

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-186-195

Об асимптотическом поведении некоторых сумм, содержащих функцию количества простых делителей

М. Е. Чанга

Марис Евгеньевич Чанга — доцент кафедры высшей математики, Московский государственный университет геодезии и картографии (г. Москва).

e-mail: maris_changa@mail.ru

Аннотация

В статье рассматриваются суммы значений композиции вещественной периодической арифметической функции и функции количества простых делителей по натуральным числам, не превосходящим заданного. При этом подсчет простых делителей может производиться как с учетом кратности, так и без ее учета, а на сами делители может быть наложено дополнительное требование принадлежности некоторому специальному множеству. Упомянутое специальное множество может быть, например, объединением нескольких арифметических прогрессий с заданной разностью, или же допускать аналог асимптотического закона распределения простых чисел со степенным понижением в остатке. Более того, вместо функции количества простых делителей можно рассмотреть любую вещественную аддитивную функцию, равную единице на простых числах. В качестве примера периодической арифметической функции можно рассмотреть символ Лежандра. Доказаны асимптотические формулы для указанных сумм и изучено их поведение.

Доказательство использует разложение периодической арифметической функции по характерам аддитивной группы вычетов, что сводит задачу к рассмотрению специальной тригонометрической суммы с функцией количества простых делителей в показателе. Для нахождения асимптотик этих сумм мы записываем соответствующий производящий ряд Дирихле, аналитически продолжаем его и применяем формулу Перрона и метод комплексного интегрирования в специально адаптированном варианте.

Ключевые слова: ограничения на простые делители, количество простых делителей, тригонометрическая сумма, метод комплексного интегрирования.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

М. Е. Чанга Об асимптотическом поведении некоторых сумм, содержащих функцию количества простых делителей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 186–195.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-186-195

On the asymptotic behavior of some sums involving the number of prime divisors function

M. E. Changa

Maris Evgenievich Changa — Docent, Department of Higher Mathematics, Moscow State University of Geodesy and Cartography (Moscow).

e-mail: maris_changa@mail.ru

Abstract

We consider sums of values of the composition of a real periodic arithmetic function and the number of prime divisors function over integers not exceeding a given bound. The prime divisors may be counted as with their multiplicity or without it, and we can restrict these divisors to the additional condition of belonging to some special set. This special set may be, for example, a sum of several arithmetic progressions with a given difference or imply an analog of prime number theorem with a power decrement in the remainder term. Moreover, instead of the number of prime divisors function we can consider an arbitrary real additive function that equals to one on primes. As an example of the periodic arithmetic function we can consider the Legendre symbol. In the paper we prove asymptotic formulae for such sums and investigate their behavior.

The proof uses the decomposition of the periodic arithmetic function into additive characters of the residue group, so the problem reduces to special trigonometric sums with the number of prime divisors function in the exponent. In order to establish asymptotic formulae for such sums we consider the corresponding Dirichlet series, accomplish its analytic continuation and make use of the Perron formula and complex integration method in specially adapted form.

Keywords: restrictions on prime divisors, number of prime divisors, trigonometric sum, complex integration method.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

M. E. Changa, 2020, "On the asymptotic behavior of some sums involving the number of prime divisors function", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 186–195.

1. Введение

Пусть E — некоторое бесконечное множество натуральных чисел. Через M будем обозначать множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат E . Количество чисел множества M , не превосходящих x , обозначим через $n(x)$, то есть

$$n(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1.$$

В тривиальном случае $E = \mathbb{N}$ имеем, очевидно, $M = \mathbb{N}$ и $n(x) = [x]$. Пусть теперь $f(n)$ — вещественная арифметическая функция, периодическая с периодом k , не меньшим двух, а

$\gamma(n)$ — вещественная аддитивная арифметическая функция с условием $\gamma(p) = 1$ для любого простого p . Введем обозначение

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)).$$

Простейшим примером периодической арифметической функции является функция $f(n) = (-1)^n$, периодическая с периодом 2.

Рассмотрим один из вариантов выбора функции $\gamma(n)$. Пусть $\Omega(n)$ обозначает число простых делителей n с учетом их кратности. Таким образом, при $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ имеем $\Omega(n) = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$. Очевидно, что $\Omega(n)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к функции $\gamma(n)$, а функция $a^{\Omega(n)}$ вполне мультипликативна при любом ненулевом комплексном a . При $a = -1$ эта функция называется функцией Лиувилля и обозначается $\lambda(n)$. Таким образом, $\lambda(n) = f(\gamma(n))$ при $f(n) = (-1)^n$ и $\gamma(n) = \Omega(n)$. Отсюда, пользуясь классическим результатом [1, теорема 5.2, с.86], в случае $E = \mathbb{N}$ получаем

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \lambda(n) \ll x e^{-c\sqrt{\ln x}}.$$

Пусть теперь заданы натуральные числа $m \geq 3$ и $r < \varphi(m)$. Пусть $l_1, \dots, l_r$ — различные натуральные числа, не превосходящие m и взаимно простые с ним. Возьмем в качестве E множество всех натуральных чисел, сравнимых с одним из чисел $l_1, \dots, l_r$ по модулю m . Иначе говоря, множество E есть объединение r арифметических прогрессий с первыми членами $l_1, \dots, l_r$ и разностью m . В этом случае асимптотическая формула для $n(x)$ была найдена Э. Ландау [2, §183] и имеет вид

$$n(x) = \frac{C_1 x}{\ln^{-\frac{r}{\varphi(m)}+1} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right).$$

При исследовании распределения чисел множества M в зависимости от четности $\Omega(n)$ А. А. Карацубой [3], [4] было обнаружено, что

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \lambda(n) = \frac{An(x)}{\ln^{\frac{2r}{\varphi(m)}} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \quad (1)$$

где A — положительная постоянная. Этот результат имеет неожиданный арифметический смысл, так как может быть интерпретирован как некоторое преобладание среди чисел множества M чисел с нечетным количеством простых делителей.

Пусть теперь E таково, что

$$\pi(x, E) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \in E}} 1 = c_E \pi(x) + O(x^{1-\Delta}), \quad (2)$$

где $\Delta > 0$, $0 < c_E < 1$. В качестве такого E можно взять все натуральные числа, принадлежащие множеству

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + j - 1)^{1/a}, (Dn + j)^{1/a}),$$

где a — нецелое положительное число, D и j — натуральные числа, причем $D \geq 2$, $j \leq D$. Соответствующая формула для величины $\pi(x, E)$ в случае $0 < a < 1$ доказана в работе [5], а для нецелых a , больших единицы, например, в работе [6]. Эта задача изучалась также в работах [7, 8]. Можно также рассматривать в качестве E множество простых чисел, содержащих четное число единиц в своей двоичной записи. Справедливость соответствующей

асимптотической формулы для $\pi(x, E)$ установлена в работе [9]. Для такого выбора множества E А. А. Карацубой [3], [4] получены аналогичные случаю арифметических прогрессий результаты

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{C_2 x}{\ln^{-c_E+1} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \\ S(x) &= \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \lambda(n) = \frac{B n(x)}{\ln^{2c_E} x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln x}\right) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где B — положительная постоянная. Таким образом, при таком выборе множества E обнаруживается тот же эффект преобладания чисел с нечетным количеством простых делителей.

Рассмотрим другой вариант выбора функции $\gamma(n)$. Обозначим через $\nu(n)$ количество различных простых делителей числа n . Таким образом, при $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ имеем $\nu(n) = r$. Эта функция также удовлетворяет требованиям, предъявляемым к $\gamma(n)$, а функция $a^{\nu(n)}$ мультипликативна при любом ненулевом комплексном a . Хорошо известно, что при $E = \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$S(x) = \sum_{n \leq x} (-1)^{\nu(n)} \ll x e^{-c\sqrt{\ln x}}.$$

Рассматривая распределение чисел из множества M в зависимости от четности $\nu(n)$, автор в работах [10, 11] для случая E , допускающего равенство (2), и в работе [12] для случая E , составленного из арифметических прогрессий, получил формулы, отличающиеся от (1) и (3) лишь значениями констант A и B .

Пусть теперь k — фиксированное натуральное число, не меньшее трех, а l — некоторое натуральное число, не превосходящее k . Положим $f(n) = 1$ при $n \equiv l \pmod{k}$, и $f(n) = 0$ в противном случае. Такая арифметическая функция периодична с периодом k и является характеристической функцией множества чисел, сравнимых с l по модулю k . В этом случае сумма $S(x)$ имеет смысл количества чисел множества M , не превосходящих x и таких, что $\gamma(n) \equiv l \pmod{k}$. В работе [13] автор получил в случае $E = \mathbb{N}$ асимптотическую формулу

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ \gamma(n) \equiv l \pmod{k}}} 1 = \frac{1}{k} n(x) \left(1 + \frac{A_0 \cos\left(\sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi_0 - \frac{2\pi l}{k}\right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O\left(\ln^{-\delta_k} x\right) \right), \quad (4)$$

где $A_0 \neq 0$ и φ_0 — некоторые вещественные постоянные, а $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{\pi}{k} + 1$ при $k \leq 6$, и $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}$ при $k \geq 7$. Эта формула справедлива для любой аддитивной функции $\gamma(n)$ с условием $\gamma(p) = 1$, в частности, для функций $\Omega(n)$ и $\nu(n)$. Аналогичные формулы, отличающиеся от (4) лишь некоторыми коэффициентами, были получены в той же работе [13] и для случая множества E , допускающего равенство (2), и для случая множества E , составленного из арифметических прогрессий. Интересным эффектом, возникшим при переходе к случаю $k \geq 3$, является исчезновение качественного отличия случая $E = \mathbb{N}$ от остальных вариантов выбора множества E .

В работах [14, 15] автор рассмотрел сумму символов Лежандра с функцией $\nu(n)$, что отвечает случаю $f(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$. В этом случае функция $f(n)$ периодична с периодом p , где p — фиксированное нечетное простое число. При этом для суммы $S(x)$ получается асимптотическая формула, подобная (4), но без первого слагаемого, так как полная сумма символов Лежандра равна нулю. А именно, при $E = \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \left(\frac{\nu(n)}{p} \right) = \frac{A_p x}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{p}} x} \cos\left(\sin \frac{2\pi}{p} \cdot \ln \ln x + \varphi_p\right) + O\left(x \ln^{-\delta_p} x\right),$$

где $\delta_p = 2 \sin^2 \frac{\pi}{p} + 1$ при $p = 3, 5$, и $\delta_p = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{p}$ при $p \geq 7$, а $A_p \neq 0$ и φ_p — некоторые вещественные постоянные.

Естественным обобщением всех упомянутых задач является задача исследования поведения суммы $S(x)$ при произвольной периодической $f(n)$ и произвольной аддитивной $\gamma(n)$ с условием $\gamma(p) = 1$, которая и является предметом исследования настоящей статьи. При этом период k функции $f(n)$ имеет смысл положить не меньшим трех, поскольку при $k = 2$ существуют только две независимые функции $f(n)$, а именно $(-1)^n$ и постоянная, случай которых всесторонне исследован в работах [3, 4, 10, 11, 12].

2. Основная часть

Сформулируем основные результаты настоящей работы. Пусть k — фиксированное натуральное число, не меньшее трех, и $f(n)$ — произвольная вещественная арифметическая функция, периодическая с периодом k . Обозначим через f_0 среднее значение функции $f(n)$, то есть

$$f_0 = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k f(n).$$

Пусть $\gamma(n)$ — произвольная вещественная аддитивная арифметическая функция с условием $\gamma(p) = 1$ для любого простого p . Пусть M — множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат множеству E . Количество чисел множества M , не превосходящих x , обозначим через $n(x)$. Тогда имеют место утверждения

ТЕОРЕМА 1. Пусть $E = \mathbb{N}$. Тогда существуют такие вещественные постоянные A и φ , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(\gamma(n)) = x \left(f_0 + \frac{A \cos \left(\sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi \right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left(\ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{\pi}{k} + 1$ при $k \leq 6$, и $\delta_k = 2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}$ при $k \geq 7$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \geq 3$ и $r < \varphi(m)$. Пусть $l_1, \dots, l_r$ — различные натуральные числа, не превосходящие m и взаимно простые с ним. Пусть E — множество всех натуральных чисел, сравнимых с одним из чисел $l_1, \dots, l_r$ по модулю m . Тогда существуют такие вещественные постоянные B и ψ , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)) = n(x) \left(f_0 + \frac{B \cos \left(\varkappa \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \psi \right)}{\ln^{2 \varkappa \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left(\ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где $\delta_k = 2 \varkappa \sin^2 \frac{2\pi}{k}$ при $k = 4$ или $k \geq 6$, $\delta_5 = \min(2 \varkappa \sin^2 \frac{2\pi}{5}, 2 \varkappa \sin^2 \frac{\pi}{5} + 1)$, $\delta_3 = \frac{3}{2} \varkappa + 1$, а $\varkappa = \frac{r}{\varphi(m)}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть множество E допускает равенство (2). Тогда существуют такие вещественные постоянные B' и ψ' , что имеет место асимптотическая формула

$$S(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} f(\gamma(n)) = n(x) \left(f_0 + \frac{B' \cos \left(c_E \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \psi' \right)}{\ln^{2 c_E \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O \left(\ln^{-\delta_k} x \right) \right),$$

где $\delta_k = 2 c_E \sin^2 \frac{2\pi}{k}$ при $k = 4$ или $k \geq 6$, $\delta_5 = \min(2 c_E \sin^2 \frac{2\pi}{5}, 2 c_E \sin^2 \frac{\pi}{5} + 1)$, $\delta_3 = \frac{3}{2} c_E + 1$.

Нам понадобятся вспомогательные утверждения, доказанные в работе [13], которые адаптируют метод комплексного интегрирования к поставленной задаче.

ЛЕММА 1. Пусть k — натуральное число, не меньшее трех, $y \in \mathbb{Z}$, $\gamma(n)$ — аддитивная арифметическая функция с условием $\gamma(p) = 1$ для любого простого p . Пусть E — бесконечное подмножество $\mathbb{N}$, а M — множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат E . Тогда при $\text{Res} > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{y\gamma(n)}{k}}}{n^s} = \prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-e^{2\pi i \frac{y}{k}}} \cdot F_y(s),$$

где функция $F_y(s)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\text{Res} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ при любом положительном ε , причем $F_y(1) \neq 0$ при $|y| < \frac{k}{2}$.

ЛЕММА 2. Пусть $g(n)$ — комплекснозначная арифметическая функция с условием $|g(n)| \leq 1$, и при $\text{Res} > 1$ имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s} = (\zeta(s))^{\alpha} H(s),$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, а функция $H(s)$ при любом достаточно большом T аналитична в области $\sigma \geq 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$, причем в этой области справедлива оценка $H(s) \ll \ln^c T$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{n \leq x} g(n) = \frac{H(1)}{\Gamma(\alpha)} x \ln^{\alpha-1} x + O(x \ln^{\text{Re}\alpha-2} x).$$

Теперь мы готовы к доказательству основного результата настоящей работы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательство теоремы 1] Раскладывая периодическую с периодом k функцию $f(n)$ по характерам аддитивной группы вычетов по модулю k , получим

$$f(\gamma(n)) = \sum_{j \bmod k} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}} \frac{1}{k} \sum_{m \bmod k} f(m) e^{-2\pi i \frac{j m}{k}},$$

где j и m пробегает полную систему вычетов по модулю k (для простоты и определенности — наименьшие по абсолютной величине вычеты). Обозначая

$$f_j = \frac{1}{k} \sum_{m \bmod k} f(m) e^{-2\pi i \frac{j m}{k}} \quad (5)$$

и суммируя по n , не превосходящим x , найдем

$$S(x) = \sum_{n \leq x} f(\gamma(n)) = \sum_{j \bmod k} f_j \sum_{n \leq x} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}} = \sum_{j \bmod k} f_j S_j(x), \quad (6)$$

где мы ввели также обозначение

$$S_j(x) = \sum_{n \leq x} e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}}.$$

Очевидно, $S_0(x) = [x]$, асимптотики же остальных сумм $S_j(x)$ получим методом комплексного интегрирования. Применяя лемму 1, для соответствующего производящего ряда Дирихле при $\text{Res} > 1$ получаем выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{j\gamma(n)}{k}}}{n^s} = (\zeta(s))^{e^{2\pi i \frac{j}{k}}} F_j(s), \quad (7)$$

где функция $F_j(s)$ аналитична и ограничена в полуплоскости $\text{Res} \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$. Применяя затем лемму 2, для искомой сумматорной функции получаем следующее соотношение

$$S_j(x) = \frac{F_j(1)}{\Gamma(e^{2\pi i \frac{j}{k}})} x \ln^{e^{2\pi i \frac{j}{k}} - 1} x + O(x \ln^{\cos \frac{2\pi j}{k} - 2} x). \quad (8)$$

Так как функция $f(n)$ вещественна, из равенства (5) имеем $f_{-j} = \overline{f_j}$. Далее, поскольку гамма-функция вещественна при вещественных значениях аргумента, то

$$\Gamma(e^{-2\pi i \frac{j}{k}}) = \overline{\Gamma(e^{2\pi i \frac{j}{k}})}.$$

Наконец, из соотношения (7) при вещественной $\gamma(n)$ нетрудно получить, что $F_{-j}(s) = \overline{F_j(\overline{s})}$, а значит $F_{-j}(1) = \overline{F_j(1)}$. Таким образом, слагаемые суммы (6), отвечающие $j = 1$ и $j = -1$ комплексно сопряжены. Обозначая

$$\frac{f_1 F_1(1)}{\Gamma(e^{\frac{2\pi i}{k}})} = \frac{1}{2} A e^{i\varphi} \quad (9)$$

с некоторыми вещественными A и φ , имеем

$$f_1 S_1(x) + f_{-1} S_{-1}(x) = \frac{Ax \cos\left(\sin \frac{2\pi}{k} \cdot \ln \ln x + \varphi\right)}{\ln^{2 \sin^2 \frac{\pi}{k}} x} + O\left(x \ln^{-2 \sin^2 \frac{\pi}{k} - 1} x\right). \quad (10)$$

С другой стороны, при $2 \leq |j| \leq \frac{k}{2}$ из соотношения (8) следует, что $S_j(x) \ll x \ln^{-2 \sin^2 \frac{2\pi}{k}} x$. Подставляя эту оценку, наряду с равенством (10), в сумму (6), получим утверждение теоремы. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. [Доказательства теорем 2 и 3] Проводятся в целом аналогично доказательству теоремы 1. Суммирование в сумме $S_j(x)$ в этом случае идет только по числам множества M , поэтому при применении леммы 1 в равенстве (7) вместо $\zeta(s)$ будет фигурировать функция

$$\prod_{p \in E} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Ее аналитическое продолжение, выражение через дзета-функцию Римана, а также оценки ее модуля вблизи единичной прямой даны в [16, лемма 1] для случая множества E , являющегося объединением арифметических прогрессий, и в [17, лемма 1] для случая множества E , допускающего равенство (2). В конечном итоге в показателе степени $\zeta(s)$ в соотношении (7) добавляется множитель $\varkappa$ или c_E , который затем модифицирует формулы (8) и (10). Кроме того, при записи окончательного результата следует учесть, что из равенства (8) следует, что

$$S_0(x) = n(x) \asymp x \ln^{\varkappa - 1} x$$

в случае теоремы 2, а в случае теоремы 3 параметр $\varkappa$ заменяется на c_E . $\square$

Мы видим, что если среднее значение функции $f(n)$ отлично от нуля, то сумма $S(x)$ асимптотически равна $f_0 \cdot n(x)$. В случае же среднего значения равного нулю, что имеет место, например, при $f(n) = \left(\frac{n}{p}\right)$, на первый план выходит второе, осциллирующее слагаемое асимптотики.

При этом указанное слагаемое не обращается в нуль тождественно, если только величина f_1 отлична от нуля, что легко видеть из равенства (9) и леммы 1.

Отметим также, что условие $\gamma(p) = 1$ при любом простом p продиктовано скорее историческими причинами: ему удовлетворяют широко известные аддитивные функции $\nu(n)$ и $\Omega(n)$. Доказательство без труда модифицируется на случаи, когда $\gamma(p) = 1$ для всех простых p за исключением конечного числа, и когда $\gamma(p)$ при любом простом p принимает одно и то же значение, не обязательно равное единице. Конечно, в последнем случае второй член асимптотики уже существенно поменяется.

3. Заключение

В статье доказаны асимптотические формулы для суммы значений композиции вещественной периодической арифметической функции с периодом не меньшим трех и вещественной аддитивной арифметической функции, равной единице на простых числах, по числам, не превосходящим заданного и таким, что все их простые делители принадлежат специальному множеству. Рассмотрено три варианта выбора специального множества: множество всех натуральных чисел, объединение арифметических прогрессий с заданной разностью и множество, допускающее аналог асимптотического закона распределения простых чисел со степенным понижением в остатке. Из полученных результатов следует, что нетривиальный, осциллирующий характер поведения изучаемых сумм проявляется в том случае, когда среднее значение рассматриваемой периодической функции равно нулю.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967.
2. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Карацуба А.А. Об одном свойстве множества простых чисел // Успехи матем. наук, 2011, т. 66, вып. 2, с. 3-14.
4. Карацуба А.А. Об одном свойстве множества простых чисел как мультипликативного базиса натурального ряда // Доклады РАН, 2011, т. 439, вып. 2, с. 159-162.
5. Виноградов И.М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Матем. сб., 1940, т. 7(49), вып. 2, с. 365–372.
6. Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Матем. заметки, 2003, т. 73, вып. 3, с. 423–436.
7. Гриценко С.А. Об одной задаче И.М. Виноградова // Матем. заметки, 1986, т. 39, вып. 5, с. 269–285.
8. Ren X.M. Vinogradov's exponential sum over primes // Acta Arith., 2006, vol. 124, no. 3, p. 269-285.
9. Mauduit C., Rivat J. Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers // Annals of Mathematics. Second Series, 2010, v. 171, no. 3, p. 1591–1646.
10. Чанга М.Е. О количестве чисел специального вида в зависимости от четности числа их различных простых делителей // Матем. заметки, 2015, т. 97, вып. 6, с. 930–935.

11. Чанга М.Е. О соотношении количеств чисел с четным и нечетным числом различных простых делителей при условии некоторых ограничений на последние // Мат. методы и приложения. Труды XX мат. чтений РГСУ. М.: АППиППРО, 2011, с. 121-125.
12. Чанга М.Е. Об одной задаче с числами, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям // Успехи матем. наук, 2016, т. 71, вып. 4, с. 191–192.
13. Чанга М.Е. О числах, количество простых делителей которых принадлежит заданному классу вычетов // Известия РАН, сер. матем., 2019, т. 83, вып. 1, с. 192–202.
14. Чанга М.Е. Об одной сумме символов Лежандра // Успехи матем. наук, 2018, т. 73, вып. 5, с. 183–184.
15. Чанга М.Е. О распределении чисел с условиями на количество их простых делителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XV Международной конференции. Тула: ТГПУ, 2018, с. 242-243.
16. Чанга М.Е. О суммах мультипликативных функций по числам, все простые делители которых принадлежат заданным арифметическим прогрессиям // Известия РАН. Сер. матем., 2005, т. 69, вып. 2, с. 205–220.
17. Чанга М.Е. О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках // Известия РАН. Сер. матем., 2003, т. 67, вып. 4, с. 213–224.

REFERENCES

1. Prachar K. Primzahlverteilung. Berlin : Springer-Verlag, 1957.
2. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Leipzig: Teubner, 1909.
3. Karatsuba A.A. 2011, "A property of the set of prime numbers" , *Russian Mathematical Surveys*, vol. 66, no. 2, pp. 209-220.
4. Karatsuba A.A. 2011, "On a property of the set of prime numbers as a multiplicative basis of integers" , *Doklady RAS*, vol. 439, no. 2, pp. 159-162.
5. Vinogradov I.M. 1940, "Some common property of the prime number distribution" , *Math. Sbornik*, vol. 7(49), no. 2, pp. 365-372.
6. Changa M.E. 2003, "Primes in special intervals and additive problems with such numbers" , *Mathematical Notes*, vol. 73, no. 3, pp. 389-401.
7. Gritsenko S.A. 1986, "A problem of I.M. Vinogradov" , *Mathematical Notes*, vol. 39, no. 5, pp. 341-350.
8. Ren X.M. 2006, "Vinogradov's exponential sum over primes" , *Acta Arith.*, vol. 124, no. 3, pp. 269-285.
9. Mauduit C., Rivat J. 2010, "Sur un problème de Gelfond: la somme des chiffres des nombres premiers" , *Annals of Mathematics. Second Series*, vol. 171, no. 3, pp. 1591–1646.
10. Changa M.E. 2015, "On the quantity of numbers of special form depending on the parity of the number of their different prime divisors" , *Mathematical Notes*, vol. 97, no. 6, pp. 941-945.

11. Changa M.E. 2011, "On the relation between quantities of integers with even and odd number of distinct prime divisors with some restrictions on them", *Mat. Metody i Prilozheniya. Trudy XX Mat. Chteniy RGSU* Moscow : APPiPPRO, pp. 121-125.
12. Changa M.E. 2016, "A problem involving integers all of whose prime divisors belong to given arithmetic progression", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 71, no. 4, pp. 790-792.
13. Changa M.E. 2019, "On integers whose number of prime divisors belongs to a given residue class", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 83, no. 1, pp. 173-183.
14. Changa M.E. 2018, "On a sum of Legendre symbols", *Russian Mathematical Surveys*, vol. 73, no. 5, pp. 919-921.
15. Changa M.E. 2018, "On the distribution of integers with restrictions on the quantity of their prime divisors", *Algebra, Teoriya chisel i diskretnaya Geometriya: sovremennye problemy i prilozheniya. Materialy XV mezhdunarodnoy konferentsii* Tula : TGPU, pp. 242-243.
16. Changa M.E. 2005, "On sums of multiplicative functions over numbers all of whose prime divisors belong to given arithmetic progressions", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 69, no. 2, pp. 423-438.
17. Changa M.E. 2003, "Numbers whose prime divisors lie in special intervals", *Izvestiya: Mathematics*, vol. 67, no. 4, pp. 837-848.

Получено 10.07.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.