ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.321 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем

В. В. Юделевич

Виталий Викторович Юделевич — аспирант, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru

Аннотация

Пусть $\mathbb{F}_q[T]$ — кольцо многочленов над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Далее, пусть $g\colon \mathbb{F}_q[T] \to \mathbb{R}$ — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимого многочлена зависят лишь от показателя степени, то есть $g(P^k) = d_k$ для любого неприводимого многочлена P и некоторой фиксированной последовательности вещественных чисел $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$. В работе исследуется сумма

$$T(N) = T(N; g) = \sum_{\deg F = N} g(F),$$

где F пробегает многочлены степени N со старшим коэффициентом, равным 1 (унитарные многочлены). Для суммы $T(N)$ находится точная формула, а также вычисляется асимптотика при $q \to \infty$ и N фиксированном; при $N \to \infty$ и $q \to \infty$; при $q^N \to \infty$. В частности, доказаны следующие асимптотические формулы:

$$\sum_{\substack{\deg F = N \\ F \text{ унитарен}}} \tau(F^k) = \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}\left(q^{N-1}\right), \quad N \geqslant 1,\ q \to \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F = N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N}\left(\binom{2N}{N} - \frac{2}{3}\binom{2N-4}{N-2}q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}}q^{-2}\right)\right),\ N \to \infty,\ q \to \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F = N \\ F \text{ унитарен}}} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right),\ C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(\sqrt{q^{2l} - q^l}\ln\frac{q^l}{q^l - 1}\right)^{\pi_q(l)},\ q^N \to \infty;$$

где $\tau(F)$ — число унитарных многочленов, делящих F, и $\pi_q(l)$ — число неприводимых унитарных многочленов степени l. Последние две формулы представляют собой аналог для многочленов над конечным полем одного результата Рамануджана

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}\left(a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \ldots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right)\right),$$

где $d(n)$ — классическая функция делителей, a_i — константы, в частности

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \prod_p \ln\frac{p}{p-1}\sqrt{p(p-1)}.$$

Ключевые слова: кольцо многочленов над конечным полем, функция делителей.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
В. В. Юделевич. О среднем значении функций, родственных функции делителей, в кольце многочленов над конечным полем // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 196–214.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 511.321 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-196-214

On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field

V. V. Iudelevich

Vitaly Viktorovich Iudelevich — graduate student, Lomonosov Moscow State University.
e-mail: vitaliiyudelevich@mail.ru

Abstract

Let $g : \mathbb{F}_q[T] \to \mathbb{R}$ be a multiplicative function which values at the degrees of the irreducible polynomial, depends only on the exponent, such that $g(P^k) = d_k$ polynomial P and for some arbitrary sequence of reals $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$. This paper regards the sum

$$T(N) = \sum_{\substack{\deg F = N\\ F \text{ is monic}}} g(F),$$

where F ranges over polynomials of degree N with leading coefficient equal to 1 (unitary polynomials). For the sum $T(N)$, an exact formula is found, and various asymptotics are calculated in cases of
$q \to \infty$; $q \to \infty$, $N \to \infty$; $q^N \to \infty$. In particular, the following asymptotic formulas are obtained

$$\sum_{\substack{\deg F = N\\ F \text{ is monic}}} \tau(F^k) = \binom{k+N}{N} q^N + O_{N,k}\left(q^{N-1}\right), \quad N \geqslant 1,\ q \to \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F = N\\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N}\left(\binom{2N}{N} - \frac{2}{3}\binom{2N-4}{N-2}q^{-1} + O\left(\frac{4^N}{\sqrt{N}}q^{-2}\right)\right),\ N \to \infty,\ q \to \infty;$$

$$\sum_{\substack{\deg F = N\\ F \text{ is monic}}} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(\sqrt{q^{2l} - q^l}\ln\frac{q^l}{q^l - 1}\right)^{\pi_q(l)},\ q^N \to \infty;$$

where $\tau(F)$ is a number of monic divisors of F, and $\pi_q(l)$ is a number of monic irreducible polynomials of degree l. The second and third equalities are analogous for polynomials over a finite field of one of Ramanujan's results

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{d(n)} = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}\left(a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \ldots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right)\right),$$

where $d(n)$ is a classical divisor function, and a_i are some constants. In particular,

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\prod_p \ln\frac{p}{p-1}\sqrt{p(p-1)}.$$

Keywords: the ring of polynomials over a finite field, divisor function.

Bibliography: 7 titles.

For citation:
V. V. Iudelevich, 2020, "On the mean value of functions related to the divisors function in the ring of polynomials over a finite field" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 196–214.

1. Введение

Пусть q — степень простого числа, $\mathbb{F}_q$ — конечное поле порядка q, $\mathbb{F}_q[T]$ — кольцо многочленов над полем $\mathbb{F}_q$. Как известно, $\mathbb{F}_q[T]$ является евклидовым кольцом. Как следствие, в нём справедлива теорема об однозначном разложении на множители. Именно, каждый многочлен F, отличный от постоянной, представляется в виде

$$F = a \cdot P_1^{e_1} P_2^{e_2} \dots P_k^{e_k}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbb{F}_q^*$, $P_1, P_2, \dots, P_k$ — различные неприводимые над полем $\mathbb{F}_q$ многочлены с единичными старшими коэффициентами (унитарные многочлены), а $e_1, e_2, \dots, e_k$ — положительные целые числа. Такое разложение единственно с точностью до порядка следования множителей.

Приведённая теорема позволяет рассматривать в кольце $\mathbb{F}_q[T]$ аналоги известных из элементарной теории чисел мультипликативных функций.

Напомним, что для унитарного многочлена F функция делителей $\tau(F)$ определяется равенством

$$\tau(F) \;=\; \sum_{D|F} 1,$$

где суммирование ведётся по всем унитарным многочленам, делящим F. Другими словами, $\tau(F)$ есть число решений в унитарных многочленах уравнения $F_1F_2 = F$. Обобщённая функция делителей $\tau_m(F)$, $m \geq 2$, определяется аналогично — как число решений уравнения $F_1F_2 \dots F_m = F$.

Символом $\omega(F)$ будем обозначать число неприводимых сомножителей в разложении F без учёта кратности. Так, если (1) есть разложение многочлена F на неприводимые, то $\omega(F) = k$.

Для многочлена F степени n его норма $N(F)$ определяется равенством $N(F) = q^n$. Ясно, что для любых многочленов F и G справедливо

$$N(FG) = N(F)N(G).$$

Арифметику кольца $\mathbb{F}_q[T]$ описывает дзета-функция $\zeta_q(s)$ этого кольца.
Если $s = \sigma + it, \sigma > 1$, то $\zeta_q(s)$ задаётся равенством

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ \text{F унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)}. \tag{2}$$

Собирая многочлены одинаковой степени в сумме (2), получим

$$\zeta_q(s) = \sum_{\substack{F \in \mathbb{F}_q[T] \\ \text{F унитарный}}} \frac{1}{N^s(F)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^n}{q^{ns}} = \frac{1}{1 - q^{1-s}}. \tag{3}$$

Отсюда следует, что функция $\left(1 - q^{1-s}\right)^{-1}$ является аналитическим продолжением $\zeta_q(s)$ на всю комплексную плоскость за исключением точек вида

$$s_k = 1 + \frac{2\pi k}{\ln q} i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

в каждой из которых $\zeta_q(s)$ имеет простой полюс с вычетом равным $(\ln q)^{-1}$.

Из теоремы о единственности разложения следует, что $\zeta_q(s)$ обладает эйлеровским произведением, то есть в области $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\zeta_q(s) = \prod_{P \in \mathbb{F}_q[T]} \left(1 - N^{-s}(P)\right)^{-1}, \tag{4}$$

в котором произведение распространено на все неприводимые унитарные многочлены.

Представляет интерес исследование средних значений мультипликативных функций над кольцом $\mathbb{F}_q[T]$. Впервые подобные задачи были рассмотрены Л. Карлитцем. В работе [1] им были получены точные формулы для средних значений некоторых мультипликативных функций.

Возможность получения точных (а не асимптотических) формул в задачах такого рода объясняется тем, что аналог дзета-функции для кольца $\mathbb{F}_q[T]$ имеет очень простой вид, указанный в (3), и тем обстоятельством, что соответствующий производящий ряд Дирихле $\Phi(s)$ представляется в виде

$$\Phi(s) = (\zeta_q(n_1 s))^{m_1} \dots (\zeta_q(n_k s))^{m_k},$$

где $n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_k \geqslant 1$ — целые числа. Так, задача нахождения величины

$$\sum_{\deg F = n} \tau_m(F) \tag{5}$$

сводится к подсчёту коэффициента при q^{-ns} ряда

$$\zeta_q^m(s) = \frac{1}{(1 - q^{1-s})^m}.$$

Величина (5) является аналогом суммы

$$\sum_{n \le x} d_m(n), \tag{6}$$

исследование которой составляет предмет обобщённой проблемы делителей Дирихле (здесь $d_m(n)$ — классическая функция делителей, равная числу решений уравнения $x_1 x_2 \dots x_m = n$ в натуральных числах $x_1, x_2, \dots, x_n$). Наряду с (6) исследуются и суммы

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{d_m(n)}, \tag{7}$$

(см.: Рамануджан [2]), для которых получаются асимптотические выражения вида

$$\frac{x}{(\ln x)^{1 - \frac{1}{m}}} \left(a_0 + \frac{a_1}{\ln x} + \dots + \frac{a_N}{(\ln x)^N} + O_N\left(\frac{1}{(\ln x)^{N+1}}\right)\right),$$

где $x \to +\infty$, $N \ge 0$ — произвольное фиксированное число, $a_0, a_1, \dots, a_N, \dots$ — некоторые постоянные.

Пусть $g : \mathbb{F}_q[T] \to \mathbb{R}$ — мультипликативная функция, значения которой на степенях неприводимых многочленов зависят лишь от показателей степеней, то есть

$$d_k = g(P^k) \tag{8}$$

для некоторой фиксированной последовательности $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$. Будем предполагать также, что ряд

$$f(t) = f_g(t) = 1 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots + d_k t^k + \dots \tag{9}$$

сходится в некотором круге с центром в нуле. Пусть далее,

$$\ln f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kt^k, \tag{10}$$

а последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ определена по правилу

$$f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2}\dots(1-t^k)^{h_k}=1+h_{k+1}t^{k+1}+\dots. \tag{11}$$

Легко видеть, что $h_1=d_1$. Положим, наконец,

$$T(N)=T(N;g)=\sum_{\deg F=N}g(F),$$

где F пробегает унитарные многочлены степени N. Основными результатами работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$T(N)=A_0(N)q^N+A_1(N)q^{N-1}+\ldots+A_{N-1}(N)q,$$

где

$$A_l(N)=\sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+(l+1)k_{l+1}=N\\ k_2+2k_3+\ldots+lk_{l+1}=l}}\binom{-h_1}{k_1}\binom{-h_2}{k_2}\dots\binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}}(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{l+1}}, \tag{12}$$

а величины h_i определены в (11).
В частности, при любом фиксированном N, любом n, $1\le n\le N$, и $q\to\infty$

$$T(N)=A_0(N)q^N+A_1(N)q^{N-1}+\ldots+A_{n-1}(N)q^{N-n+1}+O_N(q^{N-n}).$$

Теорема 2. *Пусть $N\geqslant 190$, $0<d_1<1$ и при всех $k\geqslant 1$*

$$k|a_k|\leqslant 1, \tag{13}$$

где числа d_k и a_k определены в (8) *и* (10) *соответственно.*
Тогда при $h\in\left[1,\frac{N}{36\ln N}\right]$ и $q\geqslant(17h)^{12h+9}$ имеет место равенство

$$T(N)=A_0(N)q^N+A_1(N)q^{N-1}+\ldots+A_{h-1}(N)q^{N-h+1}+O\left(d_1p(h)\frac{q^{N-h}}{N^{1-d_1}}\right), \tag{14}$$

где величины $A_l(N)$, $0\leqslant l\leqslant h-1$ определены в (12), *причём*

$$|A_l(N)|\leqslant\frac{3d_1p(l)}{N^{1-d_1}},$$

$p(l)$ — число разбиений l, и константа под знаком O не превосходит 3.1.
В частности, равенство (14) *справедливо при $q\to\infty$, $N\to\infty$ и h фиксированном, а также при $q\to\infty$, $N\geqslant 190$ фиксированном и $h\in\left[1,\frac{N}{36\ln N}\right]$.*

После доказательства этих утвеждений мы приводим один технический результат из работы [4] Городецкого, откуда получается асимптотическое разложение $T(N)$ при $q^N\to\infty$. Мы доказываем, что функции g, для которых $d_1\in(0,1)$ и выполнено неравенство (13), удовлетворяют также и этому техническому утверждению. Как следствие, соответствующая сумма $T(N)$ будет иметь асимптотическое разложение при $q^N\to\infty$. Работу мы завершаем приведением примеров функций g и разложений соответствующих им сумм $T(N)$.

Автор благодарит своего научного руководителя — д.ф-м.н. Максима Александровича Королёва, за постановку задачи и ценные обсуждения.

2. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\Phi(s) = \sum_{\substack{F\in\mathbb{F}_q[T]\\ F \text{ унитарен}}} \frac{g(F)}{N(F)^s} = \sum_{N=0}^{+\infty} T(N)q^{-Ns}.$$

В силу мультипликативности g имеем

$$\Phi(s) = \prod_{\substack{P \text{ неприводим}\\ \text{и унитарен}}} \left(1+\frac{g(P)}{N(P)^s}+\frac{g(P^2)}{N(P^2)^s}+\ldots\right) = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(1+\frac{d_1}{q^{ls}}+\frac{d_2}{q^{2ls}}+\ldots\right)^{\pi_q(l)} =$$

$$= \prod_{l=1}^{+\infty} (f(q^{-ls}))^{\pi_q(l)},$$

где $\pi_q(l)$ — число неприводимых над полем $\mathbb{F}_q$ унитарных многочленов степени l. Положим также

$$f_{k+1}(t) = f(t)(1-t)^{h_1}(1-t^2)^{h_2}\ldots(1-t^k)^{h_k}. \tag{15}$$

Тогда при $k=n$ и $t=q^{-ls}$ будем иметь

$$f(q^{-ls}) = f_{n+1}(q^{-ls})(1-q^{-ls})^{-h_1}\ldots(1-q^{-nls})^{-h_n}.$$

Отсюда

$$\Phi(s) = (\zeta_q(s))^{h_1}(\zeta_q(2s))^{h_2}\ldots(\zeta_q(ns))^{h_n}\prod_{l=1}^{+\infty}(f_{n+1}(q^{-ls}))^{\pi_q(l)}.$$

Положим теперь $z=q^{1-s}$, $T_0(N)=q^{-N}T(N)$. Тогда для $\xi(z)$, определённой равенством

$$\xi(z) = \sum_{N=0}^{+\infty} T_0(N)z^N,$$

будем иметь

$$\xi(z) = (1-z)^{-h_1}\left(1-\frac{z^2}{q}\right)^{-h_2}\ldots\left(1-\frac{z^n}{q^{n-1}}\right)^{-h_n}\prod_{l=1}^{+\infty}\left(f_{n+1}\left(\frac{z^l}{q^l}\right)\right)^{\pi_q(l)}. \tag{16}$$

Положим

$$\Pi(z) = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(f_{n+1}\left(\frac{z^l}{q^l}\right)\right)^{\pi_q(l)} = \exp\Big\{\sum_{l=1}^{+\infty}\pi_q(l)\ln f_{n+1}\left(\frac{z^l}{q^l}\right)\Big\}.$$

Определим коэффициенты c_ν из разложения

$$\ln f_{n+1}(t) = \sum_{\nu=n+1}^{+\infty} c_\nu t^\nu, \tag{17}$$

тогда из равенства

$$\ln f_{n+1}(t) = \ln f(t) + h_1\ln(1-t)+\ldots+h_n\ln(1-t^n)$$

сравнением коэффициентов при $t^\nu,\ \nu\geqslant n+1$ получим

$$c_\nu = a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu\\ d\leqslant n}}\frac{dh_d}{\nu}.$$

Отсюда

$$\ln \Pi(z) = \sum_{l=1}^{+\infty} \pi_q(l) \ln f_{n+1}\left(\frac{z^l}{q^l}\right) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) q^{\frac{l}{d}} \sum_{\nu \geqslant n+1} c_\nu \frac{z^{\nu l}}{q^{\nu l}} =$$

$$\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\delta=1}^{+\infty} \frac{q^\delta}{\delta} \sum_{\nu \geqslant n+1} c_\nu \frac{z^{\nu d\delta}}{q^{\nu d\delta}} = \sum_{k \geqslant n+1} \frac{1}{q^k} \Big\{ \sum_{\substack{\nu d\delta = k \\ \nu \geqslant n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d\delta} \Big\} z^k = \sum_{k \geqslant n+1} A_k z^k,$$

где

$$A_k = \frac{1}{q^k} \Big\{ \sum_{\substack{\nu d\delta = k \\ \nu \geqslant n+1}} \frac{\mu(d) q^\delta c_\nu}{d\delta} \Big\}. \tag{18}$$

Определим коэффициенты B_k равенством

$$\prod_{l=1}^{+\infty} \left(f_{n+1}\left(\frac{z^l}{q^l}\right)\right)^{\pi_q(l)} = \exp\Big\{ \sum_{k \geqslant n+1} A_k z^k \Big\} = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k. \tag{19}$$

Легко видеть, что $B_0 = 1$ и $B_1 = B_2 = \ldots = B_n = 0$. Отсюда получаем

$$\xi(z) = (1-z)^{-h_1} \left(1 - \frac{z^2}{q}\right)^{-h_2} \ldots \left(1 - \frac{z^n}{q^{n-1}}\right)^{-h_n} \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k =$$

$$\left(\sum_{k_1=0}^{+\infty} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} z^{k_1} \right) \left(\sum_{k_2=0}^{+\infty} (-1)^{k_2} \binom{-h_2}{k_2} \frac{z^{2k_2}}{q^{k_2}} \right) \ldots$$

$$\ldots \left(\sum_{k_n=0}^{+\infty} (-1)^{k_n} \binom{-h_n}{k_n} \frac{z^{nk_n}}{q^{(n-1)k_n}} \right) \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k.$$

Сравнением коэффициентов при z^N получим

$$T_0(N) = \sum_{\substack{k + k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = N \\ k,\, k_i \geqslant 0}} \binom{-h_1}{k_1} \ldots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1 + \ldots + k_n} B_k}{q^{k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n}}.$$

Разобьём эту сумму на 3 части:

$$T_0(N) = S_1 + S_2 + S_3. \tag{20}$$

В S_1 войдут те слагаемые, для которых $k = 0$ и

$$k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n \leq n - 1.$$

В S_2 войдут слагаемые, для которых $k = 0$ и

$$k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n \geq n.$$

Наконец, в S_3 войдут остальные слагаемые из $T_0(N)$, а именно те, для которых k отлично от нуля. Поскольку $B_k = 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, то в S_3 войдут в точности те слагаемые, для которых $k \geq n+1$. Замечаем теперь, что

$$S_1 = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=N \\ k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n \leqslant n-1}} \binom{-h_1}{k_1} \ldots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n}} =$$

$$\sum_{l=0}^{n-1} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+(l+1)k_{l+1}=N \\ k_2+2k_3+\ldots+lk_{l+1}=l}} \binom{-h_1}{k_1} \ldots \binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}} (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{l+1}} = \sum_{l=0}^{n-1} A_l(N) q^{-l}.$$

Положив теперь $n = N$ получим, что суммы S_2 и S_3 окажутся пустыми. Отсюда

$$T_0(N) = S_1 = \sum_{l=0}^{N-1} A_l(N) q^{-l},$$

и доказательство завершается домножением полученного равенства на q^N.

3. Доказательство теоремы 2

Логарифмируя равенство (15) и сравнивая коэффициенты при t^k, получим

$$a_k = \sum_{d|k} \frac{dh_d}{k},$$

откуда в силу формулы обращения Мёбиуса

$$h_k = \sum_{d|k} \frac{\mu(d) a_{k/d}}{d}.$$

В силу неравенства (13) при всех $k \geqslant 1$ имеем

$$|h_k| = \Big| \sum_{d|k} \frac{\mu(d) a_{k/d}}{d} \Big| \leqslant \frac{\tau(k)}{k} \leqslant 1.$$

Далее, в силу только что доказанной оценки и неравенства (13) для величины c_ν, определённой в (17), имеем следующую оценку

$$|c_\nu| = \Big| a_\nu - \sum_{\substack{d|\nu \\ d \leqslant n}} \frac{dh_d}{\nu} \Big| \leqslant \frac{1}{\nu} \left(1 + \sum_{d \leqslant n} \tau(d) \right) \leqslant \frac{n \ln n + n + 1}{\nu} = \frac{b_1(n)}{\nu}.$$

Оценим теперь величины A_k, определённые в (18):

$$|A_k| = \frac{1}{q^k} \Big| \sum_{\substack{d\delta\nu = k \\ \nu \geqslant n+1}} \frac{q^\delta \mu(d) c_\nu}{d\delta} \Big| \leqslant \frac{b_1(n)}{kq^k} \sum_{\substack{\nu|k \\ \nu \geqslant n+1}} \sum_{d|\frac{k}{\nu}} q^{\frac{k}{\nu d}} \leqslant \frac{4b_1(n)}{kq^{\frac{n}{n+1}k}}, \quad k \geqslant n+1. \tag{21}$$

Перейдём к оценке величин B_k, определённых в (19). При $k \geqslant n+1$ имеем

$$B_k = \sum_{r \geqslant 1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_r \geqslant n+1 \\ i_1+\ldots+i_r = k}} A_{i_1} \ldots A_{i_r}.$$

Пусть
$$I(k,r)=\#\{(i_1,\ldots,i_r)\in\mathbb{Z}^r : i_m\geqslant n+1,\ i_1+\ldots+i_r=k\},$$
тогда
$$I(k,r)=\binom{k-nr-1}{r-1}<\frac{k^r}{(r-1)!},\quad 1\leqslant r\leqslant\frac{k}{n+1}.$$
Далее, при условиях $i_m\geqslant n+1$ и $i_1+\ldots+i_r=k$ выполнено неравенство
$$|A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}|\leqslant\left(\frac{4b_1(n)}{n+1}\right)^r\frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}}=\frac{(b(n))^r}{q^{\frac{n}{n+1}k}},$$
где
$$b(n)=\frac{4(n\ln n+n+1)}{n+1}<4(\ln n+1).$$
Отсюда
$$|B_k|\leqslant\sum_{1\leqslant r\leqslant\frac{k}{n+1}}\frac{I(k,r)}{r!}\max_{\substack{i_m\geqslant n+1\\ i_1+\ldots+i_r=k}}|A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_r}|\leqslant\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{(kb(n))^r}{r!(r-1)!}\frac{1}{q^{\frac{n}{n+1}k}}<\frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}}.\tag{22}$$
Таким образом,
$$|B_k|\leqslant\frac{e^{kb(n)}}{q^{\frac{n}{n+1}k}}\tag{23}$$
Напомним, что
$$T_0(N)=\sum_{\substack{k+k_1+2k_2+\ldots+nk_n=N\\ k,k_i\geqslant 0}}\binom{-h_1}{k_1}\ldots\binom{-h_n}{k_n}\frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_n}B_k}{q^{k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n}}$$
и
$$T_0(N)=S_1+S_2+S_3,$$
где величины S_i были определены ранее (см. стр. 202). В нашем случае сумма S_1 даст вклад в главный член, а суммы S_2 и S_3 войдут в остаток.

Возьмём параметры $q\geqslant(en)^{2n+9},\ 6\leqslant n\leqslant\frac{N}{6\ln N}$, $n=6h, h\geqslant 1$. Рассмотрим сначала сумму S_1:
$$S_1=\sum_{l=0}^{n-1}A_l(N)q^{-l},$$
где
$$A_l(N)=\sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+(l+1)k_{l+1}=N\\ k_2+2k_3+\ldots+lk_{l+1}=l}}\binom{-h_1}{k_1}\binom{-h_2}{k_2}\ldots\binom{-h_{l+1}}{k_{l+1}}(-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_{l+1}}.$$
Для любого $m\geqslant 1$
$$0<(-1)^m\binom{-h_1}{m}=(-1)^m\binom{-d_1}{m}=\frac{d_1}{m}\prod_{r=1}^{m-1}\left(1+\frac{d_1}{r}\right)\leqslant\frac{d_1}{m}\exp\left\{d_1\sum_{r=1}^{m-1}\frac{1}{r}\right\}\leqslant\frac{d_1e^{d_1}}{m^{1-d_1}}.$$
С другой стороны, в силу условия $d_1\in(0,1)$ справедлива оценка
$$(-1)^m\binom{-h_1}{m}\leqslant d_1.\tag{24}$$

Далее, в силу неравенства $|h_i| \leqslant 1$ для каждого i имеет место следующая оценка

$$\left|\binom{-h_i}{k_i}\right| \leqslant 1.$$

Перейдём к оценке величины $A_l(N)$. Пусть $l \geqslant 1$, тогда определяя величину θ из равенства

$$2k_2 + 3k_3 + \ldots + (l+1)k_{l+1} = \theta l,$$

будем иметь $1 \leqslant \theta \leqslant 2$. Отсюда

$$k_1 = N - 2k_2 - \ldots - (l+1)k_{l+1} = N - \theta l > N - 2n.$$

Поскольку $n \leqslant \frac{N}{6\ln N}$ и $N \geqslant 190$, то

$$0 < (-1)^{k_1}\binom{-h_1}{k_1} \leqslant \frac{d_1e^{d_1}}{(N-2n)^{1-d_1}} = \frac{d_1e^{d_1}}{N^{1-d_1}}\frac{1}{(1-\frac{2n}{N})^{1-d_1}} <$$
$$\frac{d_1e^{d_1}}{N^{1-d_1}}\frac{1}{(1-\frac{1}{3\ln N})^{1-d_1}} \leqslant \frac{d_1e^{d_1}}{N^{1-d_1}}\frac{1}{(1-\frac{1}{3\ln 190})^{1-d_1}} < \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}.$$

Так как в сумме $A_l(N)$ количество слагаемых равно $p(l)$ — числу разбиений l, то получаем

$$|A_l(N)| \leqslant \frac{3d_1p(l)}{N^{1-d_1}}.$$

Для $l = 0$ эта оценка также выполнена, поскольку

$$A_0(N) = (-1)^N\binom{-h_1}{N} \leqslant \frac{d_1e^{d_1}}{N^{1-d_1}} < \frac{3d_1p(0)}{N^{1-d_1}}.$$

Оценим теперь сумму S_2:

$$S_2 = \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=N\\ k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n\geqslant n}} \binom{-h_1}{k_1}\cdots\binom{-h_n}{k_n}\frac{(-1)^{k_1+\ldots+k_n}}{q^{k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n}} =$$
$$\sum_{n\leqslant l\leqslant N} q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=N\\ k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1}\cdots\binom{-h_n}{k_n}(-1)^{k_1+\ldots+k_n} =$$
$$\left(\sum_{n\leqslant l\leqslant \frac{N}{3}} + \sum_{\frac{N}{3}<l\leqslant N}\right) q^{-l} \sum_{\substack{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=N\\ k_2+2k_3+\ldots+(n-1)k_n=l}} \binom{-h_1}{k_1}\cdots\binom{-h_n}{k_n}(-1)^{k_1+\ldots+k_n} = W_1 + W_2.$$

Определяя в сумме W_1 величину θ_1 из равенства

$$2k_2 + \ldots + nk_n = \theta_1 l,$$

будем иметь $1 \leqslant \theta_1 \leqslant 2$ и $k_1 = N - \theta_1 l \geqslant N/3$. Отсюда

$$0 < (-1)^{k_1}\binom{-h_1}{k_1} \leqslant \frac{d_1e^{d_1}3^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leqslant \frac{3d_1}{N^{1-d_1}}.$$

Остальные множители $|\binom{-h_i}{k_i}|$ в сумме W_1 оценим единицей. Поскольку число решений уравнения $k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n = l$ с неизвестными k_i не превосходит $\dfrac{l^{n-1}}{(n-1)!}$, то будем иметь

$$|W_1| \leqslant \frac{3d_1}{N^{1-d_1}} \sum_{n \leqslant l \leqslant \frac{N}{3}} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!q^l} = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \sum_{l=0}^{\frac{N}{3}-n} \frac{(l+n)^{n-1}}{q^l}.$$

Так как неравенство $(l+n)^{n-1} \leqslant q^{l/2}$ выполнено при $q \geqslant (n+1)^{2n-2}$, то

$$|W_1| \leqslant \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left(n^{n-1} + \sum_{l=1}^{+\infty} q^{-l/2} \right) = \frac{3d_1}{N^{1-d_1}(n-1)!q^n} \left(n^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{q}-1} \right) < \frac{3.1 d_1 n^n}{N^{1-d_1} q^n n!}. \quad (25)$$

В сумме W_2 множители $|\binom{-h_i}{k_i}|, i \neq 1$ оценим единицей, а для величины $(-1)^{k_1}\binom{-h_1}{k_1}$ воспользуемся оценкой (24). Тогда

$$|W_2| \leqslant \frac{d_1}{q^{N/3}} \sum_{N/3 < l \leqslant N} \frac{l^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{d_1 N^n}{(n-1)!q^{N/3}}.$$

Докажем вспомогательное неравенство

$$\frac{3.1 d_1 n^n}{n! N^{1-d_1} q^n} > \frac{3 \cdot 6^5 d_1 N^n}{(n-1)! q^{N/3}}.$$

Для этой цели достаточно показать, что $n < \dfrac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}}$. При $N \geqslant 190$ имеем

$$\frac{\frac{N \ln q}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln q}{\ln N}} \geqslant \frac{\frac{N \ln 2}{3 \ln N} - 1}{1 + \frac{\ln 2}{\ln N}} \geqslant \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 190}\right)^{-1} \frac{\ln 2}{3} \frac{N}{\ln N} - \left(1 + \frac{\ln 2}{\ln 190}\right)^{-1} > \frac{N}{6 \ln N} \geqslant n.$$

Отсюда получаем

$$|S_2| \leqslant |W_1| + |W_2| \leqslant \frac{3.1 d_1 (1 + \frac{1}{3 \cdot 6^5}) n^n}{n! N^{1-d_1} q^n} < \frac{3.2 d_1 n^n}{n! N^{1-d_1} q^n}.$$

Переходим к оценке суммы S_3.

$$|S_3| = \left| \sum_{\substack{k + k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = N \\ k \geqslant n+1}} \binom{-h_1}{k_1} \ldots \binom{-h_n}{k_n} \frac{(-1)^{k_1 + \ldots + k_n} B_k}{q^{k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n}} \right| \leqslant \sum_{k_1=0}^{N-n-1} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k + 2k_2 + \ldots + nk_n = N - k_1 \\ k \geqslant n+1}} \frac{|B_k|}{q^{k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n}}.$$

Заметим теперь, что

$$k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n \geqslant \frac{N - k - k_1}{2}.$$

Отсюда с учётом оценки (23) будем иметь

$$|S_3| \leqslant \sum_{k_1=0}^{N-7} (-1)^{k_1} \binom{-h_1}{k_1} \sum_{\substack{k+2k_2+\ldots+nk_n=N-k_1 \\ k\geqslant n+1}} \frac{1}{q^{\frac{N-k_1}{2}+k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{b(n)}{\ln q}\right)}}.$$

Так как

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{b(n)}{\ln q} > \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{4(\ln n+1)}{(2n+9)\ln(en)} > \frac{1}{2}-\frac{1}{7}-\frac{4}{21}=\frac{1}{6},$$

то вспоминая, что $n=6h$, будем иметь

$$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{b(n)}{\ln q}\right) > \frac{n+1}{6} > h.$$

Поскольку число решений уравнения $k+2k_2+\ldots+nk_n=N-k_1$ с неизвестными $k,k_2,\ldots,k_n$ не превосходит $\frac{(N-k_1)^n}{n!}$, то

$$|S_3| \leqslant \left(\sum_{0\leqslant k_1\leqslant N/2} + \sum_{N/2<k_1\leqslant N-7}\right)(-1)^{k_1}\binom{-h_1}{k_1}\frac{(N-k_1)^n}{n!q^{\frac{N-k_1}{2}+h}} = W_3+W_4.$$

Из оценки (24) получаем

$$|W_3| \leqslant \frac{d_1N^{n+1}}{n!q^{\frac{N}{4}+h}}.$$

В сумме W_4

$$0<(-1)^{k_1}\binom{-h_1}{k_1} \leqslant \frac{d_1e^{d_1}2^{1-d_1}}{N^{1-d_1}} \leqslant \frac{d_1e}{N^{1-d_1}}.$$

Отсюда

$$|W_4| \leqslant \frac{d_1e}{N^{1-d_1}n!q^h}\sum_{N/2<k_1\leqslant N-7}\frac{(N-k_1)^n}{q^{\frac{N-k_1}{2}}} = \frac{d_1e}{N^{1-d_1}n!q^h}\sum_{7\leqslant l<N/2}\frac{l^n}{q^{l/2}}.$$

Так как $q\geqslant(en)^{2n+9} > e^{\frac{4n\ln 7}{7}}$ при $n\geqslant 6$, то при $l\geqslant 7$ выполнено неравенство $l^n\leqslant q^{l/4}$, отсюда

$$|W_4| \leqslant \frac{d_1e}{N^{1-d_1}n!q^h}\sum_{l=7}^{+\infty}\frac{1}{q^{l/4}} = \frac{d_1e}{N^{1-d_1}n!q^h(q^{7/4}-q^{3/2})}.$$

При $q\geqslant(en)^{2n+9}$ и $N\geqslant 190$ выполнено неравенство

$$\frac{N^{n+1}}{q^{N/4}} < \frac{e}{N^{1-d_1}(q^{7/4}-q^{3/2})},$$

тогда

$$|S_3| \leqslant |W_3|+|W_4| \leqslant \frac{2ed_1}{N^{1-d_1}n!q^h(q^{7/4}-q^{3/2})}.$$

Отсюда с учётом доказанных оценок

$$|S_2|+|S_3| \leqslant \frac{3.2d_1n^n}{n!N^{1-d_1}q^n} + \frac{2ed_1}{n!N^{1-d_1}q^h(q^{7/4}-q^{3/2})} < \frac{4ed_1}{n!N^{1-d_1}(q^{7/4}-q^{3/2})q^h}.$$

Итак, при $q\geqslant(en)^{2n+9},\ 6\leqslant n\leqslant\frac{N}{6\ln N},\ n=6h,\ h\geqslant 1$ имеем:

$$T_0(N) = A_0(N)+A_1(N)q^{-1}+\ldots+A_{n-1}(N)q^{-n+1}+\Theta_1(h)\frac{1}{N^{1-d_1}q^h},$$

где

$$|\Theta_1(h)| \leqslant \frac{4ed_1}{(6h)!(q^{7/4}-q^{3/2})}.$$

Теперь

$$\left| A_h(N)q^{-h} + A_{h+1}(N)q^{-h-1} + \ldots + A_{6h-1}(N)q^{-6h+1} + \frac{\Theta_1(h)}{N^{1-d_1}q^h} \right| \leqslant$$

$$\frac{d_1 q^{-h}}{N^{1-d_1}} \left(3p(h) + 3p(n) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{q^l} + \frac{12}{6!(q^{7/4}-q^{3/2})} \right) \leqslant \frac{3.1 d_1 p(h)}{q^h N^{1-d_1}}$$

при $q \geqslant (en)^{2n+9}$. Таким образом, равенство

$$T_0(N) = A_0(N) + A_1(N)q^{-1} + \ldots + A_{h-1}(N)q^{-h+1} + \frac{\Theta(h)}{N^{1-d_1}q^h},\ |\Theta(h)| \leqslant 3.1 d_1 p(h),$$

выполняется при $q \geqslant (6eh)^{12h+9}$ и $1 \leqslant h \leqslant \frac{N}{36 \ln N}$. Доказательство завершается домножением обеих частей полученного равенства на q^N.

4. Следствие из теоремы Городецкого

В работе [4] Городецкий доказывает следующее утверждение

Теорема 3. *Пусть*

$$a(x) = \exp\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_k}{k} x^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$b(x) = \left(1 - \frac{x}{\beta}\right)^{-c_1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,\ c_1 \in (0,1)$$

степенные ряды с радиусами сходимости не меньше α *и ровно* β *соответственно. Пусть при этом* $\alpha > \beta > 0$ и $r = \frac{\beta}{\alpha} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, и *для некоторого положительного* c_2 *имеет место неравенство* $|\widetilde{a}_k| \leq c_2 \alpha^{-k}$. *Тогда при любом фиксированном* $n \geqslant 0$ *и* $N > n$ *для коэффициента при* x^N *в произведении* $a(x)b(x)$ *имеет место равенство*

$$[x^N]a(x)b(x) = b_N \left(a(\beta) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k-c_1}{k}}{\binom{N+c_1-1}{k}} \frac{\beta^k}{k!} a^{(k)}(\beta) + E \right),$$

где $E \ll_{n,c_1,c_2} \left(\frac{r}{N}\right)^{n+1}$.

Применим эту теорему к функции $g(F)$, для которой выполнено неравенство (13). В формуле (16) положим $x = zq^{-1} = q^{-s}, n = 1$. Тогда

$$\sum_{N=0}^{\infty} T(N)x^N = \left(1 - \frac{x}{q^{-1}}\right)^{-d_1} \exp\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \pi_q(l) \ln f_2(x^l) \right\} =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{q^{-1}}\right)^{-d_1} \exp\left\{ \sum_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k \right\} = \left(1 - \frac{x}{q^{-1}}\right)^{-d_1} a(x).$$

Положим $\beta = q^{-1}, c_1 = d_1$. Пусть R — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=2}^{\infty} A_k q^k x^k$, тогда в силу оценки (18) будем иметь

$$R^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|A_k|q^k} \leqslant \sqrt{q},$$

отсюда $R \geq \frac{1}{\sqrt{q}}$. Положим $\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}$, тогда $\alpha > \beta > 0$ и

$$r = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Далее, пусть $\widetilde{a}_k = kA_kq^k$, тогда в силу оценки (21) имеем

$$|\widetilde{a}_k| \leqslant c_2(\sqrt{q})^k, \quad c_2 = 4b_1(1) = 8.$$

Таким образом, все условия теоремы 3 выполнены, и мы имеем доказанным следующее

Следствие. *Пусть g — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена P и любого целого $k \geqslant 1$ выполнено равенство $d_k = g(P^k)$, где $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная последовательность вещественных чисел. Положим*

$$f(x) = 1 + d_1x + d_2x^2 + \ldots.$$

Далее, пусть $0 < d_1 < 1$ и при $k \geqslant 1$ выполнено неравенство $k|a_k| \leqslant 1$, где числа a_k были определены в (10). Тогда при $N \geqslant n+1$ имеет место равенство

$$T(N) = (-1)^N \binom{-d_1}{N} q^N \left(a(q^{-1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{k-d_1}{k}}{\binom{N+d_1-1}{k}} \frac{q^{-k}}{k!} a^{(k)}(q^{-1}) \right) + R_n, \qquad (26)$$

где $R_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \left(\frac{1}{\sqrt{q}N}\right)^{n+1}$, и $a(x)$ определяется бесконечным произведением

$$a(x) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left\{ f(x^l)(1-x^l)^{d_1} \right\}^{\pi_q(l)},$$

сходящемся в круге с центром в нуле и радиусом $r = \frac{1}{\sqrt{q}}$.

Соответствующий остаток, который получается из теоремы 2, имеет вид

$$R'_n \ll_n \frac{q^N}{N^{1-d_1}} \frac{1}{q^{n+1}}.$$

При выполнении условий теоремы 2 имеем $R'_n = o(R_n)$ при $q \to \infty$ и $N \geqslant 190$ фиксированном. Далее, в случае если $q \to \infty,\ N \to \infty$ имеем

$$R'_n \ll_n R_n \ \text{ при } N^2 \ll q, \quad R_n \ll_n R'_n \text{ при } \ q \ll N^2.$$

Заметим, что

$$a(q^{-1}) = \prod_{l=1}^{+\infty} \left(f_2(q^{-l}) \right)^{\pi_q(l)} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} B_k = 1 + O\left(\frac{1}{q}\right).$$

Отсюда следует, что формула (26) даёт асимптотическое разложение $T(N)$ при условии $q^N \to \infty$ в отличие от формулы (14), в которой требуется, чтобы $q \to \infty$. В частности, формула (26) даёт разложение $T(N)$ при фиксированном q и $N \to \infty$.

5. Примеры

Вычисления показывают, что

- $h_1 = d_1$;
- $h_2 = d_2 - \dfrac{d_1(d_1+1)}{2}$;
- $h_3 = d_3 - d_1 d_2 + \dfrac{d_1(d_1^2-1)}{3}$;

Указанные величины h_k позволяют выписать первые три значения $A_l(N)$.

- $A_0(N) = \binom{d_1+N-1}{N}$;
- $A_1(N) = \binom{d_1+N-3}{N-2}\left(d_2 - \dfrac{d_1(d_1+1)}{2}\right)$;
- $A_2(N) = \binom{d_1+N-4}{N-3}\left(d_3 - d_1 d_2 + \dfrac{d_1(d_1^2-1)}{3}\right) + \binom{d_1+N-5}{N-4}\binom{1+d_2-\frac{d_1(d_1+1)}{2}}{2}$;

В свою учередь, указанные величины $A_l(N)$, позволяют выписать первые три слагаемых в главном члене асимптотики, получающейся из теорем 1 и 2. Именно, имеет место формула

$$T(N) = \binom{d_1+N-1}{N} q^N \left(1 + \frac{\binom{N}{2}}{\binom{d_1+N-1}{2}}\left(d_2 - \frac{d_1(d_1+1)}{2}\right) q^{-1} + \right.$$
$$\left. \left\{ \frac{\binom{N}{3}}{\binom{d_1+N-1}{3}}\left(d_3 - d_1 d_2 + \frac{d_1(d_1^2-1)}{3}\right) + \frac{\binom{N}{4}}{\binom{d_1+N-1}{4}}\binom{1+d_2-\frac{d_1(d_1+1)}{2}}{2} \right\} q^{-2} \right) + R,$$

где $R \ll_N q^{N-3}$ при выполнении условий теоремы 1 и $|R| \leqslant 9.3 \cdot d_1 \dfrac{q^{N-3}}{N^{1-d_1}}$ при выполнении условий теоремы 2.

Нашей ближайшей целью будет установление легко проверяемых достаточных условий выполнения неравенства (13) теоремы 2. Для этого нам понадобится реккурентное соотношение для последовательности a_k, определённой в (10). Для функции f, определённой в (9), имеем равенство

$$\frac{d \ln f(t)}{dt} f(t) = \frac{df(t)}{dt}.$$

Раскладывая обе части равенства в ряд по степеням t и сравнивая коэффициенты при t^n, после несложных преобразований получим

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} k a_k d_{n+1-k}\right), \quad n \geqslant 0,$$

в частности $a_1 = d_1$.

Предложение A. *Пусть g — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена P и любого целого $k \geqslant 1$ выполнено равенство $d_k = g(P^k)$, где $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — фиксированная последовательность. Пусть при этом*

- $d_1 \in (0, 1)$;
- $d_{k+1} \leqslant d_k$ при $k \geqslant 1$;

- $kd_k \leqslant (k+1)d_{k+1}$ при $k \geqslant 1$.

Тогда для суммы $T(N)$ имеют место разложения (14) *и* (26).

Доказательство. Достаточно проверить, что при $k \geqslant 1$

$$0 < a_k < \frac{1}{k}. \tag{27}$$

Доказательство проведём индукцией по величине k. При $k = 1$ имеем

$$a_1 = d_1 \in (0, 1).$$

Пусть теперь неравенство (27) выполнено при $k = 1, \dots, n, \quad n \geqslant 1$. Докажем, что неравенство выполнено и при $k = n+1$. В силу условий предложения и предположения индукции имеем

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1)d_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} ka_k d_{n+1-k}\right) =$$

$$\frac{1}{n+1}\left((n+1)d_{n+1} - nd_n + nd_n - \sum_{k=1}^{n-1} ka_k d_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k}) - na_n d_1\right) =$$

$$\frac{1}{n+1}\left((n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k})\right) > 0.$$

С другой стороны, в силу предположения индукции

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((n+1)d_{n+1} - nd_n + (1-d_1)na_n + \sum_{k=1}^{n-1} ka_k (d_{n-k} - d_{n+1-k})\right) <$$

$$\frac{1}{n+1}\left(n(d_{n+1} - d_n) + d_{n+1} + (1-d_1) + \sum_{k=1}^{n-1} (d_{n-k} - d_{n+1-k})\right) =$$

$$\frac{1}{n+1}\left((n+1)(d_{n+1} - d_n) + 1\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом, предложение доказано.

Предложение B. *Пусть g — мультипликативная функция, такая что для любого неприводимого многочлена P и любого целого $k \geqslant 1$ выполнено равенство $d_k = g(P^k)$, где $\{d_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ — фиксированная последовательность. Тогда, если $d_1 \in (0,1)$ и для любого $n \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |d_k| + (n+1)|d_{n+1}| \leqslant 1, \tag{28}$$

то для суммы $T(N)$ имеют место разложения (14) *и* (26).

Доказательство. Достаточно показать, что неравенство (28) влечёт неравенство (13). Доказательство проведём индукцией по величине n. При $n = 1$ имеем $a_1 = d_1 \in (0,1)$. Отсюда $|a_1| \leqslant 1$.

Пусть теперь доказано, что $|a_k| \leqslant \dfrac{1}{k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad n \geqslant 1$. Тогда

$$|a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+1}\left(|d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^{n} |ka_k d_{n+1-k}|\right) \leqslant$$

$$\frac{1}{n+1}\left(|d_{n+1}|(n+1) + \sum_{k=1}^{n} |d_{n+1-k}|\right) \leqslant \frac{1}{n+1},$$

что и требовалось доказать. Приведём примеры функций g, удвовлетворяющих условиям предложения A:

- $g_1(F) = (\tau(F))^{-\alpha},\ 0 < \alpha \leqslant 1.$
- $g_2(F) = c^{\omega(F)},\ 0 < c < 1.$
- $g_3(F) = \dfrac{\tau_m(F)}{\tau_{m+1}(F)},\ m \geqslant 2.$
- $g_4(F) = \dfrac{1}{\tau(F^r)},\ r \geqslant 1.$

Приведём также примеры функций g, для которых выполнено предложение B:

- $g_5(F) = (\tau(F))^{-\alpha},\ \alpha \geqslant 2.$
- $g_6(F) = \dfrac{1}{\tau_m(F)},\ m \geqslant 3.$
- $g_7(F) = \dfrac{1}{(\tau_{m_1}(F))^{\gamma_1} \dots (\tau_{m_k}(F))^{\gamma_k}},\quad k \geqslant 2,\ \gamma_i \geqslant 1.$
- $g_8(F) = \dfrac{1}{\tau_m(F^r)},\ r \geqslant 1,\ m \geqslant 3.$

Для функции g_1 условие $kd_k \leqslant (k+1)d_{k+1}$ равносильно неравенству

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{k}.$$

Остальные условия для g_1 очевидно выполнены. Для функций $g_k,\ k \in \{2, 3, 4\}$ условия предложения A легко проверяются.

Для функции g_5 имеем $d_k = g_5(P^k) = \dfrac{1}{(k+1)^{\alpha}}$. Отсюда при $\alpha \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^{\alpha}} + \frac{n+1}{(n+2)^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} =$$
$$\frac{\pi^2}{6} - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - 1 - \int_{n+2}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \frac{n+1}{(n+2)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1.$$

Для функции g_6 получаем

$$d_k = g_6(P^k) = \frac{1}{\binom{m+k-1}{m-1}} \leqslant \frac{2}{(k+1)(k+2)},\ m \geqslant 3.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)(k+2)} + \frac{2(n+1)}{(n+2)(n+3)} = 1 - \frac{4}{(n+2)(n+3)} < 1.$$

Для функций g_7 и g_8 предложение B выполнено в силу очевидных неравенств

$$g_7(P^k) \leqslant g_5(P^k) \text{ при } \alpha = 2,\quad g_8(P^k) \leqslant g_6(P^k).$$

Перейдём к конкретным примерам. Всюду ниже F пробегает унитарные многочлены степени N. Следующие два примера относятся к теореме 2. При $q \to \infty$ и $N \geqslant 710$ фиксированном и при $q \to \infty$ и $N \to \infty$ имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{q^N}{4^N}\left(\binom{2N}{N} + 2\binom{2N-4}{N-2}q^{-1} + \left(8\binom{2N-6}{N-3} + 18\binom{2N-8}{N-4}\right)q^{-2}\right) + R_1;$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{q^N}{4^N}\left(\binom{2N}{N} - \frac{2}{3}\binom{2N-4}{N-2}q^{-1} - \left(\frac{8}{3}\binom{2N-6}{N-3} + \frac{46}{9}\binom{2N-8}{N-4}\right)q^{-2}\right) + R_2;$$

где $R_1,\ R_2 \ll \frac{q^{N-3}}{\sqrt{N}}$ и константа под знаком $\ll$ не превосходит 5.

Следующие два примера относятся к следствию из теоремы 3.
При $q^N \to \infty$ имеем

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = C_0 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_0 = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(\frac{2q^l-1}{2\sqrt{q^{2l}-q^l}}\right)^{\pi_q(l)};$$

$$\sum_{\deg F=N} \frac{1}{\tau(F)} = C_1 \cdot \frac{\binom{2N}{N}}{4^N} q^N + O\left(\frac{q^{N-0.5}}{N^{1.5}}\right), \quad C_1 = \prod_{l=1}^{+\infty}\left(\sqrt{q^{2l}-q^l}\ln\frac{q^l}{q^l-1}\right)^{\pi_q(l)}.$$

Следующие четыре примера относятся к теореме 1.

$$\sum_{\deg F=N} \tau_k(F^r) = \binom{\binom{k+r-1}{k-1} + N - 1}{N} q^N + O_{N,k,r}\left(q^{N-1}\right), \quad N \geqslant 1,\ q \to \infty;$$

$$\sum_{\deg F=3} \tau_3(F^2) = 56q^3 - 36q^2 + 8q;$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{2^{\omega(F)}} = \frac{5q^3 + q^2 + 2q}{16};$$

$$\sum_{\deg F=3} \frac{1}{\tau(F)} = \frac{15q^3 - q^2 - 2q}{48};$$

6. Заключение

Отметим в качестве заключения, что представляет интерес решение рассмотренных нами задач в кольце многочленов многих переменных над конечным полем $\mathbb{F}_q$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. Carlitz, The arithmetic of polymomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54(1)** (1932), pp. 39-50.

2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.

3. M. Rosen 2002, Number Theory in Function Fields, New York: Springer.

4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», `arXiv:1603.02890v1 [math.NT]`.

5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», `arXiv:1504.06809v2 [math.NT]`.

6. Р. Лидл, Г. Нидеррайтер «Конечные поля» 1988: в 2-х т. Т.1. Пер. с англ. — Москва: Изд-во «Мир».— 430 с.

7. Карацуба А. А. 1975, «Основы аналитической теории чисел». — Москва: Изд-во «Наука».— 184 с.

REFERENCES

1. L. Carlitz, The arithmetic of polymomials in a Galois field. // *Amer. J. Math.* **54(1)**, (1932), pp. 39-50.

2. S. Ramanujan, Some formulae in the analytic theory of numbers. // *The Messenger of Math.* **45** (1916), pp. 81-84.

3. M. Rosen 2002, «Number Theory in Function Fields», New York: Springer.

4. O. Gorodetsky 2016, «A Polynomial Analogue of Landau's Theorem and Related Problems», `arXiv:1603.02890v1 [math.NT]`.

5. L. Bary-Soroker, Y. Smilansky, A. Wolf. 2016, «On the function field analogue of Landau's theorem on sums of squares», `arXiv:1504.06809v2 [math.NT]`.

6. R. Lidl, H. Niederreiter 1996, «Finite fields», Cambridge University Press.

7. Karatsuba A.A. 1993, «Basic Analytic Number Theory», Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Получено 03.02.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.