перемещения показаны на Рис. 3. Из рисунка видно соответствие численных значений с аналитическими. Локализация пластических деформаций начинается при достижении нагрузкой максимального значения. На Рис. 4, 5 показана динамика формирования линий скольжения. С увеличением степени интерполяции элемента толщина линий уменьшается. Вдоль линий скольжения в плоском напряженном состоянии в отличие от плоского деформированного состояния наблюдается разрыв не только касатель-

Рис. 2: Конечно-элементная сетка

(a) Плоское деформированное состояние

(b) Плоское напряженное состояние

Рис. 3: Зависимость коэффициента усиления предельной нагрузки от удлинения

Рис. 4: Формирование линий скольжения в плоском деформированном состоянии. Интенсивность пластических деформаций.

Рис. 5: Формирование линий скольжения в плоском напряженном состоянии. Интенсивность пластических деформаций.

ных перемещений, но и нормальных. В местах локализации при дальнейшем деформировании образуется “шейка”.

Вычисления на элементе первого порядка показали невозможность ни при каком измельчении сетки получить линии скольжения, а также завышенную оценку предельной нагрузки.

5. Заключение

С помощью спектрального элемента высокого порядка в условиях плоского деформированного и плоского напряженного состояний получены локализации деформаций вдоль линий скольжения, геометрически соответствующие теоритическим. В процессе расчета линии формируются автоматически без дополнительных вмешательств: адаптивного измельчения сетки, критериев локализации или ограничений в определяющие соотношения вдоль направлений локализации. С увеличением порядка спектрального элемента градиент возрастает, толщина линий уменьшается. Заметим, что линейный изопараметрический элемент не позволяет достичь линий скольжения и дает грубое приближение предельной нагрузки, значительное превышающее теоритическое значение. В будущем планируем провести численный анализ для дилатирующих сред, пластическое поведение которых зависит от вида напряженного состояния.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. 1969. Наука, Москва. 420 стр.
2. Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. Физматлит, Москва, 2001. 704 стр.
3. Соколовский В. В. Теория пластичности, 3-е изд. 1969. Наука, Москва. 608 стр.
4. Rice J.R. The Localization of Plastic Deformation. Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics. W.T. Koiter. NorthHolland Publishing Co. 1976. Vol. 1. P. 207-220.
5. Tvergaard V., Needleman A., Lo K. K. Flow localization in the plane strain tensile test. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1981. Vol. 29. Issue 2. P. 115-142.
6. Needleman A., Rice J. R. Limits to ductility set by plastic flow localization. Mechanics of Sheet Metal Forming. 1978. P. 237-264.
7. Hill R., Hutchinson J. W. Bifurcation phenomena in the plane tension test. J. Mech. Phys. Solids. 1975. Vol. 23. P. 239-264.
8. Lee E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
9. Mandel, J. Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique. Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics. 1966. P. 502-509.
10. Simo J. C., Hughes T. J. R. Computational Inelasticity, Vol. 7. 1998. Springer Verlag. New York. 392 p.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics. Seventh Edition. Elsevier, 2014
12. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980. – 512 стр.

13. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
14. Patera A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3), 468–488.
15. Rønquist, E.M. and Patera, A.T. (1987), A Legendre spectral element method for the Stefan problem. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24: 2273-2299. doi:10.1002/nme.1620241204
16. Шабозов М. Ш. (2014). Об одной оптимальной кубатурной формуле для классов функций, задаваемых модулями непрерывности. *Модел. и анализ информ. систем*. Т. 21, вып. 3. С. 91–105.
17. Liu, Z. L., Menouillard, T. and Belytschko, T. (2011). An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation. *International Journal of Fracture*, 169(2), 183–198.
18. Gharti H. N., Komatitsch D., Oye V., Martin R. and Tromp J. (2012). Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 91(1), 1-26.
19. Gharti H. N., Oye V., Komatitsch D. and Tromp J., (2012) Simulation of multistage excavation based on a 3D spectral-element method, *Computers & Structures*, V. 100–101. P. 54-69. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.005
20. Peet Y. T. and Fischer P. F. (2014) Legendre spectral element method with nearly incompressible materials, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, V. 44, P. 91-103.
21. Абрамов С.М., Амелькин С.А., Ключев Л.В., Крапивин К.Ю., Ножницкий Ю.А., Серветник А.Н., Чичковский А.А. Использование программы Фидесис для моделирования развития больших пластических деформаций во вращающемся диске. *Чебышевский сборник*. 2017;18(3):15-27.

REFERENCES

1. *Kachanov L. M.* Foundations of the theory of plasticity. Amsterdam: North-Holland, 1971. 482 p.
2. *Ishlinskii A. Yu., Ilev D. D.* Mathematical Theory of Plasticity (in Russian). Fizmatlit, Moscow, 2001. 704 p.
3. *Sokolovsky W. W.* Theory of Plasticity (in Russian), 3rd ed. 1969. Nauka, Moscow. 608 p.
4. Rice J.R. The Localization of Plastic Deformation. *Proceedings of the 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics*. W.T. Koiter. NorthHolland Publishing Co. 1976. Vol. 1. P. 207-220.
5. Tvergaard V., Needleman A., Lo K. K. Flow localization in the plane strain tensile test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1981. Vol. 29. Issue 2. P. 115-142.
6. Needleman A., Rice J.R. Limits to ductility set by plastic flow localization. *Mechanics of Sheet Metal Forming*. 1978. P. 237-264.
7. Hill R., Hutchinson J.W. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*. 1975. Vol. 23. P. 239-264.

8. Lee E.H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. *Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36. Issue 1. P. 1-6.
9. Mandel, J. Contribution theorique a l'etude de l'ecrouissage et des lois de l'ecoulement plastique. *Proceedings of the 11th International Congress on Applied Mechanics*. 1966. P. 502-509.
10. Simo J. C., Hughes T. J. R. *Computational Inelasticity*, Vol. 7. 1998. Springer Verlag. New York. 392 p.
11. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D.* The finite element method for solid and structural mechanics. Seventh Edition. Elsevier, 2014
12. *Lurie A.I.* Nonlinear theory of elasticity. M.: Nauka, 1980. – 512p.
13. Babuška I., Suri M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 80, Issues 1–3, 1990, P. 5-26
14. Patera A. T. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, 54(3), 468–488.
15. Rønquist, E.M. and Patera, A.T. (1987), A Legendre spectral element method for the Stefan problem. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 24: 2273-2299. doi:10.1002/nme.1620241204
16. Shabozov M.S. (2014) On an Optimal Quadrature Formula for Classes of Functions Given by Modulus of Continuity. *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*. V. 21, No. 3. P. 91–105. (in Russian).
17. Liu, Z. L., Menouillard, T. and Belytschko, T. (2011). An XFEM/Spectral element method for dynamic crack propagation. *International Journal of Fracture*, 169(2), 183–198.
18. Gharti H. N., Komatitsch D., Oye V., Martin R. and Tromp J. (2012). Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 91(1), 1-26.
19. Gharti H. N., Oye V., Komatitsch D. and Tromp J., (2012) Simulation of multistage excavation based on a 3D spectral-element method, *Computers & Structures*, V. 100–101. P. 54-69. doi: 10.1016/j.compstruc.2012.03.005
20. Peet Y. T. and Fischer P. F. (2014) Legendre spectral element method with nearly incompressible materials, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, V. 44, P. 91-103.
21. Abramov S.M., Amel'kin S.A., Kljuev L.V., Krapivin K.J., Nozhnickij J.A., Servetnik A.N., Chichkovskij A.A. Modeling the development of large plastic deformations in a rotating disk it the fidesys program. *Chebyshevskii Sbornik*. 2017;18(3):15-27. (In Russ.)

Получено 11.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.