

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.37

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛИАДИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В. Г. Чирский (г. Москва), В. Ю. Матвеев (г. Москва)

Аннотация

В работе исследуются статистические свойства полиадических разложений некоторых чисел.

Ключевые слова: статистические свойства, полиадические разложения.

ON CERTAIN PROPERTIES OF POLYADIC EXPANSIONS

V. G. Chirskii (Moscow), V. Y. Matveev (Moscow)

Abstract

The paper studies some statistical properties of polyadic expansions of certain numbers.

Keywords: statistical properties, polyadic expansions.

Напомним основные понятия теории полиадических чисел.

На кольце $\mathbb{Z}$ целых чисел можно ввести топологию τ , рассматривая множество идеалов (m) в качестве полной системы окрестностей нуля аддитивной группы целых чисел. При этом операции сложения и умножения непрерывны и кольцо целых чисел с введенной топологией имеет структуру топологического кольца (см. [1], [2]). Обозначив это кольцо $\mathbb{Z}_\tau$.

Бесконечная последовательность $x_1, x_2, \dots$ целых чисел называется фундаментальной, если для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $\mathcal{N} \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, n > \mathcal{N}$ справедливо сравнение $x_m \equiv x_n \pmod{k!}$.

Метрическое пространство $\mathbb{Z}_\tau$ не является полным. Например, последовательность $1!, 1! + 2!, \dots, 1! + 2! + \dots + n!, \dots$ является фундаментальной, но не имеет предела в $\mathbb{Z}_\tau$. Для фундаментальных последовательностей $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ рассмотрим последовательности $\{x_k + y_k\}$, $\{x_k - y_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$. Эти последовательности также являются фундаментальными. Таким образом, фундаментальные последовательности элементов из кольца $\mathbb{Z}_\tau$ образуют кольцо.

Будем называть последовательность $c_1, c_2, \dots$ нулевой последовательностью, если $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$, где предел понимается в смысле топологии кольца $\mathbb{Z}_\tau$.

Назовем фундаментальные последовательности $\{x_k\}$ и $\{y_k\}$ эквивалентными, если их разность $\{x_k - y_k\}$ является нулевой последовательностью. Это свойство является рефлексивным, симметричным и транзитивным, т.е. определяет отношение эквивалентности.

Полиадическим числом будем называть класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из $\mathbb{Z}_\tau$.

Легко проверить, что если последовательность $\{x_k\}$ эквивалентна последовательности $\{u_k\}$, а последовательность $\{y_k\}$ эквивалентна $\{v_k\}$, то $\{x_k + y_k\}$ эквивалентна $\{u_k + v_k\}$, $\{x_k - y_k\}$ эквивалентна $\{u_k - v_k\}$, $\{x_k \cdot y_k\}$ эквивалентна $\{u_k \cdot v_k\}$. Поэтому на множестве полиадических чисел можно ввести операции сложения и умножения, что позволяет говорить о кольце $\mathfrak{G}$ целых полиадических чисел. Вложение кольца $\mathbb{Z}$ в $\mathfrak{G}$ осуществляется сопоставлением элементу $x \in \mathbb{Z}$ класса $\mathfrak{x}$ фундаментальных последовательностей, эквивалентных последовательности $x, x, x, \dots$

Так как $\mathbb{Z}_\tau$ - метрическое пространство, его пополнение приводит к топологическому пространству $\mathfrak{G}_\tau$.

Элементы $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}_t$ имеют каноническое представление в виде ряда

$$\mathfrak{a} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n! \quad (1)$$

где $a_n \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Кольцо $\mathfrak{G}_\tau$ является прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p_i}$ по всем простым числам p_i , при этом ряд $\mathfrak{a}$ сходится в любом $\mathbb{Z}_{p_i}$. Действительно, степень, в которой простое число p входит в разложение числа $n!$ на простые множители, равна $\frac{n-S_n}{p-1}$, где S_n - сумма цифр в p -ичном разложении числа n . Следовательно, для любого p_i при $n \rightarrow \infty$

$$|a_n \cdot n!|_{p_i} \rightarrow 0,$$

что является достаточным условием сходимости ряда (1) в $\mathbb{Z}_{p_i}$.

Любое натуральное число M допускает единственное представление в виде

$$M = \sum_{n=1}^N a_n \cdot n!, \quad a_n \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad (2)$$

так называемое полиадическое представление. Свойства этого представления изучались в [3]

В настоящей работе представлены данные о статистических свойствах совокупностей цифр десятичных разложений некоторых чисел вида (2). Именно рассматриваются числа

$$A_N = \sum_{n=1}^N n \cdot n! = (N+1)! - 1, \quad (3)$$

$$B_N = \sum_{n=1}^N n!, \quad (4)$$

Разумеется, имеет смысл рассматривать не все цифры чисел (3) и (4). Действительно, в разложении числа $M!$ на множители число 2 входит в степени $M - S_2(M)$, где $S_2(M)$ – сумма цифр двоичного разложения числа M , а число 5 входит в степени $\frac{M - S_5(M)}{4}$, где $S_5(M)$ – сумма цифр разложения числа M по основанию 5. Следовательно, число $M!$ делится, по крайней мере, на 10 в степени $\frac{M - S_5(M)}{4}$.

Из этого следует, например, что примерно $\frac{M - S_5(M)}{4}$ последних цифр числа A_N равны 9. Поэтому рассматриваются только цифры "головной части" десятичных разложений чисел (3) и (4).

В вычислительных экспериментах для значений $N \in [4500!; 5000!]$ рассматривались все цифры соответствующих чисел (3) и (4) за исключением "хвоста" из повторяющихся цифр в конце числа, и проверена гипотеза о равномерном распределении как самих цифр, так и пар цифр. Использовался критерий χ^2 .

Далее будут приведены результаты экспериментов выборки чисел

$N = \{4361, 4471, 4579, 4680, 4791, 4895, 4998, 5000, 4156, 4295\}$ для десятичных разложений чисел (3) и (4).

Для A_{5000} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1533	1537	1462	1538	1482
Средние значения позиций	7529	7629	7525	7700	7458
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1468	1531	1522	1522	1483
Средние значения позиций	7555	7590	7440	7590	7364

Всего чисел: 15078

χ^2 : 5,50709643188752

Для A_{4998} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1476	1561	1543	1474	1488
Средние значения позиций	7545	7618	7623	7321	7600
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1521	1508	1482	1486	1536
Средние значения позиций	7627	7474	7403	7613	7540

Всего чисел: 15075

χ^2 : 5,78739635157546

Для A_{4895} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1471	1499	1469	1446	1447
Средние значения позиций	7353	7348	7502	7095	7412
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1524	1511	1493	1399	1459
Средние значения позиций	7346	7394	7405	7391	7341

Всего чисел: 14718

χ^2 : 8,29161570865607

Для A_{4791} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1436	1438	1455	1482	1450
Средние значения позиций	7209	7143	7075	7260	7277
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1404	1439	1415	1427	1415
Средние значения позиций	7205	7168	6958	7240	7267

Всего чисел: 14361

χ^2 : 3,25388204164055

Для A_{4686} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1395	1396	1366	1440	1402
Средние значения позиций	7015	6775	7037	7018	7009
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1402	1461	1399	1394	1346
Средние значения позиций	6994	7088	7004	7021	7042

Всего чисел: 14001

χ^2 : 6,77015927433755

Для A_{4579} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1366	1360	1397	1431	1298
Средние значения позиций	6896	6612	6857	6823	6893
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1352	1409	1338	1356	1329
Средние значения позиций	6886	6805	6921	6739	6751

Всего чисел: 13636

χ^2 : 10,3303021413904

Для A_{4471} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1297	1349	1306	1297	1409
Средние значения позиций	6640	6753	6604	6700	6789
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1333	1337	1334	1316	1290
Средние значения позиций	6679	6637	6363	6751	6409

Всего чисел: 13268

χ^2 : 8,38378052457039

Для A_{4361} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1294	1209	1292	1328	1258
Средние значения позиций	6458	6341	6540	6565	6601
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1330	1307	1300	1275	1302
Средние значения позиций	6347	6344	6499	6363	6413

Всего чисел: 12895

χ^2 : 8,84412563008918

Для A_{4259} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1276	1300	1222	1201	1266
Средние значения позиций	6232	6399	6191	6282	6356
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1234	1202	1261	1258	1329
Средние значения позиций	6336	6265	6180	6151	6345

Всего чисел: 12549

χ^2 : 12,2423300661407

Для A_{4156} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1164	1222	1233	1250	1233
Средние значения позиций	1180	1229	1212	1279	1199
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1180	1229	1212	1279	1199
Средние значения позиций	6126	6336	5981	6056	6022

Всего чисел: 12201

χ^2 : 8,23284976641259

Для пар цифр использовался критерий χ^2 с 99 степенями свободы и для этих же значений получили следующие результаты:

Значение	A_{4156}	A_{4259}	A_{4361}	A_{4471}
χ^2	112,16393442623	108,05291679949	82,595160539786	103,925836599337

Значение	A_{4579}	A_{4686}	A_{4791}	A_{4895}
χ^2	100,685831622177	119,542857142857	114,623955431755	97,5973637722517

Значение	A_{4998}	A_{5000}
χ^2	104,196762637654	102,955166467701

Для B_{4156} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1320	1306	1336	1290	1335
Средние значения позиций	6559	6682	6609	6511	6794
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1359	1274	1310	1355	1352
Средние значения позиций	6612	6649	6691	6508	6573

Всего чисел: 13237

χ^2 : 5,61010803052051

Для B_{4259} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1327	1344	1400	1334	1341
Средние значения позиций	6835	6572	6900	6875	6816
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1450	1318	1384	1366	1346
Средние значения позиций	6726	6797	6877	6750	6904

Всего чисел: 13610

χ^2 : 10,7597354886113

Для B_{4361} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1397	1378	1395	1407	1461
Средние значения позиций	7070	6768	6967	6934	7160
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1346	1380	1417	1389	1411
Средние значения позиций	6726	6797	6877	6750	6904

Всего чисел: 13981

χ^2 : 5,79279021529218

Для B_{4471} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1455	1394	1376	1471	1472
Средние значения позиций	7030	7182	7173	7313	7251
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1375	1388	1484	1482	1485
Средние значения позиций	7153	7286	7349	7158	7015

Всего чисел: 14382

χ^2 : 5,79279021529218

Для B_{4579} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1462	1511	1427	1482	1564
Средние значения позиций	7498	7245	7427	7371	7324
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1408	1503	1496	1457	1467
Средние значения позиций	7550	7312	7562	7302	7308

Всего чисел: 14777

χ^2 : 12,0241591662719

Для B_{4680} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1537	1461	1451	1510	1561
Средние значения позиций	7671	7372	7543	7360	7816
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1527	1506	1559	1510	1525
Средние значения позиций	7654	7557	7527	7541	7676

Всего чисел: 15147

χ^2 : 7,8709315375982

Для B_{4791} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1538	1601	1579	1575	1568
Средние значения позиций	7843	7687	7940	7796	7774
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1506	1560	1589	1487	1552
Средние значения позиций	7792	7705	7694	7571	7966

Всего чисел: 15555

χ^2 : 7,56187720990035

Для B_{4895} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1585	1553	1588	1694	1585
Средние значения позиций	7928	7884	8046	7978	8159
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1556	1588	1583	1610	1596
Средние значения позиций	7931	7961	8076	7862	7865

Всего чисел: 15938

χ^2 : 8,62065503827331

Для B_{4998} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1598	1617	1644	1600	1664
Средние значения позиций	8164	8054	8203	8339	8154
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1696	1676	1660	1625	1539
Средние значения позиций	8165	8064	8280	8115	8053

Всего чисел: 16319

χ^2 : 11,6961210858508

Для B_{5000} получаем следующие результаты:

Для 9 степеней свободы:

Число	0	1	2	3	4
Количества каждого числа	1642	1609	1669	1582	1712
Средние значения позиций	8138	8176	8135	8160	8162
Число	5	6	7	8	9
Количества каждого числа	1656	1563	1653	1625	1615
Средние значения позиций	8102	8271	8148	8215	8131

Всего чисел: 16326

χ^2 : 10,4192086242803

Для пар цифр использовался критерий χ^2 с 99 степенями свободы и для этих же значений получили следующие результаты:

Значение	B_{4156}	B_{4259}	B_{4361}	B_{4471}
χ^2	101,220308250227	99,5848640705364	81,9885550786838	93,3693505771103

Значение	B_{4579}	B_{4680}	B_{4791}	B_{4895}
χ^2	87,9068760151597	111,180641753598	99,2376237623761	76,8401305057096

Значение	B_{4998}	B_{5000}
χ^2	118,76688319647	78,0265833639594

Некоторые табличные критические значения критерия χ^2 .

Число степеней свободы	Уровни значимости		
	0,10	0,05	0,01
9	14,684	16,921	21,669
10	15,987	18,309	23,213
90	107,565	113,145	124,116
100	118,498	124,342	135,807

Приведенные для критерия χ^2 для 9 и 99 степеней свободы статистические данные позволили сделать вывод о том, что цифры так и пары цифр рассмотренных значений равномерно распределены.

В дальнейшем планируется исследование генераторов случайных чисел на основе разложений (2) и описание арифметических свойств соответствующих полиадических чисел (1).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Постников А. Г. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Наука, 1971.
2. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984 .
3. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлениях натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2013. Т. 14, вып. 1(45). С. 75—85.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Московский педагогический государственный университет

Поступило 30.05.2013