

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток¹

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва

Елена Михайловна Рарова — старший преподаватель кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: rarova82@mail.ru

Николай Николаевич Добровольский — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Аннотация

В работе продолжены исследования авторов по оценке тригонометрических сумм алгебраической сетки с весами с произвольной весовой функцией $r + 1$ порядка.

Для параметра $\vec{m}$ тригонометрической суммы $S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})$ выделены три случая.

Если $\vec{m}$ принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(t(m), \dots, m) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

Если $\vec{m}$ не принадлежит алгебраической решётке $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, то определены два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ минимально. Доказана асимптотическая оценка

$$|S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})| \leq B_r \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

Ключевые слова: алгебраические решётки, алгебраические сетки, тригонометрические суммы алгебраических сеток с весами, весовые функции.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:

Е. М. Рарова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва. Асимптотическая оценка для тригонометрических сумм алгебраических сеток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 232–240.

¹Работа подготовлена по гранту РФФИ №19-41-710004_p_a

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.3

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-232-240

Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids²

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova

Elena Mikhailovna Rarova — senior lecturer of the Department of algebra, mathematical analysis and geometry of Tula state pedagogical University L. N. Tolstoy (Tula).

e-mail: rarova82@mail.ru

Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii — candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Irina Yuryevna Rebrova — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).

e-mail: i_rebrova@mail.ru

Abstract

The paper continues the author's research on the evaluation of trigonometric sums of an algebraic net with weights with the arbitrary weight function of the $r + 1$ order.

For the parameter $\vec{m}$ of the trigonometric sum $S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})$, three cases are highlighted.

If $\vec{m}$ belongs to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then the asymptotic formula is valid

$$S_{M(t), \vec{\rho}}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right).$$

If $\vec{m}$ does not belong to the algebraic lattice $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$, then two vectors are defined $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ and $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ from the conditions $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{K}_\Lambda(\vec{m})$ and the product $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \cdot \dots \cdot \overline{n_s}$ is minimal. Asymptotic estimation is proved

$$|S_{M(t), \vec{\rho}}(\vec{m})| \leq B_r \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{(q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right) \right).$$

Keywords: algebraic lattices, algebraic net, trigonometric sums of algebraic net with weights, weight functions.

Bibliography: 8 titles.

For citation:

E. M. Rarova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, 2020, "Asymptotic estimation for trigonometric sums of algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 232–240.

Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому
по случаю его семидесятилетия

²The work has been prepared by the RFBR grant №19-41-710004_p_a

1. Введение

В данной работе используются обозначения и определения из работ [2]–[6].

Рассматриваются единичные s -мерные кубы

$$\overline{G}_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu \leq 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}, \quad G_s = \{\vec{x} \mid 0 \leq x_\nu < 1, \nu = 1, 2, \dots, s\}.$$

Для произвольного вектора $\vec{x}$ его дробной частью называется вектор $\{\vec{x}\} = (\{x_1\}, \dots, \{x_s\})$. Отсюда следует, что всегда $\{\vec{x}\} \in G_s$.

Далее везде под произвольной решеткой $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$ мы будем понимать только полные решетки, то есть

$$\Lambda = \{m_1 \vec{\lambda}_1 + \dots + m_s \vec{\lambda}_s = \vec{m} \cdot A \mid \vec{m} = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s\},$$

где $\vec{\lambda}_1 = (\lambda_{11}, \dots, \lambda_{1s}), \dots, \vec{\lambda}_s = (\lambda_{s1}, \dots, \lambda_{ss})$ — система линейно-независимых векторов в $\mathbb{R}^s$, а матрица решетки A задана соотношениями

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{s1} & \dots & \lambda_{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \vec{\lambda}_s \end{pmatrix}.$$

Взаимная решетка $\Lambda^* = \{\vec{x} \mid \forall \vec{y} \in \Lambda (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}$. Непосредственно из определения следует равенство $(q\Lambda)^* = \frac{1}{q}\Lambda^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap G_s$. Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1; 1)^s$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой Π рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{\vec{x} \mid \vec{x} = \{\vec{y}\}, \vec{y} \in M_1(\Lambda)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Весовой функцией порядка r с константой B называется гладкая функция $\rho(\vec{x})$, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s = -1}^0 \rho(\vec{x} + (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)) = 1 \quad \text{при } \vec{x} \in G_s, \quad (1)$$

$$\rho(\vec{x}) = 0 \quad \text{при } \vec{x} \notin (-1; 1)^s, \quad (2)$$

$$\left| \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{x}) e^{2\pi i(\vec{\sigma}, \vec{x})} d\vec{x} \right| \leq B(\bar{\sigma}_1 \dots \bar{\sigma}_s)^{-r} \quad \text{для любого } \vec{\sigma} \in \mathbb{R}^s. \quad (3)$$

Если выполнены условия (1) и (2), то говорим просто о весовой функции $\rho(\vec{x})$. Простейшим примером весовой функции является функция $\rho_1(\vec{x}) = \rho_1(x_1) \dots \rho_1(x_s)$, где

$$\rho_1(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{при } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Пусть $\vec{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{s-1})$ — целочисленный вектор такой, что многочлен

$$P_{\vec{a}}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} a_\nu x^\nu + x^s \quad (4)$$

неприводим над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и все корни Θ_ν ($\nu = 1, \dots, s$) многочлена (4) действительные.

Обозначим через $T(\vec{a})$ матрицу степеней алгебраически сопряженных целых алгебраических чисел $\Theta_1, \dots, \Theta_s$ — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$:

$$T(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \Theta_1 & \dots & \Theta_s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Theta_1^{s-1} & \dots & \Theta_s^{s-1} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

а через $\vec{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_s)$ — вектор полного набора алгебраически сопряженных чисел — корней многочлена $P_{\vec{a}}(x)$.

Для любого $t > 0$ решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ называется алгебраической. Она имеет вид

$$\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) = \left\{ \vec{x} = \left(t \sum_{\nu=1}^s \Theta_1^{\nu-1} m_\nu, \dots, t \sum_{\nu=1}^s \Theta_s^{\nu-1} m_\nu \right) = t \cdot \vec{m} \cdot T(\vec{a}) \mid \vec{m} \in \mathbb{Z}^s \right\}.$$

Таким образом, алгебраическая решётка $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ имеет базис $\vec{\lambda}_\nu = t \cdot (\Theta_1^{\nu-1}, \dots, \Theta_s^{\nu-1})$ ($\nu = 1, \dots, s$). Нетрудно видеть, что $\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \cap \mathbb{Z}^s = \{t(m, \dots, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

Совокупность $M \subset G_s$ точек $M_k = (\xi_1(k), \dots, \xi_s(k))$ ($k = 1, \dots, N$) называется *сеткой* M из N узлов, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные и являются значениями специальной весовой функции.

ЛЕММА 1. Для любого действительного σ выполняется неравенство

$$\left| \int_{-1}^1 (1 - |x|) e^{2\pi i \sigma x} dx \right| \leq (\bar{\sigma})^{-2}, \quad (6)$$

где $\bar{\sigma} = \max(1, |\sigma|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7]. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть функция $\rho_r(x)$ определена равенствами

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geq 1, \\ 1 - (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^\nu \frac{(-1)^\nu}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 - (-1)^r (2r-1)C_{2r-2}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^\nu \frac{1}{r+\nu} x^{r+\nu}, & \text{при } -1 < x < 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Тогда для любого действительного числа σ и интеграла

$$I_r(\sigma) = \int_{-1}^1 \rho_r(x) e^{2\pi i \sigma x} dx$$

выполняется оценка

$$|I_r(\sigma)| \leq \frac{B(r)}{\bar{\sigma}^{r+1}} \quad (8)$$

и функция $\rho_r(x)$ — весовая функция порядка $r + 1$ с константой $B(r)$, где

$$B(r) = \frac{(2r-1)C_{2r-2}^{r-1}}{\pi(2\pi)^r} \sup_{|\sigma|>1} \left| (P_{r-1}(1)e^{2\pi i\sigma} - P_{r-1}(0)) - \int_0^1 P_{r-1,r}(x)e^{2\pi i\sigma x} dx \right|,$$

и при $0 \leq \nu \leq r-1$ имеем:

$$(((1-x)x)^{r-1})^{(\nu)} = ((1-x)x)^{r-1-\nu} P_\nu(x),$$

где

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_{\nu+1}(x) &= \nu(1-2x)P_\nu(x) + x(1-x)P'_\nu(x) \quad (\nu = 0, \dots, r-2), \\ P_{r-1}(x) &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu C_{r-1}^\nu \prod_{k=0}^{r-2} (r-1+\nu-k)x^\nu, \end{aligned}$$

и при $r \leq \nu \leq 2r-2$ имеем:

$$\begin{aligned} (((1-x)x)^{r-1})^{(\nu)} &= P_{r-1,\nu}(x), \quad P_{r-1,r}(x) = P'_{r-1}(x), \\ P_{r-1,\nu}(x) &= \sum_{\mu=\nu+1-r}^{r-1} (-1)^\mu C_{r-1}^\mu \prod_{k=0}^{\nu-1} (r-1+\mu-k)x^{r-1+\mu-\nu} = \\ &= P'_{r-1,\nu-1}(x) = P_{r-1}^{(\nu-r+1)}(x), \\ P_{r-1,2r-2}(x) &= (-1)^{r-1}(2r-2)!. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [7]. $\square$

Для произвольных целых $m_1, \dots, m_s$ суммы $S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s)$, определённые равенством

$$S_{M,\vec{\rho}}(m_1, \dots, m_s) = \sum_{k=1}^N \rho_k e^{2\pi i[m_1 \xi_1(k) + \dots + m_s \xi_s(k)]}, \quad (9)$$

называются *тригонометрическими суммами сетки с весами*.

Пусть матрица $T = T(\vec{a})$ и $t > 0$. Рассмотрим алгебраическую сетку $M(t) = M'(t \cdot \Lambda(T))$ из $N'(t \cdot \Lambda(T))$ узлов $\vec{x}_k$ ($k = 1, \dots, N'(t \cdot \Lambda(T))$) с весами

$$\rho_k = \rho_{\vec{x}_k} = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}_k, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y})$$

и её тригонометрическую сумму с весами

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = (\det(t \cdot \Lambda(T)))^{-1} \sum_{\vec{x} \in M(t)} \left(\sum_{\{\vec{y}\}=\vec{x}, \vec{y} \in M_1(t \cdot \Lambda(T))} \rho(\vec{y}) \right) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}.$$

ТЕОРЕМА 1. Для алгебраической решётки $\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и произвольной весовой функции $\rho(\vec{x})$ справедливо равенство³

$$S_{M(t),\vec{\rho}}(\vec{m}) = \delta(\vec{m}) + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{m} - \vec{x})} d\vec{y}, \quad (10)$$

где

$$\delta(\vec{m}) = \begin{cases} 1, & \text{при } \vec{m} = \vec{0}; \\ 0, & \text{при } \vec{m} \neq \vec{0}, \vec{m} \in \mathbb{Z}^s. \end{cases}$$

³Здесь и далее символ $\sum'$ означает, что из области суммирования исключена нулевая точка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5]. $\square$

С помощью леммы 1 доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2. При $t \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{0}) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5]. $\square$

ТЕОРЕМА 3. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_1}(\vec{m}) = O\left(\frac{(\overline{m_1} \dots \overline{m_s})^2 \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^2}\right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [5]. $\square$

Цель данной работы — уточнить теорему 3.

2. Новые оценки тригонометрических сумм алгебраических сеток

Теорему 3 можно уточнить. Сначала мы это сделаем для векторов $\vec{m}$ специального вида: $\vec{m} = t(m, \dots, m)$, где $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого целого $m \neq 0$ и натурального t справедливо равенство

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = 1 + O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\vec{m} = t(m, \dots, m)$, и $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$, то по теореме 1 имеем:

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = \sum_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y},$$

где $\{t(m, \dots, m)\}$ — одноэлементное множество, состоящее из вектора $\vec{m} = t(m, \dots, m)$. Так как при $\vec{x} = \vec{0}$ имеем:

$$\int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y} = 1,$$

то

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) = 1 + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{t(m, \dots, m)\}} \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \rho_r(\vec{y}) e^{2\pi i(\vec{y}, \vec{x})} d\vec{y}.$$

Поэтому по лемме 2 получим

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_r}(t(m, \dots, m)) - 1| \leq B(r) \zeta_H(\Lambda(t \cdot T(\vec{a}))) |r+1| = O\left(\frac{\ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда $\vec{m} \in \mathbb{Z}^s \setminus \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ и, следовательно, $\vec{m} \neq t(m, \dots, m)$ для любого $m \in \mathbb{Z}$.

Для решётки $\Lambda = \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))$ определим два вектора $\vec{n}_\Lambda(\vec{m}) = (n_1, \dots, n_s)$ и $\vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ из условий $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \in \Lambda$, $\vec{m} = \vec{n}_\Lambda(\vec{m}) + \vec{k}_\Lambda(\vec{m})$ и произведение $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) = \overline{n_1} \dots \overline{n_s}$ минимально. Ясно, что существует константа $C(\Lambda) \geq 1$ такая, что для любого вектора $\vec{m}$ имеем $q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})) \leq C(\Lambda)$.

ЛЕММА 3. Для любого действительного x справедливы неравенства

$$\frac{1}{n-x} \leq \begin{cases} \frac{1}{2\bar{x}}, & \text{при } \overline{n-x} \geq 2\bar{x}, \\ \frac{1}{\bar{x}}, & \text{при } 2\bar{x} > \overline{n-x} \geq \bar{x}, \\ \frac{2}{\bar{x}}, & \text{при } \frac{\bar{x}}{2} \leq \overline{n-x} < \bar{x}, \\ \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}, & \text{при } \overline{n-x} < \frac{\bar{x}}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первые три неравенства в (14) очевидны.

Перейдем к доказательству четвертого неравенства. Неравенство $\frac{1}{n-x} \leq \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}$ эквивалентно неравенству $\bar{x} \leq 2\bar{n} \cdot \overline{n-x}$. При $|x| \leq 1$ это очевидно. Пусть $|x| > 1$, тогда $\frac{|x|}{2} \leq |n| \leq \frac{3|x|}{2}$. Отсюда следует, что $2\bar{n} \geq |x|$ и лемма полностью доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 5. При $t \rightarrow \infty$ для произвольного вектора $\vec{m} \neq \vec{0}$ и $\vec{m} \notin \Lambda$ справедлива асимптотическая формула

$$S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m}) \leq B(r) \begin{cases} \frac{1}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}, \\ O\left(\frac{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1} \ln^{s-1} \det \Lambda(t)}{(\det \Lambda(t))^{r+1}}\right), & \text{при } \vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}. \end{cases} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно теореме 1 и лемме 2 имеем:

$$|S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m})| \leq B(r) \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) = \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Если $\vec{k}_\Lambda(\vec{m}) \neq \vec{0}$, то

$$\sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{1}{(\overline{m_1 - x_1} \dots \overline{m_s - x_s})^{r+1}} = \frac{1}{(\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a})) \setminus \{-\vec{k}_\Lambda(\vec{m})\}} \frac{1}{(\overline{n_1 - x_1} \dots \overline{n_s - x_s})^{r+1}}.$$

Для простоты изложения воспользуемся неравенством (14) в наиболее слабой форме $\frac{1}{n-x} \leq \frac{2\bar{n}}{\bar{x}}$, получим

$$\begin{aligned} |S_{M(t), \vec{\rho}_r}(\vec{m})| &\leq B(r) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + \sum'_{\vec{x} \in \Lambda(t \cdot T(\vec{a}))} \frac{2^{s(r+1)} (\overline{n_1} \dots \overline{n_s})^{r+1}}{(\overline{x_1} \dots \overline{x_s})^{r+1}} \right) = \\ &= B(r) \left(\frac{1 - \delta(\vec{k}_\Lambda(\vec{m}))}{q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m}))^{r+1}} + 2^{s(r+1)} (q(\vec{n}_\Lambda(\vec{m})))^{r+1} \zeta(\Lambda(t \cdot T(\vec{a})) | r+1) \right). \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 11, получим доказываемое утверждение. $\square$

3. Заключение

Лемма 3 содержит определенный потенциал, чтобы усилить теорему 5, но это потребует дополнительного исследования. Кроме этого возникает вопрос о возможности переноса методов работы [1] на получение усиленных асимптотических оценок рассматриваемых тригонометрических сумм алгебраических сеток.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Добровольский. О двух асимптотических формулах в теории гиперболической дзета-функции решёток // Чебышевский сборник. 2018. Т. 21, вып. 3, С. 109–134.
2. Рарова Е. М. Разложение тригонометрической суммы сетки с весами в ряд по точкам решетки // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 37–49.
3. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы сетки с весами для целочисленной решётки // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 3. С. 34–39.
4. Рарова Е. М. Тригонометрические суммы алгебраических сеток // В сборнике: Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения Материалы XIII Международной конференции, посвященной восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. 2015. С. 356–359.
5. Рарова Е. М. О взвешенном числе точек алгебраической сетки // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 1, с. 200–219.
6. Е. М. Рарова. Тригонометрические суммы сеток алгебраических решеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 399–405.
7. Ребров Е. Д. Квадратурные формулы с модифицированными алгебраическими сетками // Чебышевский сборник 2012 Т. 13, вып. 3(43). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 53–90.
8. Реброва И. Ю., Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Балаба И. Н., Есаян А. Р., Басалов Ю. А. Теоретико-числовой метод в приближённом анализе и его реализация в ПОИВС «ТМК»: Моногр. В 2 ч. Под. ред. Н. М. Добровольского. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2016. — Ч. I. — 232 с.

REFERENCES

1. N. N. Dobrovol'skii, 2018, "On two asymptotic formulas in the theory of hyperbolic Zeta function of lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 109–134.
2. Rarova E. M., 2014, "Decomposition of the trigonometric sum of a grid with weights in a series by lattice points", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, vol. 1, part 1, pp. 37–49.
3. Rarova E. M., 2014, "Trigonometric grid sums with weights for integer lattice", *Proceedings of Tula state University. Natural science*, № 3, pp. 34–39.
4. Rarova E. M., 2015, "Trigonometric sums of algebraic nets", *In the collection: Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems and applications Proceedings of the XIII International conference dedicated to the eighty-fifth anniversary of the birth of Professor Sergei Sergeevich Ryshkov. Tula state pedagogical University. L. N. Tolstoy*, pp. 356–359.
5. Rarova E. M., 2018, "Weighted number of points of algebraic net", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 200–219.
6. E. M. Rarova, 2019, "Trigonometric sums of nets of algebraic lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 2, pp. 399–405.

7. Rebrov E. D. 2012, "Quadrature formulas with modified algebraic grids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 13, no. 3(43), pp. 53 — 90.
8. Rebrova I. Yu., Dobrovolsky N. M., Dobrovolsky N. N., Balaba I. N., Yesayan A. R., Basalov Yu. A. numerical Theoretic method in approximate analysis and its implementation in POIVS "TMK": Monogr. In Under 2 hours. ed. — Tula: Publishing house of Tula. state PED. UN-TA im. L. N. Tolstoy, 2016. — Part I. — 232 p.

Получено 28.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.