## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.9

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2020\text{--}21\text{--}3\text{--}215\text{--}222$ 

## Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — $\mathbf{H}^1$

А. Н. Кормачева (г. Тула)

Антонина Николаевна Кормачева — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

e-mail: juska789@mail.ru

#### Аннотация

Данная работа посвящена вопросам приближения квадратичной алгебраической решётки целочисленной решёткой. В ней вычисляются расстояния между квадратичной алгебраической решёткой и целочисленной решёткой, когда они заданы числителем и знаменателем подходящей дроби к корню квадратному из дискриминанта d — свободного от квадратов натурального числа.

Результаты данной работы позволяют изучать вопросы о наилучших приближениях квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками.

Ключевые слова: квадратичные поля, приближение алгебраических сеток, функция качества, обобщённая параллелепипедальная сетка.

Библиография: 9 названий.

### Для цитирования:

А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.9

 $DOI\ 10.22405/2226\text{--}8383\text{--}2020\text{--}21\text{--}3\text{--}215\text{--}222$ 

## Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices<sup>2</sup>

A. N. Kormacheva (Tula)

Antonina Nikolaevna Kormacheva — Postgraduate Student, Department of Algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula). e-mail: juska789@mail.ru

#### Abstract

 $<sup>^1</sup>$ Исследование выполнено при финансовой поддержке Р $\Phi\Phi$ И в рамках научного проекта  $N_{2}19-41-710004$  p a.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004 r a.

TThis paper is devoted to the approximation of a quadratic algebraic lattice by an integer lattice. It calculates the distances between a quadratic algebraic lattice and an integer lattice when they are given by the numerator and denominator of a suitable fraction to the square root of the discriminant d — of a square-free natural number.

The results of this work allow us to study questions about the best approximations of quadratic algebraic lattices by integer lattices.

Keywords: quadratic fields, approximation of algebraic grids, quality function, generalized parallelepipedal grid.

Bibliography: 9 titles.

#### For citation:

A. N. Kormacheva, 2020, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II", Chebyshevskii sbornik, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

Посвящается Николаю Михайловичу Добровольскому по случаю его семидесятилетия

## 1. Введение

В работе [6] рассматривалось квадратичное поле  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ , где p — простое число и p = 2 или  $p \equiv 3 \pmod 4$ . Для него кольцо целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  имеет вид:  $\mathbb{Z}_F = \{n + k\sqrt{p} | n, k \in \mathbb{Z}\}.$ 

В случае произвольного радикала d > 1, т. е. числа свободного от квадрата, для кольца целых алгебраических чисел  $\mathbb{Z}_F$  квадратичного поля  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$  имеется два различных случая (см. [10], гл. 4, стр. 309):

первый случай, когда дискриминант d=2 или  $d\equiv 3\pmod 4$ , в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{ n + k\sqrt{d} | n, k \in \mathbb{Z} \};$$

второй случай, когда дискриминант  $d \equiv 1 \pmod{4}$ , в этом случае

$$\mathbb{Z}_F = \{ n + k\omega | n, k \in \mathbb{Z} \},$$

где целое алгебраическое число  $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}.$ 

Через  $\Lambda(F)$  обозначается алгебраическая решётка поля F:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}) | \Theta = \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F \}$$

и  $\Theta^{(1)}$ ,  $\Theta^{(2)}$  — целые алгебраически сопряжённые числа.

В работе [5] рассматривался вопрос о вычислении расстояния между решётками: алгебраической  $\Lambda_m(F)$  и целочисленной  $\Lambda_m(p)$  для случая простого p вида p=2 и p=4k+3.

В работах [1], [4]–[7] двумерные решётки изучались с точки зрения построения двумерных парраллелепипедальных сеток для квадратурных формул. В данной работе нас будет интересовать вопрос о приближении квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками в метрическом пространстве решёток. Целью данной работы будет рассмотрение случая произвольного квадратичного поля  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ , где d > 0 — радикал, то есть произвольное натуральное число свободное от квадратов.

Кроме этого в работе будут установлены два общих свойства метрики на пространстве решёток, согласно которым расстояние между решётками не меняется, если их умножить на одно и тоже ненулевое число и расстояние от решётки до фундаментальной решётки равно расстоянию взаимной решётки до фундаментальной решётки.

второй случай дискриминанта d=4k+1. Этот второй случай дискриминанта будет разбиваться на два подслучая:

первый подслучай, когда числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность;

второй подслучай, когда числитель и знаменатель оба нечетные натуральные числа.

На протяжении всей работы будут сохраняться обозначения и использоваться сведения из работы [5].

Таким образом, в первом случае  $\Theta^{(1)} = n + k\sqrt{d}$ ,  $\Theta^{(2)} = n - k\sqrt{d}$   $n, k \in \mathbb{Z}$  и  $\Theta^{(1)}$ ,  $\Theta^{(2)} -$  корни уравнения  $x^2 - 2nx + n^2 - dk^2 = 0$ . Базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1 = (1,1)$ ,  $\vec{\lambda}_2 = (\sqrt{d}, -\sqrt{d})$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda(F) = 2\sqrt{d}$ .

Рассмотрим разложение  $\sqrt{d}$  в цепную периодическую дробь:

разложение 
$$\sqrt{a}$$
 в цепную периодическую дрооь: 
$$\sqrt{d} = q_0 + [(q_1,\ldots,q_n,2q_0)] = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{2q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}.$$

с периодом  $(q_1,\ldots,q_n,2q_0)$ . Через  $\frac{P_m}{Q_m}$  обозначается m-ая подходящая дробь к  $\sqrt{d}$ . Таким образом,

$$\sqrt{d} = \frac{P_m}{Q_m} + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m^2}, \quad Q_m \sqrt{d} = P_m + \frac{(-1)^m \theta_m}{Q_m}, \quad 0 < \theta_m < 1 \quad (m = 0, 1, \ldots).$$
 (1)

Через  $\Lambda_m(F)$  обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(n + k\sqrt{d}), Q_m(n - k\sqrt{d})) | n, k \in \mathbb{Z} \right\},\,$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(Q_m n + k P_m, Q_m n - k P_m) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1}=(Q_m,Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2}=(Q_m\sqrt{d},-Q_m\sqrt{d}),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda_m(F)=2Q_m^2\sqrt{d}.$ 

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z}=(Q_m,Q_m),\ \vec{\lambda}_{m,2,Z}=(P_m,-P_m),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda_m(p)=2Q_mP_m.$ 

Во втором случае, когда  $d\equiv 1\pmod 4$ , мы имеем  $\Theta^{(1)}=n+k\omega$ ,  $\Theta^{(2)}=n+k(1-\omega)$   $n,k\in\mathbb{Z}$  и  $\Theta^{(1)},\ \Theta^{(2)}$  — корни уравнения  $x^2-(2n-k)x+n^2+nk+\frac{1-d}{4}k^2=0$ . Базис решётки  $\Lambda(F)$  имеет вид:  $\vec{\lambda}_1=(1,1),\ \vec{\lambda}_2=(\omega,1-\omega),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda(F)=\sqrt{d}$ .

Через  $\Lambda_m(F)$  обозначается алгебраическая решётка заданная равенствами в зависимости от двух случаев:

если  $P_m$  и  $Q_m$  — разной четности, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ (Q_m(2n + k(1 + \sqrt{d})), Q_m(2n + k(1 - \sqrt{d}))) | n, k \in \mathbb{Z} \right\},\,$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \{(2Q_m n + k(P_m + Q_m), 2Q_m n + k(P_m - Q_m)) | n, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1}=(2Q_m,2Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2}=(Q_m(1+\sqrt{d}),Q_m(1-\sqrt{d})),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda_m(F)=4Q_m^2\sqrt{d}.$ 

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z}=(2Q_m,2Q_m),\ \vec{\lambda}_{m,2,Z}=(P_m+Q_m,\,Q_m-P_m),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda_m(p)=4Q_mP_m;$ 

если  $P_m$  и  $Q_m$  — оба нечетные числа, то

$$\Lambda_m(F) = \left\{ \left( Q_m \left( n + k \frac{1 + \sqrt{d}}{2} \right), Q_m \left( n + k \frac{1 - \sqrt{d}}{2} \right) \right) \middle| n, k \in \mathbb{Z} \right\},\,$$

а через  $\Lambda_m(d)$  — целочисленная решётка заданная равенствами:

$$\Lambda_m(d) = \left\{ \left. \left( Q_m n + k \frac{P_m + Q_m}{2}, Q_m n + k \frac{P_m - Q_m}{2} \right) \right| n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Базис решётки  $\Lambda_m(F)$  имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1} = (Q_m, Q_m), \quad \vec{\lambda}_{m,2} = \left(Q_m \frac{1+\sqrt{d}}{2}, Q_m \frac{1-\sqrt{d}}{2}\right)$ , а детерминант решётки  $\det \Lambda_m(F) = Q_m^2 \sqrt{d}$ .

Для целочисленной решётки  $\Lambda_m(d)$  базис имеет вид  $\vec{\lambda}_{m,1,Z}=(Q_m,Q_m),\, \vec{\lambda}_{m,2,Z}=\left(\frac{P_m+Q_m}{2}\right),$  а детерминант решётки  $\det\Lambda_m(p)=Q_mP_m.$ 

## 2. Два общих свойства метрики на пространстве решёток

Как известно (см. [3], стр.165) множество всех s-мерных решёток образуют полное метрическое пространство относительно метрики  $\rho(\Lambda,\Gamma)$ , которая задана равенствами

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A \cdot \Gamma} \|A - E_s\|, \quad \nu = \inf_{B \cdot \Lambda = \Gamma} \|B - E_s\|,$$

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant s}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases} \quad ||A|| = s \cdot \max_{1 \leqslant i,j \leqslant s} |a_{ij}|.$$

Для произвольной решётки  $\Lambda$  рассмотрим её взаимную решётку  $\Lambda^* = \{\vec{x} | (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}, \forall \vec{y} \in \Lambda\}.$  Если A — её базисная матрица

$$A=\left(egin{array}{ccc} a_{1,1}&\ldots&a_{1,s}\ dots&\ddots&dots\ a_{s,1}&\ldots&a_{s,s} \end{array}
ight),\quad \vec{\lambda_j}=(a_{1,j},\ldots,a_{s,j})\quad (j=1,\ldots,s)$$
 — базисные вектора,

то для базисной матрицы  $A^*$  имеем равенство  $A^* = (A^{-1})^{\top}$ .

 $ext{ТЕОРЕМА}$  1. Для любой решётки  $\Lambda$  справедливо равенство  $ho(\Lambda,\mathbb{Z}^s)=
ho(\Lambda^*,\mathbb{Z}^s)$ .

Доказательство. Так как для любой решётки  $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^s$ ,  $\mathbb{Z}^s = A^{-1} \cdot \Lambda$ , то  $\Lambda^* = (A^{-1})^\top \cdot \mathbb{Z}^s$ ,  $\mathbb{Z}^s = A^\top \cdot \Lambda^*$ . Поэтому

$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}^{s}) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \quad \mu = \inf_{\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^{s}} \|A - E_{s}\|, \quad \nu = \inf_{A^{-1} \cdot \Lambda = \mathbb{Z}^{s}} \|A^{-1} - E_{s}\|,$$

$$\rho(\Lambda^{*}, \mathbb{Z}^{s}) = \max(\ln(1+\mu^{*}), \ln(1+\nu^{*})),$$

$$\mu^{*} = \inf_{\Lambda^{*} = (A^{-1})^{\top} \cdot \mathbb{Z}^{s}} \|(A^{-1})^{\top} - E_{s}\|, \quad \nu^{*} = \inf_{A^{\top} \cdot \Lambda^{*} = \mathbb{Z}^{s}} \|A^{\top} - E_{s}\|.$$

Отсюда следует, что  $\mu = \nu^*$ ,  $\nu = \mu^*$ , что доказывает утверждение теоремы.  $\square$ 

ТЕОРЕМА 2. Для любого t>0 и любых решёток  $\Lambda$  и  $\Gamma$  справедливы равенства  $\rho(t\Lambda,t\Gamma)=\rho(\Lambda,\Gamma),\ \rho((t\Lambda)^*,(t\Gamma)^*)=\rho(\Lambda^*,\Gamma^*).$ 

Доказательство. Действительно, если  $\Lambda = A \cdot \Gamma$ ,  $\Gamma = B \cdot \Lambda$ , то  $t\Lambda = A \cdot t\Gamma$ ,  $t\Gamma = B \cdot t\Lambda$ , что и доказывает утверждение теоремы.  $\square$ 

Обозначим через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_{m} = \begin{pmatrix} Q_{m} & Q_{m}\sqrt{d} \\ Q_{m} & -Q_{m}\sqrt{d} \end{pmatrix}, \quad A_{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q_{m}} & -\frac{1}{2Q_{m}} \\ \frac{1}{2Q_{m}\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_{m}\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_m = \left( \begin{array}{cc} Q_m & P_m \\ Q_m & -P_m \end{array} \right), \quad B_m^{-1} = \left( \begin{array}{cc} \frac{1}{2Q_m} & \frac{1}{2Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{array} \right).$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}, \ D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}, \ I_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m, \ D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|, \ \mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 1. Справедливы равенства

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

Доказательство. Дословно повторяются рассуждения из доказательства леммы 1 работы [5] с заменой  $\sqrt{p}$  на  $\sqrt{d}$ .  $\square$ 

ЛЕММА 2. Если решётки  $\Lambda=A\mathbb{Z}^2$  и  $\Gamma=B\mathbb{Z}^2$  с базисными матрицами A и B, соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} Q & P + \frac{\theta}{Q} \\ Q & -P - \frac{\theta}{Q} \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2\left(P + \frac{\theta}{Q}\right)} & -\frac{1}{2\left(P + \frac{\theta}{Q}\right)} \end{pmatrix},$$
 
$$B = \begin{pmatrix} Q & P \\ Q & -P \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2Q} & \frac{1}{2Q} \\ \frac{1}{2P} & -\frac{1}{2P} \end{pmatrix}, \quad 0 < |\theta| < 1, \quad P, Q \in \mathbb{N}, \quad PQ > 1$$

связаны соотношениями

$$\Lambda = B^*\Gamma, \quad B^* = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta}{2PQ} & -\frac{\theta}{2PQ} \\ -\frac{\theta}{2PQ} & 1 + \frac{\theta}{2PQ} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = A^*\Lambda, \quad A^* = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} & \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} \\ \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} & 1 - \frac{\theta}{2(\theta + PQ)} \end{pmatrix},$$

$$\nu_0 = \|A^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{\theta + PQ}, \quad \mu_0 = \|B^* - E_2\| = \frac{|\theta|}{PQ}, \quad \varepsilon_0 = \max(\nu_0, \mu_0) < 1,$$

то для расстояния между этими решётками справедливо равенство

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(1 + \varepsilon_0).$$

Доказательство. См. [5]. □

Теорема 3. При  $P_m \geqslant 2$ ,  $Q_m \geqslant 2$  справедливо равенство

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m}\right)\right).$$

Доказательство. Положим в лемме 2  $\Lambda = \Lambda_m(F), \ \Gamma = \Lambda_m(d), \ A = A_m, \ B = B_m, \ тогда получим утверждение теоремы. <math>\square$ 

# 4. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, первый подслучай

Пусть теперь  $d \equiv 1 \pmod 4$  и числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность.

Обозначим в этом случае через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_{m} = \begin{pmatrix} 2Q_{m} & Q_{m}(1+\sqrt{d}) \\ 2Q_{m} & Q_{m}(1-\sqrt{d}) \end{pmatrix}, \quad A_{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{4Q_{m}\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{4Q_{m}\sqrt{d}} \\ \frac{1}{2Q_{m}\sqrt{d}} & -\frac{1}{2Q_{m}\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_m = \begin{pmatrix} 2Q_m & Q_m + P_m \\ 2Q_m & Q_m - P_m \end{pmatrix}, \quad B_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_m - Q_m}{4P_m Q_m} & \frac{P_m + Q_m}{4P_m Q_m} \\ \frac{1}{2P_m} & -\frac{1}{2P_m} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}, \ D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}, \ I_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \mathrm{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m, \ D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|, \ \mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 3. Справедливы равенства

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

Доказательство. Непосредственные вычисления дают для  $\nu_m$  и  $\mu_m$  теже значения и что и в лемме 1.  $\square$ 

ТЕОРЕМА 4. Для  $d \equiv 1 \pmod 4$ , если числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  имеют разную четность, то при  $P_m \geqslant 2$ ,  $Q_m \geqslant 2$  справедливо равенство

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m}\right)\right).$$

Доказательство. В силу леммы 3 применима лемма 2. Поэтому, положив  $\Lambda = \Lambda_m(F)$ ,  $\Gamma = \Lambda_m(d), A = A_m, B = B_m$ , получим утверждение теоремы.  $\square$ 

# 5. Вычисление расстояния для второго случая дискриминанта поля, второй подслучай

Пусть теперь  $d \equiv 1 \pmod 4$  и числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  оба нечетные.

Обозначим в этом случае через  $A_m$  базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(F)$ :

$$A_{m} = \begin{pmatrix} Q_{m} & Q_{m} \frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ Q_{m} & Q_{m} \frac{1-\sqrt{d}}{2} \end{pmatrix}, \quad A_{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{d}-1}{2Q_{m}\sqrt{d}} & \frac{\sqrt{d}+1}{2Q_{m}\sqrt{d}} \\ \frac{1}{Q_{m}\sqrt{d}} & -\frac{1}{Q_{m}\sqrt{d}} \end{pmatrix},$$

а через  $B_m$  — базисную матрицу решётки  $\Lambda_m(d)$ :

$$B_{m} = \begin{pmatrix} Q_{m} & \frac{Q_{m} + P_{m}}{2} \\ Q_{m} & \frac{Q_{m} - P_{m}}{2} \end{pmatrix}, \quad B_{m}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{P_{m} - Q_{m}}{2P_{m}Q_{m}} & \frac{P_{m} + Q_{m}}{2P_{m}Q_{m}} \\ \frac{1}{P_{m}} & -\frac{1}{P_{m}} \end{pmatrix}.$$

Пусть  $C_m = B_m A_m^{-1}$ ,  $D_m = C_m^{-1} = A_m B_m^{-1}$ ,  $I_m = \operatorname{Iso}(\Lambda_m(F), \Lambda_m(p))$  и  $J_m = \operatorname{Iso}(\Lambda_m(p), \Lambda_m(F))$ . Тогда  $C_m \in I_m$ ,  $D_m \in J_m$ . Положим  $\nu_m = \|C_m - E_2\|$ ,  $\mu_m = \|D_m - E_2\|$ .

ЛЕММА 4. Справедливы равенства

$$\nu_m = \frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \quad \mu_m = \frac{\theta_m}{P_m Q_m}.$$

Доказательство. Непосредственные вычисления дают для  $\nu_m$  и  $\mu_m$  теже значения и что и в леммах 1 и 3.  $\square$ 

ТЕОРЕМА 5. Для  $d \equiv 1 \pmod 4$ , если числитель и знаменатель  $P_m$  и  $Q_m$  подходящей дроби к квадратичной иррациональности  $\sqrt{d}$  оба нечетные, то при  $P_m \geqslant 2$ ,  $Q_m \geqslant 2$  справедливо равенство

$$\rho(\Lambda_m(F), \Lambda_m(d)) = \ln\left(1 + \max\left(\frac{\theta_m}{(-1)^m \theta_m + P_m Q_m}, \frac{\theta_m}{P_m Q_m}\right)\right).$$

Доказательство. В силу леммы 4 применима лемма 2. Поэтому, положив  $\Lambda = \Lambda_m(F)$ ,  $\Gamma = \Lambda_m(d)$ ,  $A = A_m$ ,  $B = B_m$ , получим утверждение теоремы.  $\square$ 

#### 6. Заключение

Из теорем 3, 4, 5 следует, что построенные целочисленные приближения алгебраических решёток  $\Lambda_m(F)$  с растущим детерминантом приближаются целочисленными решётками со скоростью  $O\left(\det^{-1}\Lambda_m(d)\right)$ .

Теорема 2 позволяет утверждать, что с такой-же скоростью квадратичная решётка  $\Lambda(F)$  приближается рациональной решёткой со знаменателем  $Q = O\left(\sqrt{\det\Lambda_m(d)}\right)$ .

В работах А. В. Михляевой [7]–[8] изучаются эти приближения с точки зрения построения квадратурных формул. Качество сответствующих сеток можно рассчитать с помощью быстрого алгоритма из работы [1].

В работе А. В. Родионова [9] показано, что для данных целочисленных приближений алгебраических квадратичных решёток можно построить эффективные алгоритмы вычисления гиперболического параметра решётки и явно описать минимальное множество Быковского.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи, полезное обсуждение и постоянное внимание к работе.

# СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Вронская Г. Т., Добровольский Н. Н. Отклонения плоских сеток. монография / под редакцией Н. М. Добровольского. Тула, 2012.
- 2. Г. Дэвенпорт. Высшая арифметика. М.: Наука. 1965 г. 176 с.
- 3. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. М.: Мир, 1965. 422 с.
- 4. А. Н. Кормачева. О неполных частных одной цепной дроби // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1, с. 293–301.
- 5. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 2, с. 366–373.
- 6. А. В. Михляева. Приближение квадратичных алгебраических решёток и сеток целочисленными решётками и рациональными сетками // Чебышевский сборник, 2018, т. 19, вып. 3. С. 241-256.

- 7. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток // Чебышевский сборник, 2019, т. 20, вып. 1. С. 302–307.
- 8. А. В. Михляева. Функция качества для приближения квадратичных алгебраических сеток II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 223–231.
- 9. А. А. Родионов. Гиперболический параметр приближения квадратичных алгебраических решёток целочисленными // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3. С. 241–249.
- 10. Г. Хассе. Лекции по теории чисел. М. И $^*$ Л. 1953 г. 528 с.

#### REFERENCES

- 1. Vronskaya, G. T., Dobrovol'skii, N. N. 2012, "Deviations of flat grids. monograph", edited by N. M. Dobrovol'skii. Tula.
- 2. H. Davenport, 1965, "The higher arithmetic", Moscow, Nauka pp. 176.
- 3. Kassels, D. 1965, Vvedenie v geometriyu chisel, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.
- 4. A. N. Kormacheva, 2019, "About the partial quotients of one of the continued fractions", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 293–301.
- A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices", Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 2, pp. 366–373.
- 6. A. V. Mikhlyaeva, 2018, "Approximation of quadratic algebraic lattices and nets by integer lattices and rational nets", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 241–256.
- 7. A. V. Mikhlyaeva, 2019, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets", Chebyshevskii sbornik, vol. 20, no. 1, pp. 302–307.
- 8. A. V. Mikhlyaeva, 2020, "Quality function for the approximation of quadratic algebraic nets II", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 223–231.
- 9. A. V. Rodionov, 2020, "Hyperbolic parameter of approximation of quadratic algebraic lattices by integers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 241–249.
- 10. H. Hasse, 1953, "Lectures on number theory", Moscow, Foreign literature pp. 528.

Получено 21.05.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.