ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-241-249

Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными

А. В. Родионов

Александр Валерьевич Родионов — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае, выписывается в явном виде множество их локальных минимумов, а также показывается, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра.

Ключевые слова: решётки, гиперболический параметр, локальные минимумы решёток.

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:

А. В. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 241–249.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 517

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-241-249

Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices

A. V. Rodionov

Alexander Valer'evich Rodionov — Senior Lecturer, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry, Tula State University. L. N. Tolstoy (Tula).

e-mail: rodionovalexandr@mail.ru

Abstract

The article considers a variant of the approximation of algebraic lattices by integer ones in the quadratic case, the set of their local minima is written out explicitly, and it is also shown that for these integer approximations of algebraic quadratic lattices it is possible to construct efficient algorithms for calculating the hyperbolic parameter.

Keywords: lattices, hyperbolic parameter, local minima of lattices.

Bibliography: 14 titles.

For citation:

A. V. Rodionov, 2020, “Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 241–249.

*Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому
по случаю его семидесятилетия*

1. Введение

В 1976 году в работах [11] и [12] К. К. Фроловым были предложены алгебраические решётки и соответствующие им алгебраические сетки, на которых достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования на классах Коробова (см. [6], [14]) и правильный порядок гиперболической дзета-функции решёток (см. [3], [4]).

Применение квадратурных формул с алгебраическими сетками на практике затруднено, так как это квадратурные формулы с весами. При оценке погрешности приближенного интегрирования возникают большие величины констант, которые трудно оценить.

Таким образом возникает вопрос о приближении алгебраических сеток рациональными, и так как рациональные параллелепипедальные сетки дают квадратурные формулы с равными весами только в случае, если они образованы точками решётки взаимной к целочисленной решётке, то возникает проблема приближения алгебраической решётки целочисленной решёткой.

В данной статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае, выписывается в явном виде множество их локальных минимумов, а также показывается, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра.

2. Локальные минимумы и гиперболический параметр решётки

В конце девятнадцатого века Г. Ф. Вороной [1] и независимо Г. Минковский [7] среди узлов s -мерной решетки выделили специальное подмножество узлов $\mathfrak{M}(\Lambda)$. Оно состоит из всех ненулевых узлов $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_s)$, для которых не существует ненулевого узла $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ из Λ с $|\eta_i| \leq |\gamma_i|$ при всех $i = 1, \dots, s$ и $|\eta_j| < |\gamma_j|$ хотя бы при одном $i = j$. Элементы множества $\mathfrak{M}(\Lambda)$ называются *относительными минимумами решётки*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Гиперболическим параметром решётки Λ называется число*

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x} \in \Lambda \setminus \{\vec{0}\}} q(\vec{x}),$$

где $q(\vec{x}) = \bar{x}_1 \cdot \dots \cdot \bar{x}_s$ — *усечённая норма вектора $\vec{x}$, $\bar{x} = \max(|x|, 1)$.*

Понятно, что для нахождения гиперболического параметра решётки достаточно вычислить только усечённые нормы её локальных минимумов.

3. Решётка линейного сравнения

Рассмотрим линейное сравнение

$$ax - y \equiv 0 \pmod{N}.$$

Решётка

$$\Lambda(a, N) = \{(m, ma - nN) | m, n \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

является решёткой решений этого сравнения. Её базис имеет вид $\vec{\lambda}_1 = (1, a)$, $\vec{\lambda}_2 = (0, -N)$.

Найдём сначала множество локальных минимумов для решётки линейного сравнения (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Рациональное число $\frac{a}{b}$, ($b > 0$) называется наилучшим приближением второго рода числа α , если из $\frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}$, $0 < d \leq b$ следует, что

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|. \quad (2)$$

ЛЕММА 1. [13, стр. 35] Всякое наилучшее приближение второго рода есть подходящая дробь.

ЛЕММА 2. [13, стр. 36] Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода, за исключением $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$, $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < a < N$, $\Lambda(a, N)$ — решётка, заданная равенством (1), $q_{-1} = 0$, $p_{-1} = 1$, а для $i = 0 \dots l$ $\frac{p_i}{q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{a}{N}$ ($\frac{p_l}{q_l} = \frac{a}{N}$). Тогда множество локальных минимумов

$$\mathfrak{M}(\Lambda(a, N)) = \{\pm(q_i, q_i a - p_i N) | i = -1, 0, \dots, l\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\alpha = \frac{a}{N}$. Из леммы 2 следует, что для любых целых m, n , таких, что $\frac{n}{m} \neq \frac{p_i}{q_i}$, $0 < m \leq q_i$ выполняется неравенство $|q_i \frac{a}{N} - p_i| < |m \frac{a}{N} - n|$. Тогда $|q_i a - p_i N| < |ma - nN|$. Из чего следует утверждение теоремы. $\square$

4. Приближение алгебраической решётки целочисленной

Пусть d — произвольное натуральное число, свободное от квадратов. Рассмотрим квадратичное поле $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_F$ имеет вид: $\mathbb{Z}_F = \{n + m\omega | n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, если $d = 4t + 1$, и $\omega = \sqrt{d}$, если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$.

Через $\Lambda(F)$ обозначим алгебраическую решётку поля F : $\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}$ и $\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}$ — целые алгебраически сопряжённые числа. Если $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$, то базис решётки $\Lambda(F)$ имеет вид $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega; -\omega)$, детерминант решётки $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$. В случае $d = 4t + 1$ базис $\vec{\lambda}_1 = (1, 1)$, $\vec{\lambda}_2 = (\omega; 1 - \omega)$, $\det \Lambda(F) = \sqrt{d}$.

Рассмотрим разложение ω в цепную периодическую дробь:

$$\omega = (a_0; a_1, \dots, a_k, \dots) = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \frac{1}{\ddots}}}}$$

Через $\frac{P_k}{Q_k}$ будем обозначать k -ую подходящую дробь к ω . Таким образом,

$$\omega = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{(-1)^k \theta_k}{Q_k^2}, \quad 0 < \theta_k < 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

Через $\Lambda_k(F)$ обозначается решётка, полученная из $\Lambda(F)$ домножением на Q_k . Она имеет вид

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n\omega)) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3;$$

или

$$\Lambda_k(F) = \{(Q_k(m + n\omega); Q_k(m - n - n\omega)) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1.$$

Через $\Lambda_k(d)$ обозначим целочисленную решётку, заданную равенствами

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 2 \text{ или } d = 4t + 3; \quad (4)$$

или

$$\Lambda_k(d) = \{(Q_k m + P_k n; Q_k m - Q_k n - P_k n) | m, n \in \mathbb{Z}\}, \quad d = 4t + 1. \quad (5)$$

В первом случае базис решётки имеет вид $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, -P_k)$, а её детерминант $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k$. Во втором случае $\vec{\lambda}_{k,1} = (Q_k, Q_k)$, $\vec{\lambda}_{k,2} = (P_k, Q_k - P_k)$, $\det(\Lambda_k(d)) = 2P_k Q_k - Q_k^2$.

Следующая теорема показывает, что решётки (4) и (5) являются решётками решений линейного сравнения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\frac{P_k}{Q_k}$ — k -ая подходящая дробь к ω . Числа a и N определяются следующими равенствами. При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$: $N = 2P_k Q_k$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k)$. При $d = 4t + 1$: $N = 2Q_k P_k - Q_k^2$; $a = (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k)$. Тогда $\Lambda_k(d) = \Lambda(a, N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим унимодулярную матрицу

$$A = (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix}$$

и её действие на базисную матрицу решётки $\Lambda_k(d)$ как матрицы перехода к новому базису.

Докажем утверждение теоремы сначала для случая $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$.

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & -P_k \end{pmatrix} &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & -P_k \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k & P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k \\ P_k Q_k - Q_k P_k & P_k Q_k + Q_k P_k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k) \\ 0 & (-1)^k 2P_k Q_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k) \\ 0 & 2P_k Q_k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $d = 4t + 1$.

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & Q_k - P_k \end{pmatrix} &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} & -Q_{k-1} \\ P_k & -Q_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_k & Q_k \\ P_k & Q_k - P_k \end{pmatrix} = \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} P_{k-1} Q_k - Q_{k-1} P_k & P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k \\ P_k Q_k - Q_k P_k & P_k Q_k + Q_k P_k - Q_k^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k) \\ 0 & (-1)^k (2P_k Q_k - Q_k^2) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & (-1)^k (P_{k-1} Q_k + Q_{k-1} P_k - Q_{k-1} Q_k) \\ 0 & 2P_k Q_k - Q_k^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Понятно, что не любая решётка линейного сравнения представима в виде (4) или (5).

Заметим, что решётка (4) задаётся с помощью чисел P_k и Q_k — числителя и знаменателя k -той подходящей дроби к числу ω . При этом теорема 2 устанавливает, что эта решётка является решёткой линейного сравнения (1) с параметрами a и N . Следующая же теорема обнаруживает связь между разложениями в цепную дробь чисел $\frac{P_k}{Q_k}$ и $\frac{a}{N}$. Для её доказательства

нам понадобятся *скобки Эйлера* (см., например, [10, стр. 35]). Они определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$[] = 1; \quad [a_0] = a_0; \quad [a_0, a_1] = a_0 a_1 + 1; \quad [a_0, \dots, a_{k+1}] = [a_0, \dots, a_k] a_{k+1} + [a_0, \dots, a_{k-1}] \quad (k \geq 0).$$

Полезны следующие свойства скобок Эйлера:

1. $[a_0, \dots, a_k] = [a_k, \dots, a_0]$.
2. $[a_0, \dots, a_k] = [a_0, \dots, a_i][a_{i+1}, \dots, a_k] + [a_0, \dots, a_{i-1}][a_{i+2}, \dots, a_k]$.
3. $[a_0, \dots, a_k][a_1, \dots, a_{k-1}] - [a_0, \dots, a_{k-1}][a_1, \dots, a_k] = (-1)^{k-1}$.

Пусть p_k и q_k — числитель и знаменатель k -той подходящей дроби к данному числу α . Если $\frac{p_k}{q_k}$ — подходящая дробь к разложению числа α в цепную дробь и $a_0, a_1, \dots$ её неполные частные, то $p_k = [a_0, \dots, a_k]$, $q_k = [a_1, \dots, a_k]$.

В дальнейшем будем считать, что $a > 0$, поскольку случай отрицательного a аналогичен рассматриваемому.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k), \quad P_k > Q_k, \quad \frac{a}{N} = \frac{P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k}{2P_kQ_k}.$$

Тогда

$$\frac{a}{N} = (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся свойствами скобок Эйлера для преобразования правой части равенства 6:

$$\begin{aligned} (0; a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_k) &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_1, a_0 + \frac{P_k}{Q_k}]}{[a_k, \dots, a_1, a_0 + \frac{P_k}{Q_k}]} = \\ &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_1] \left(a_0 + \frac{P_k}{Q_k}\right) + [a_{k-1}, \dots, a_2]}{[a_k, \dots, a_1] \left(a_0 + \frac{P_k}{Q_k}\right) + [a_k, \dots, a_2]} = \\ &= \frac{([a_{k-1}, \dots, a_1]a_0 + [a_{k-1}, \dots, a_2])Q_k + [a_{k-1}, \dots, a_1]P_k}{([a_k, \dots, a_1]a_0 + [a_k, \dots, a_2])Q_k + [a_k, \dots, a_1]P_k} = \\ &= \frac{[a_{k-1}, \dots, a_0]Q_k + [a_{k-1}, \dots, a_1]P_k}{2P_kQ_k} = \frac{P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k}{2P_kQ_k}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Как мы видим, для нахождения $\mathfrak{M}(\Lambda(a, N))$ решётки линейного сравнения необходимо разложение числа $\frac{a}{N}$ в цепную дробь. При этом если $a = P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k$ и $N = 2P_kQ_k$, то $l = 2k + 1$.

Однако базис этой решётки ортогонален. Помимо этого для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке. Эти два свойства позволяют находить множество локальных минимумов этой решётки эффективнее.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для $i = 0 \dots k$ $\frac{P_i}{Q_i}$ — i -тая подходящая дробь к дроби $\frac{P_k}{Q_k}$. Тогда множество локальных минимумов решётки (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\Lambda_k(d)) &= \{\pm(Q_k, Q_k), \pm(Q_kP_i + Q_iP_k, Q_kP_i - Q_iP_k), \\ &\quad \pm(Q_kP_i - Q_iP_k, Q_kP_i + Q_iP_k) | i = 0, \dots, k\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу симметрии решётки $\Lambda_k(d)$ достаточно рассматривать только точки решётки вида $(xQ_k + yP_k, xQ_k - yP_k)$, где x и y — неотрицательные целые числа. Докажем, что точки решётки являются относительными минимумами, если $x = P_i$, $y = Q_i$.

При $i = 0$, очевидно, точка (Q_k, Q_k) — относительный минимум (так как $Q_k < P_k$).

Известно, что всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода, и всякое наилучшее приближение второго рода является подходящей дробью. Значит

$$\left| Q_i \cdot \frac{P_k}{Q_k} - P_i \right| < \left| x \cdot \frac{P_k}{Q_k} - y \right|,$$

для всех $x, y \in \mathbb{N}$, $x \leq Q_i$, из чего следует, что

$$|Q_i P_k - Q_k P_i| < |x P_k - y Q_k|.$$

Если же $x > Q_i$ и $|Q_i P_k - Q_k P_i| > |x P_k - y Q_k|$, то $|Q_i P_k + Q_k P_i| < |x P_k + y Q_k|$. $\square$

Установим соответствие между локальными минимумами, выписанными в теоремах 1 и 4 в случае, если $a = P_{k-1}Q_k + Q_{k-1}P_k$ и $N = 2P_kQ_k$.

ЛЕММА 3. Пусть $\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$, $\beta = -1, 1, \dots, k-1$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$. Тогда

$$Q_k P_\beta - Q_i P_k = (-1)^{\beta+1} [a_k, \dots, a_{\beta+2}]. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\beta = k-1$ и $\beta = k-2$ утверждение леммы очевидно:

$$\begin{aligned} Q_k P_{k-1} - Q_{k-1} P_k &= (-1)^k = (-1)^k []; \\ Q_k P_{k-2} - Q_{k-2} P_k &= (-1)^{k-1} a_k = (-1)^{k-1} [a_k]. \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta_\beta = Q_k P_\beta - Q_i P_k$. Тогда по индукции

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta-1} &= Q_k P_{\beta-1} - Q_{\beta-1} P_k = Q_k (P_{\beta+1} - a_{\beta+1} P_\beta) - P_k (Q_{\beta+1} - a_{\beta+1} Q_\beta) = \Delta_{\beta+1} - a_{\beta+1} \Delta_\beta = \\ &= (-1)^{\beta+2} [a_k, \dots, a_{\beta+3}] - (-1)^{\beta+1} a_{\beta+1} [a_k, \dots, a_{\beta+2}] = (-1)^\beta [a_k, \dots, a_{\beta+1}], \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. $\square$

ЛЕММА 4. Пусть $\frac{P_k}{Q_k} = (a_0; a_1, \dots, a_k)$, $\beta = -1, 1, \dots, k$, $P_{-1} = 1$, $Q_{-1} = 0$. Тогда

$$Q_k P_\beta + Q_\beta P_k = [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, a_\beta]. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\beta = -1$ и $\beta = 0$:

$$\begin{aligned} Q_k P_{-1} + Q_{-1} P_k &= Q_k = [a_1, \dots, a_k]; \\ Q_k P_0 + Q_0 P_k &= a_0 [a_k, \dots, a_1] + [a_k, \dots, a_0] = 2a_0 [a_k, \dots, a_1] + [a_k, \dots, a_2] = [a_k, \dots, a_1, 2a_0]. \end{aligned}$$

Обозначим $\Delta_\beta = Q_k P_\beta + Q_i P_k$. Тогда по индукции

$$\begin{aligned} \Delta_{\beta+1} &= Q_k P_{\beta+1} + Q_{\beta+1} P_k = Q_k (a_{\beta+1} P_\beta + P_{\beta-1}) + P_k (a_{\beta+1} Q_\beta + Q_{\beta-1}) = a_{\beta+1} \Delta_\beta + \Delta_{\beta-1} = \\ &= a_{\beta+1} [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_\beta] + [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{\beta-1}] = [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{\beta+1}], \end{aligned}$$

что и доказывает лемму. $\square$

ТЕОРЕМА 5. Пусть

$$\beta_i = \begin{cases} -1 + k - i, & \text{при } i = -1, 0, \dots, k-1, \\ -1 - k + i, & \text{при } i = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{cases} \quad (9)$$

Тогда

- $(q_i, q_i a - p_i N) = (-1)^{\beta_i+1} (Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = -1, 0, \dots, k-1$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k, Q_k)$, при $i = k$,
- $(q_i, q_i a - p_i N) = (Q_k P_{\beta_i} + Q_{\beta_i} P_k, Q_k P_{\beta_i} - Q_{\beta_i} P_k)$ при $i = k+1, k+2, \dots, 2k+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать $q_{-1} = 0$. Тогда согласно теореме 3

$$q_i = \begin{cases} 0, & \text{при } i = -1, \\ [a_k, \dots, a_{k-i+1}], & \text{при } i = 0, 1, \dots, k-1, \\ Q_k, & \text{при } i = k, \\ [a_k, \dots, a_1, 2a_0, a_1, \dots, a_{i-k-1}] & \text{при } i = k+1, k+2, \dots, 2k+1. \end{cases}$$

Теперь непосредственная подстановка значений β_i из (9) в равенства (7) и (8) даёт утверждение теоремы. $\square$

5. Заключение

В статье рассматривается вариант приближения алгебраических решёток целочисленными в квадратичном случае. Также мы видим, что приближения алгебраических решёток при $d = 4t + 1$ и при $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ существенно отличаются.

При $d = 4t + 2$ или $d = 4t + 3$ решётка $\Lambda_k(d)$ обладает свойством, что для любой точки решётки (x, y) точка (y, x) также принадлежит этой решётке. Это обстоятельство позволяет находить множество локальных минимумов эффективнее.

При $d = 4t + 1$ решётка $\Lambda_k(d)$ данным свойством уже не обладает. Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Теорема 2 показывает, что решётка $\Lambda_k(d)$ является решёткой линейного сравнения. Как показывают численные эксперименты данное свойство наблюдается не только в квадратичном случае. При больших размерностях приближения алгебраических решёток целочисленными часто оказываются решётками линейного сравнения.

Автор выражает свою благодарность профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вороной Г. Ф. Собрание сочинений в 3-х томах. Т. 1. Изд-во АН УССР, Киев, 1952.
2. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. / Деп. в ВИНТИ 24.08.84, N 6090-84.
3. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Многомерные теоретико-числовые сетки и решётки и алгоритмы поиска оптимальных коэффициентов / Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2012. — 283 с.
4. Л. П. Добровольская, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, Н. Н. Добровольский Гиперболические дзета-функции сеток и решёток и вычисление оптимальных коэффициентов // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 4(44). С. 4-107.
5. Е. И. Климова, Н. Н. Добровольский Квадратичные поля и квадратурные формулы // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 308-310.

6. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. / М.: Физмат-гиз, 1963.
7. Minkowski H. Généralisation de la théorie des fractions continues // Ann. Sci.École Norm. Sup. (3) 13, 1896, pp. 41–60.
8. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3, с. 241-256.
9. А. В. Родионов О рациональных приближениях алгебраических сеток // Материалы XV Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича. – Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2018. С. 321–310.
10. Сушкевич А. К. Теория чисел. Элементарный курс. 1954. 205 с.
11. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 1976. Т. 231. № 4. С. 818–821.
12. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. / Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1979.
13. Хинчин А. Я. Цепные дроби. - Москва: ГИТТЛ, 1949.
14. Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784–802.

REFERENCES

1. Korobov, N. M. 2004, "Numerical-theoretic methods in approximate analysis Moscow: mtsnmo. 288 p.
2. Dobrovolskii N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. / Dep. in VINITI 24.08.84, N 6090-84.
3. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky, N. N. Dobrovolsky, 2012, "Multidimensional number-theoretic grids and lattices and algorithms for finding optimal coefficients", Tula: Publishing house Tul. state ped. University named after L. N. Tolstoy, 283 p.
4. L. P. Dobrovolskaya, M. N. Dobrovolskii, N. M. Dobrovolskii, N. N. Dobrovolskii, 2012, "Hyperbolic zeta functions of grids and lattices and the calculation of optimal coefficients", Chebyshev Collection, vol. 13, iss. 4 (44), pp. 4-107.
5. E. I. Klimova, N. N. Dobrovolsky, 2018, "Quadratic fields and quadrature formulas", Proceedings of the XV International Conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of the doctor Mathematical Sciences, Professor of the Lomonosov Moscow State University Nikolai Mikhailovich Korobov. - Tula: Publishing house of Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy, pp. 308–310.
6. Korobov N. M., "Number-theoretic methods in approximate analysis", M.: Fizmat-giz, 1963.
7. Minkowski H., 1896, "Généralisation de la théorie des fractions continues", Ann. Sci.École Norm. Sup. (3) 13, pp. 41–60.

8. A. V. Mikhlyeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and grids by integer lattices and rational grids", *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, issue 3, pp. 241-256.
9. A. V. Rodionov, 2018, "On rational approximations of algebraic grids", *Proceedings of the XV International Conference Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications dedicated to the centenary of the birth of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Moscow State University named after M.V. Lomonosov Nikolai Mikhailovich Korobov*. - Tula: Publishing house Tul. state ped. un-ta them. L. N. Tolstoy, pp. 321–310.
10. Sushkevich A. K. "Number theory. Elementary course", 1954, 205 p.
11. Frolov K. K., 1976, "Upper bounds for the error of quadrature formulas on classes of functions", *DAN SSSR*. vol. 231. No. 4. pp. 818-821.
12. KK Frolov, 1979, "Quadrature formulas on classes of functions", *Dis. ... Cand. physical-mat. sciences*. Moscow: Computing Center of the USSR Academy of Sciences.
13. A. Ya.Khinchin, "Continued Fractions", Moscow: GITTL, 1949.
14. Sharygin I. F., 1963, "Lower bounds for the error of quadrature formulas on classes of functions", *Journal. calculated mat. and mate. physics*. 7, no. 4. pp. 784–802.

Получено 19.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.