ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-262-271

Математическое моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов

И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева

Игорь Константинович Архипов — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
Влада Игоревна Абрамова — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: abramova_vi@mail.ru
Александр Евгеньевич Гвоздев — доктор технических наук, профессор, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru
Ольга Владимировна Кузовлева — кандидат технических наук, доцент, доцент, Российский государственный университет правосудия (г. Москва).
e-mail: kusovleva@yandex.ru

Аннотация

В работе представлен обзор математических моделей, позволяющих определить эффективные упругие характеристики различных типов композиционных материалов. Рассмотрены наиболее известные модели: вириальное разложение, метод самосогласования, корреляционное приближение, сингулярное приближение. Рассмотрены модели со слоистой структурой и матричные системы с регулярной структурой.

Ключевые слова: композиты, математические модели, моделирование, пластичность, прочность, упругость.

Библиография: 11 названий.

Для цитирования:
И. К. Архипов, В. И. Абрамова, А. Е. Гвоздев, О. В. Кузовлева. Математическое моделирование свойств упругости в механике композиционных материалов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 262–271.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 539.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-262-271

Mathematical modeling of elasticity properties in the mechanics of composite materials

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva

Igor Konstantinovich Arkhipov — doctor of technical Sciences, Professor, Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

Vlada Igorevna Abramova — candidate of technical Sciences, associate Professor, Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

e-mail: abramova_vi@mail.ru

Alexandr Evgenievich Gvozdev — doctor of engineering, Professor, Professor, Tula state pedagogical University L.N. Tolstoy (Tula).

e-mail: gwozdew.alexandr2013@yandex.ru

Olga Vladimirovna Kuzovleva — candidate of technical Sciences, docent, docent, Russian State University of justice (Moscow).

e-mail: kusovleva@yandex.ru

Abstract

This paper presents an overview of mathematical models that allow us to determine the effective elastic characteristics of various types of composite materials. The most well-known models are considered: virial decomposition, self-matching method, correlation approximation, and singular approximation. Models with a layered structure and matrix systems with a regular structure are considered.

Keywords: composites, mathematical models, modeling, plasticity, strength, elasticity.

Bibliography: 11 titles.

For citation:

I. K. Arkhipov, V. I. Abramova, A. E. Gvozdev, O. V. Kuzovleva, 2020, "Mathematical modeling of elasticity properties in the mechanics of composite materials", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 262–271.

1. Введение

В данной работе произведен обзор математических моделей упругих характеристик широкого класса композиционных материалов. Рассматриваются наиболее известные математические модели: вириальное разложение, метод самосогласования, корреляционное приближение, сингулярное приближение, теории случайных функций. Применение этих моделей рассмотрено для композитов со случайными неоднородностями, для слоистых материалов и для матричных систем с регулярной структурой.

Современные композиты представляют собой широкий спектр материалов, в которых тем или иным способом смешаны несколько изотропных или анизотропных компонентов. Предполагается, что механические свойства каждого из компонентов известны. Известна также структура (распределение) компонентов в объеме материала. Основная задача состоит в математическом определении эффективных свойств, которые можно также определить экспериментально путем механических испытаний. Эти эффективные свойства при их математическом моделировании позволяют оптимально проектировать материал с учетом влияния структуры и технологии изготовления композита. В данной работе эта задача рассматривается только для моделирования эффективных упругих свойств композита.

2. Общая постановка задачи

Если в многокомпонентной среде композиционного материала каждый компонент подчиняется закону Гука, то и весь композит подчиняется закону Гука:

$$\sigma = c\varepsilon. \tag{1}$$

В такой записи тензор с будет оставаться постоянным внутри зерна неоднородности и меняться скачком при переходе в другое зерно. Поэтому с может быть представлен в виде:

$$c = \langle c \rangle + c', \tag{2}$$

где $\langle c \rangle$ — среднее значение, c' — флуктуационная составляющая.

Относительно средних значений закон Гука может быть записан в виде:

$$\langle \sigma \rangle = c_* \langle \varepsilon \rangle \tag{3}$$

где c_* — тензор эффективных упругих характеристик.

Если удается найти этот тензор, то легко можно найти эффективные технические модули упругости E_*, K_*, μ_* и коэффициент Пуассона ν_*.

Определим среднее напряжение равенством:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{\triangle\, V} \int\limits_{\triangle V} \sigma dV. \tag{4}$$

Здесь в качестве элемента объема $\triangle\, V$ следует брать область, достаточно большую по сравнению с характерным размером элемента неоднородности (например, средним диаметром зерна). В этом случае возникает понятие представительного объема. Под этим определением понимается такой объем, который характеризует равенство объемной плотности одного компонента в этом объеме объемной плотности этого компонента во всем материале.

Из соотношения (4) получим известное правило смесей:

$$\langle \sigma \rangle = \vartheta_1 \sigma_1 + \vartheta_2 \sigma_2, \tag{5}$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — объемные концентрации компонентов, σ_1 и σ_2 — тензоры средних напряжений в компонентах. Правило смесей обобщается и на случай большего числа компонентов.

Разложим в равенстве (1) все величины на регулярные и флуктуационные и осредним полученные выражения. Тогда имеем:

$$\langle \sigma \rangle = \langle c \rangle \langle \varepsilon \rangle + \langle c' \varepsilon' \rangle. \tag{6}$$

Если выразить флуктуационные составляющие полей деформаций ε' через средние значения, то получим:

$$\varepsilon' = P \langle \varepsilon' \rangle. \tag{7}$$

Тогда эффективные коэффициенты упругости могут быть получены по формуле:

$$c_* = \langle c \rangle + \langle c' P' \rangle. \tag{8}$$

Компоненты тензора P' должны представлять собой некоторые интегральные операторы, зависящие от координат. Упругое поле в точке должно определяться не только средними значениями напряжений, но оно будет зависеть от напряженного состояния в соседних областях. Вычисление оператора P' сводится к известной задаче многих тел, и поэтому может быть выполнено лишь приближенно. Рассмотрим различные математические модели, которые с тем или иным приближением позволяют вычислить эффективные характеристики тензора c_*.

3. Вириальное разложение

В этом случае для эффективного тензора c_* используется разложение в ряд по степеням объемной концентрации одного из компонентов:

$$c_* = \sum_{n=0}^{\infty} c^{(n)} \vartheta^n, \tag{9}$$

где ϑ — меньшая из концентраций.

Область применения метода ограничена малыми концентрациями одного из компонентов. В этом случае взаимным влиянием включений в матрице можно пренебречь, а среднее напряжение в матрице будет равно приложенному внешнему напряжению σ_0. После решения соответствующей краевой задачи [1] эффективный объемный модуль и эффективный модуль сдвига определяется по формулам [1]:

$$K_* = K_2 \left[1 + \frac{3(1-\nu_2)(K_1 - K_2)\vartheta_1}{2K_2(1-2\nu_2) + K_1(1+\nu_2)} \right] \tag{10}$$

$$\mu_* = \mu_2 \left[1 + \frac{15(1-\nu_2)(\mu_1 - \mu_2)\vartheta_1}{\mu_2(7-5\nu_2) + 2\mu_1(4-5\nu_2)} \right], \tag{11}$$

где знаком 1 отмечены упругие характеристики включения, а знаком 2 — характеристики матрицы, ϑ_i — концентрация компонентов. Частным случаем этой задачи является пористая среда с малой концентрацией пор. Соответствующие формулы для K_* и μ_* имеют вид:

$$K_* = K_2 \left[1 - \frac{3(1-\nu)\vartheta}{2(1-2\nu)} \right] \tag{12}$$

$$\mu_* = \mu_2 \left[1 + \frac{15(1-\nu)\vartheta}{(7-5\nu)} \right], \tag{13}$$

где ϑ — пористость, ν — коэффициент Пуассона матрицы.

4. Метод самосогласования

Напряженное состояние в матрице в данном методе считается средним по всему композиту, и упругие свойства среды определяются эффективными модулями композита в целом. В методе самосогласования принимается вначале, что первая фаза (компонент) представляет собой сферическое включение в матрице с эффективными свойствами, затем это же предположение делается относительно второй фазы. После решения соответствующих краевых задач получены следующие соотношения для эффективных упругих модулей [2]:

$$\frac{\vartheta_1}{1+\alpha\left(\dfrac{K_1}{K_*-1}\right)}+\frac{\vartheta_2}{1+\alpha\left(\dfrac{K_2}{K_*}-1\right)}=1 \tag{14}$$

$$\frac{\vartheta_1}{1+\beta\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_*}-1\right)}+\frac{\vartheta_2}{1+\beta\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_*}-1\right)}=1, \tag{15}$$

$$\text{где } \alpha=\frac{1+\nu}{3(1-\nu)};\quad \beta=\frac{2(4-5\nu)}{15(1-\nu)} \tag{16}$$

$$\nu=\frac{3K_*-2\mu_*}{6K_*+2\mu_*}. \tag{17}$$

В частности для пористых материалов соответствующие формулы имеют вид:

$$\frac{\vartheta}{1-\alpha}+\frac{1-\vartheta}{1+\alpha\left(\dfrac{K_2}{K_*}-1\right)}=1 \tag{18}$$

$$\frac{\vartheta}{1-\beta}+\frac{1-\vartheta}{1+\beta\left(\dfrac{\mu_2}{\mu_*}-1\right)}=1 \tag{19}$$

Метод самосогласования может применяться при любых концентрациях компонентов и не имеет существенных недостатков, свойственных методу вириального разложения.

5. Корреляционное приближение теории случайных функций

Метод основан на приближении, учитывающем малость влияния упругих полей, находящихся на большом удалении от конкретного включения (компонента). Обычно учитывается лишь влияние упругих полей на данное включение от ближайшего включения. Этот метод применим, если разность модулей упругости компонентов невелика. Расчетные зависимости эффективных характеристик содержат корреляционные функции упругих модулей компонентов, которые предполагаются известными. Для определения этих функций решается (приближенно) статистически нелинейная краевая задача теории упругости, которая линеаризуется с учетом вышеуказанного приближения. Уравнение равновесия запишем в операторном виде [3]:

$$LZ=0, \tag{20}$$

$$\text{где } L_{il}=\nabla_k c_{ijkm}\nabla_m;\quad Z_i=U_i. \tag{21}$$

Для изотропных компонентов:

$$c_{ijkm}=KV+2\mu D \tag{22}$$

$$V_{ijkm}=\frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{km}$$

$$D_{ijkm}=\frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jk}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{km}\right).$$

Разбивая операторы и функции на осредненную и флуктуационную составляющие и осредняя получившиеся выражения, имеем:

$$\langle L\rangle\langle Z\rangle+\langle L'Z'\rangle=0. \tag{23}$$

Уравнение для осредненных напряжений и деформаций должно содержать эффективный тензор c_*. Тогда рассмотрим эффективный оператор L_*:

$$L_* = \langle L \rangle + \langle L'X \rangle, \quad Z' = X\langle Z \rangle, \tag{24}$$

где X — неизвестный оператор.

Вычтем (23) из (20), тогда:

$$\langle L \rangle Z' + L'\langle Z \rangle + (L'Z' - \langle L'Z' \rangle) = 0. \tag{25}$$

Скобка, содержащая разность произведений флуктуаций будет весьма малой по сравнению предыдущими слагаемыми, поэтому в корреляционном приближении ею пренебрегают, т.е.:

$$\langle L \rangle Z' + L'\langle Z \rangle = 0. \tag{26}$$

Введем регулярный оператор M_o равенством:

$$M_o\langle Z \rangle = -J, \tag{27}$$

где J – единичный оператор, M_o — интегральный оператор, ядром которого является тензор Грина оператора $\langle L \rangle$. Можно показать, что оператор X связан с оператором M_o формулой:

$$X + M_o L'. \tag{28}$$

Тогда из (24) имеем:

$$L_* = \langle L \rangle + \langle L' M_o L' \rangle = \langle L \rangle + M_o\langle L'L' \rangle. \tag{29}$$

Последнее выражение содержит корреляционную функцию упругих модулей. В явном виде в случае одноосного растяжения $\langle \sigma_1 \rangle = E_*\langle e_1 \rangle$ из работы [4] имеем вместо (29):

$$E_* = \langle E \rangle - \frac{\langle 2\lambda + 7\mu \rangle}{15\langle \mu \rangle\langle \lambda + 2\mu \rangle}[(3D_{\lambda\lambda} + 4D_{\mu\lambda})(1 - 2\nu) + 4D_{\mu\mu}], \tag{30}$$

где $D_{\lambda\lambda} = c_1 c_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$; $D_{\mu\lambda} = c_1 c_2(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2)$; $D_{\mu\mu} = c_1 c_2(\mu_1 + \mu_2)^2$,

где λ_i, μ_i — коэффициенты упругости компонентов, $\lambda_i = K_i - \dfrac{2}{3}\mu_i$, K — объемный модуль, μ — модуль сдвига, c_1, c_2 — объемные концентрации компонентов.

При вычислении корреляционных функций упругих модулей использовалось показательное распределение элементов структуры композита. Применение этого распределения обосновано в работе [5].

6. Метод сингулярного приближения

В корреляционном приближении учитываются лишь парные взаимодействия упругих полей между элементами структуры. Сингулярное приближение позволяет учесть все типы многочастичных взаимодействий. Однако этот учет удается осуществить за счет некоторых упрощающих предположений, которые приводят к размазыванию упругого поля по зерну неоднородности и обращения в ноль дисперсии напряжений и деформаций в пределах фазы.

Основой метода является приближение, основанное на разложении в степенной ряд по операторам X (по формуле (28)) эффективного оператора L_*. При этом члены ряда зависят только от сингулярной части производных тензора Грина. Это соответствует постоянству упругого поля в пределах каждой фазы. Степенной ряд для композитов с изотропными компонентами удается просуммировать. В результате получим расчетные формулы для эффективных модулей упругости [6]:

$$K_* = \langle K \rangle - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (K_1 - K_2)^2}{\vartheta_1 K_2 + \vartheta_2 K_1 + a}, \tag{31}$$

$$\mu_* = \langle \mu \rangle - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{\vartheta_1 \mu_2 + \vartheta_2 \mu_1 + b} \tag{32}$$

$$a = \frac{4}{3}\langle \mu \rangle, \quad b = \frac{1}{6}\frac{\langle \mu \rangle \langle 9K + 8\mu \rangle}{\langle K + 2\mu \rangle}. \tag{33}$$

Угловыми скобками обозначены средние значения, определяемыми по методу смесей ϑ_1 и ϑ_2 — объемные концентрации компонентов.

В частности для пористых композитов имеем:

$$K_* = \vartheta_2 K_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 K_2^2}{\vartheta_1 K_2 + a_1}, \tag{34}$$

$$\mu_* = \vartheta_2 \mu_2 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 \mu_2^2}{\vartheta_1 \mu_2 + b_1}, \tag{35}$$

$$a_1 = \frac{4}{3}\vartheta_2 \mu_2, \quad b_1 = \frac{1}{6}\frac{\vartheta_2 \mu_2 \langle 9K_2 + 8\mu_2 \rangle}{\langle K_2 + 2\mu_2 \rangle}. \tag{36}$$

7. Эффективные упругие модули слоистых материалов

Рассматриваются материалы со слоистой структурой. Все слои обладают свойствами изотропии и имеют одинаковую толщину. В целом такой материал будет трансверсально изотропным [7] и содержать пять независимых констант $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1$. Определение эффективных значений констант в таком материале имеется в работе [8]. В плоскости изотропии — это величины E_1^*, μ_1^*, ν_1^*, в направлении, перпендикулярном слоям E_2^*, μ_2^*. Коэффициент Пуассона в этом направлении зависит от E_1^*, ν_1^* по формуле:

$$E_1^* \nu_1^* = E_2^* \nu_2^*. \tag{37}$$

После решения краевой задачи теории упругости при трансверсальной изотропии слоистого материала получены следующие соотношения для эффективных модулей [9]:

$$c_{11}^* = \langle \chi \rangle - M_\chi^{-1} D_\lambda, \tag{38}$$

$$c_{12}^* = \langle \lambda \rangle - M_\chi^{-1} D_\lambda, \tag{39}$$

$$c_{13}^* = \langle \lambda \rangle - M_\chi^{-1} D_{\lambda\chi}, \tag{40}$$

$$c_{33}^* = \langle \chi \rangle - M_\chi^{-1} D_\chi, \tag{41}$$

$$c_{44}^* = \langle \mu \rangle - M_\mu^{-1} D_\mu, \tag{42}$$

где

$$\begin{aligned} &M_\chi = \vartheta_1 \chi_2 + \vartheta_2 \chi_1, \\ &D_{xy} = \vartheta_1 \vartheta_2 (x_1 - x_2)(y_1 - y_2), \\ &\chi = \lambda + 2\mu; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned}$$

Эффективные модули c_{ij}^* связаны с техническими модулями E_i^* и ν_i^* соотношениями (значок $*$ далее не указан)

$$c_{11} = \frac{E_1^2 E_2}{\triangle}\left(\frac{1}{E_1} - \frac{\nu_1^2}{E_2}\right), \tag{43}$$

$$c_{12} = \frac{E_1^2 E_2}{\triangle}\left(\frac{\nu_1}{E_1} + \frac{\nu_1^2}{E_2}\right), \tag{44}$$

$$c_{13} = \frac{E_1^2 E_2}{\triangle}\nu_2\frac{1+\nu_1}{E_1}, \tag{45}$$

$$c_{33} = \frac{E_2^2}{\triangle}\left(1-\nu_1^2\right), \tag{46}$$

где $\triangle = (1+\nu_1)\left[(1-\nu_1)E_2 - 2\nu_2^2 E_1\right]$; $\nu_2 = \dfrac{E_1}{E_2}\nu_1$.

8. Эффективные модули упругости матричных систем

Рассматриваются регулярные среды, когда все включения имеют одинаковую форму и размеры и расположены на одинаковом расстоянии друг от друга. Таким образом, имеется периодическая (ячеистая) структура. Предполагается, что модули упругости компонентов известны. В работе [10] и [11] получены границы вилки, внутри которых имеются точные значения эффективных модулей K_* и μ_* таких материалов. Для этого использованы решения соответствующих краевых задач теории упругости. В работе [11] границы вилки для K_* и μ_* вычислены для кубической периодической решетки с включениями кубической формы. Элементарная ячейка представляет собой куб с ребром $2a$, в который вложен другой куб, причем ребра ячейки и кубика включения параллельны. Будем обозначать величины, относящиеся к матрице индексом m, а к включению — индексом i, верхнюю границу вилки для эффективных модулей будем отмечать индексом u, а нижнюю — индексом l. Окончательный вид формул для границ вилки следующий [11]:

$$\mu_u = \mu_m M[\alpha\mu_m + (1-\alpha)M]^{-1} \tag{47}$$

$$\mu_l = (1-\alpha)\mu_m + \frac{\alpha\mu_i\mu_m}{\alpha^2\mu_m + (1-\alpha^2)\mu_i} \tag{48}$$

$$\mu_i \leqslant \mu_* \leqslant \mu_u \tag{49}$$

$$K_u = \vartheta_m K_m + \vartheta_i K_i + 3\left[\frac{(K_m f_1 + f_2 f_3)^2}{f_1 + f_3} - f_1 K_m^2 - f_2^2 f_3\right] \tag{50}$$

$$K_l = K_R + \frac{(1-\alpha^2)\mu_m(K_m - K_R)^2}{K_m(3K_m + \mu_m)} + \alpha^2\frac{(1-K_R f_4)^2}{f_4 + 3f_5}, \tag{51}$$

где

$$K_R = \left(\vartheta_m K_m^{-1} + \vartheta_i K_i^{-1}\right)^{-1}$$

$$f_1 = \frac{1-\alpha}{3K_m + 4\mu_m}$$

$$f_2 = \alpha^2 K_i + (1-\alpha^2)K_M$$

$$f_3 = \alpha\left\{3f_2 + 4\left[\alpha^2\mu_i + (1-\alpha^2)\mu_m\right]\right\}^{-1}$$

$$f_4 = \frac{1-\alpha}{K_m} + \frac{\alpha}{K_i}$$

$$f_5 = \frac{1-\alpha}{\mu_m} + \frac{\alpha}{\mu_i}$$
$$K_l \leqslant K_* \leqslant K_u.$$

9. Заключение

В работе рассмотрены различные математические модели, позволяющие теоретически вычислить эффективные упругие характеристики композитов. Следует отметить, что все эти модели были разработаны в $60 \div 70$-х годах XX века. Дальнейшее развитие эти методы и модели получили в связи с появлением и внедрением компьютерных технологий. В частности, значительное продвижение в этом направлении было достигнуто с появлением пакетов прикладных программ, основанных на методе конечных элементов. Решение краевых задач с помощью этих пакетов осуществлялось как для регулярных структур, так и для сред со случайным распределением компонентов. Дальнейшее развитие получило математическое моделирование вязкоупругих и упругопластических свойств композитов. Применение этих моделей было использовано для решения различных прикладных задач пластичности и прочности композитов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кривоглаз М. А., Черевко А. С. Об упругих модулях твердой смеси // Физика металлов и металловедение. 1959. Т.8. № 2. С. 161-164.

2. Канаун С. К. Метод самосогласованного поля в задаче об эффективных свойствах упругого композита // Прикладная механика и техническая физика. 1975. №4. С. 194.

3. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.

4. Архипов И. К., Толоконников Л. А. Эффективные соотношения между напряжениями и деформациями в корреляционной теории упругопластических деформаций // Известия АНСССР. Механика твёрдого тела. Т.2. 1984. С.196–200.

5. Архипов И. К., Герлейн О. В. Корреляционные характеристики пластической жесткости формоизменения хаотически армированного композита. // Известия вузов. Математика. №7, 1982. С. 66–70.

6. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Вычисление эффективных упругих модулей композиционных материалов с учетом многочастичных взаимодействий // Прикладная механика и техническая физика. 1969. №1. С. 51.

7. Лившиц И. М., Розенцвейг Л. Н. К теории упругих свойств поликристаллов. // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1946. Т.11. С. 967.

8. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Статистическое описание упругого поля слоистых материалов. // Инженерно-физический журнал. Механика твёрдого тела. 1968. №4. С. 93.

9. Фокин А. Г., Шермергор Т. Д. Эффективные модули упругости композита, составленного из анизотропных слоев // Механика полимеров. 1975. №3. С. 408.

10. Yeh R. H. T. Variational principles of elastic moduli of composite materials. // J. App. Phys. 1970. №8. p. 3353.

11. Yeh R. H. T. Variational bounds of the elastic moduli of twophase materials. // J.App. Phys. 1971. №3. p. 1101.

REFERENCES

1. Krivoglaz M. A., Cherevko A.S. 1959, «About elastic modules of a solid mixture», *Metal Physics and metal science*, vol.8, no. 2, pp. 161-164.

2. Kanaun S. K. 1975, «Self-consistent field Method in the problem of effective properties of an elastic composite», *Applied mechanics and technical physics*, no. 4, pp. 194.

3. Shermergor T.D. 1977, *Theory of elasticity of micro-homogeneous media.* Moscow. Nauka, 399 pp.

4. Arkhipov I. K., Tolokonnikov L. A. 1984, «Effective relations between stresses and deformations in the correlation theory of elastic-plastic deformations», *Izvestiya ANSSSR. Solid mechanics*, vol.2. pp. 196-200.

5. Arkhipov I. K., Gerlein O. V. 1982, «Correlation characteristics of the plastic stiffness of a chaotically reinforced composite», *News of universities. Mathematics*, no. 7, pp. 66-70.

6. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1969, «Calculation of effective elastic modules of composite materials taking into account multiparticle interactions», *Applied mechanics and technical physics*, no. 1, pp. 51.

7. Livshits I. M., Rosenzweig L. N. 1946, «On the theory of elastic properties of polycrystals», *Journal of experimental and theoretical physics*, vol.11, pp. 967.

8. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1968, «Statistical description of the elastic field of layered materials», *Engineering and physical journal. Solid mechanics*, no. 4, pp. 93.

9. Fokin A. G., Shermergor T. D. 1975, «Effective elastic modulus of a composite composed of anisotropic layers», *Mechanics of polymers*, no. 3, pp. 408.

10. Yeh R. H. T. 1970, «Variational principles of elastic moduli of composite materials», *J. App. Phys*, no. 8, pp. 3353.

11. Yeh R. H. T. 1971, «Variational bounds of the elastic moduli of twophase materials», *J.App. Phys*s, no. 3, pp. 1101.

Получено 11.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.