ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-3-165-185

Гладкое многообразие одномерных решёток[1]

Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Елена Николаевна Смирнова — старший преподаватель кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: helenash@mail.ru
Ольга Александровна Пихтилькова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики-2, МИРЭА-Российский технологический университет (г. Москва).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Николай Николаевич Добровольский — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры общей и теоретической физики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Ирина Юрьевна Реброва — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Николай Михайлович Добровольский — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе заложены основы теории гладких многообразий теоретико-числовых решёток.

Рассмотрен простейший случай одномерных решёток. В последующих статьях будет рассмотрен сначала случай одномерных сдвинутых решёток, потом общий случай многомерных решёток, и, наконец, случай многомерных сдвинутых решёток.

В работе определено гомеоморфное отображение пространства одномерных решёток на множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$. Тем самым установлено, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", то получаются в одномерном случае неожиданные результаты о производных от основных функций, таких как детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция решётки.

В работе рассмотрена связь указанных функций с вопросами изучения погрешности приближенного интегрирования по параллелепипедальным сеткам.

Ключевые слова: решётки, метрическое пространство решёток, гладкое многообразие решёток.

Библиография: 40 названий.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

Для цитирования:
Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Гладкое многообразие одномерных решёток // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 3, С. 165–185.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 511.42 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-3-165-185

Smooth manifold of one-dimensional lattices

E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Elena Nikolaevna Smirnova — senior lecturer of the Department of algebra and discrete mathematics, Orenburg State University (Orenburg).
e-mail: helenash@mail.ru
Olga Alexandrovna Pikhtilkova — Candidate of Physics and Mathematics Sciences, docent, associate professor of the department of higher mathematics-2, MIREA - Russian Technological University (Moscow).
e-mail: opikhtilkova@mail.ru
Nikolai Nikolaevich Dobrovol'skii — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the department of general and theoretical physics, Tula State University; associate Professor of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: cheb@tspu.tula.ru, nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Nikolai Mihailovich Dobrovol'skii — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University (Tula).
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In this paper, the foundations of the theory of smooth varieties of number-theoretic lattices are laid.

The simplest case of one - dimensional lattices is considered. In subsequent articles, we will first consider the case of one-dimensional shifted lattices, then the General case of multidimensional lattices, and finally the case of multidimensional shifted lattices.

In this paper, we define a homeomorphic mapping of the space of one-dimensional lattices to the set of all real numbers $\mathbb{R}$. Thus, it is established that the space of one-dimensional lattices PR_1 is locally Euclidean space of dimension 1.

Since the metric on these spaces is not Euclidean, but is "logarithmic", unexpected results are obtained in the one-dimensional case about derivatives of the main functions, such as the lattice determinant, the hyperbolic lattice parameter, the norm minimum, the lattice Zeta function, and the hyperbolic lattice Zeta function.

The paper considers the relationship of these functions with the issues of studying the error of approximate integration over parallelepipedal grids.

Keywords: lattices, metric space of lattices, smooth variety of lattices.

Bibliography: 40 titles.

For citation:
E. N. Smirnova, O. A. Pikhtil'kova, N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Smooth manifold of one-dimensional lattices", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 165–185.

1. Введение

В работе [31] изучалось полное метрическое пространство s-мерных решёток и была доказана теорема, что множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве решёток. В теоретико-числовом методе в приближенном анализе значительную роль играют гиперболическая дзета-функция решёток, обобщённая гиперболическая дзета-функция решёток и гиперболическая дзета-функция сеток, так как они связаны с оценкой нормы линейного функционала погрешности приближенного интегрирования на классе E_s^α (см. [9, 10, 13, 16, 22, 33, 34]).

С одной стороны, эти функции являются рядами Дирихле на спектре соответствующих решёток и для них возникают естественные задачи об изучении их свойств как функций комплексного переменного $\alpha = \sigma + it$, где $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

С другой стороны, они являются функциями на пространстве решёток или на пространстве сдвинутых решёток. Непрерывность этих объектов на соответствующих пространствах была установлена в работах [13, 25].

Естественно возникает вопрос об их дифференциальных свойствах на этих пространствах, но для этого надо рассмотреть эти пространства как гладкие многообразия. Это потребует определенных усилий, так как метрика на этих пространствах не является евклидовой, а относится к числу "логарифмических", как это будет видно из дальнейшего.

Целью данной работы является рассмотрение простейшего случая гладкого многообразия одномерных решёток и сдвинутых решёток.

На протяжении всей работы через $I = I_s$ будем обозначать единичную квадратную матрицу порядка $s \geqslant 1$. Значение порядка s каждый раз будет видно из контекста.

2. Метрическое пространство решёток и гладкое многообразие одномерных решёток

Важность рассмотрения множества всех решёток как метрического пространства видна из работ [1, 22], [26] — [30].

Рассмотрим пространство PR_1 всех одномерных решёток. Нетрудно видеть, что

$$PR_1 = \{\lambda\mathbb{Z} | \lambda > 0\},$$

где $\mathbb{Z}$ — фундаментальная одномерная решётка, являющаяся, кроме этого, кольцом целых рациональных чисел. Очевидно, что справедливо равенство $\lambda\mathbb{Z} = -\lambda\mathbb{Z}$ для любого $\lambda \neq 0$.

Пусть $\mathfrak{M}_1(\mathbb{R})$ множество всех вещественных квадратных матриц порядка 1, а $\mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ — подмножество невырожденных матриц. Таким образом,

$$\mathfrak{M}_1(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R}) = \{A = (a_{1\,1}) | a_{1\,1} \in \mathbb{R}, a_{1\,1} \neq 0\}.$$

Если нам дана решётка $M = M(\lambda)$ с базисом (λ), $\lambda > 0$, то действие линейного преобразования с матрицей $A = (a_{1\,1}) \in \mathfrak{M}_1^*(\mathbb{R})$ задаётся равенством $A \cdot M = M(|a_{1\,1}|\lambda)$. Для любой одномерной решётки M её группа автоморфизмов конечна $\mathrm{Aut}(M) = \{(1), (-1)\}$. Этим фактом объясняются многие упрощения теории в одномерном случае в сравнении с общим случаем, когда группа автоморфизмов бесконечна.

Нетрудно видеть, что можно задать взаимно-однозначное отображение $PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+$ — мультипликативная группа положительных вещественных чисел.

На пространстве PR_1 всех одномерных решёток, следуя за Касселсом (см. [19] стр. 165), зададим структуру топологического пространства, определив систему открытых окрестностей.

Говорят, что для произвольного $\mu > 0$ множество $\mathbb{L}_\mu(M)$ решёток Λ является *открытой μ-окрестностью* решётки M, если оно состоит из всех решёток

$$\Lambda = A \cdot M, \tag{1}$$

для которых невырожденная матрица A удовлетворяет соотношению

$$\|A - I\| < \mu. \tag{2}$$

Заметим, что в одномерном случае $I = (1)$ — единичная матрица и матричная норма задана равенством $\|A\| = |a_{11}|$.[2]

Мы будем рассматривать только окрестности при $0 < \mu < 1$, так как для таких μ все матрицы $A = (a_{11})$ с $\|A - I\| < \mu$ удовлетворяют соотношению $0 < 1 - \mu < a_{11} < 1 + \mu$ и являются невырожденными.

Нетрудно записать окрестность $\mathbb{L}_\mu(M)$ для произвольной решётки $M = M(\lambda) = \lambda\mathbb{Z}$ с базисом (λ).

$$\mathbb{L}_\mu(M) = \{\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} | (1-\mu)\lambda < \lambda_1 < (1+\mu)\lambda\}.$$

Естественно, что прежде всего надо установить, что пересечение двух окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ снова является открытой окрестностью.

Лемма 1. *Пересечение двух открытых окрестностей $\mathbb{L}_\mu(M)$ и $\mathbb{L}_\nu(N)$ либо пусто, либо является открытой окрестностью $\mathbb{L}_\kappa(K)$, где $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, если $M = N$, и $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu)-\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}{2}$, $K = K(\lambda_2)$, если $\lambda(1+\mu) > \lambda_1(1-\nu)$, $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $M = M(\lambda)$, $N = N(\lambda_1)$ и $\lambda < \lambda_1$.

Если $\lambda(1+\mu) \leqslant \lambda_1(1-\nu)$, то пересечение окрестностей пусто.

Если $M = N$, то $K = M$ и $\kappa = \min(\mu, \nu)$, $\mathbb{L}_\mu(M) \bigcap \mathbb{L}_\nu(N) = \mathbb{L}_\kappa(K)$.

Если $\lambda(1+\mu) > \lambda_1(1-\nu)$, то полагаем $\lambda_2 = \frac{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}{2}$, $\kappa = \frac{\lambda(1+\mu)-\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)+\lambda_1(1-\nu)}$, $\theta = \frac{\lambda_1(1-\nu)}{\lambda(1+\mu)}$. Тогда $0 < \theta < 1$, $0 < \kappa = \frac{1-\theta}{1+\theta} < 1$, $K = K(\lambda_2)$, $\mathbb{L}_\mu(M) \bigcap \mathbb{L}_\nu(N) = \mathbb{L}_\kappa(K)$.

Лемма полностью доказана. $\square$

Лемма 2. *Любой интервал решёток $(\Lambda(\lambda_1); \Lambda(\lambda_2)) = \{\Lambda(\lambda) \,|\, \lambda_1 < \lambda < \lambda_2\}$ является открытой μ-окрестностью решётки M при $M = M\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, $\mu = \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.*

Доказательство. Действительно, $0 < \mu < 1$ и

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\left(1 - \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \lambda_1, \quad \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\left(1 + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right) = \lambda_2,$$

что и доказывает утверждение леммы. $\square$

Легко видеть, что имеется следующее гомеоморфное отображение

$$\varphi : \mathbb{L}_\mu(M) \leftrightarrow (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$$

при котором решётке $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1) \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda)),$$

а числу $\theta \in (\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ ставится в соответствие решётка

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{L}_\mu(M).$$

[2]Для так определенной матричной нормы справедливы соотношения $\|-A\| = \|-A\|$, $\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$, $\|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|$.

Произвольным *открытым множеством* $\mathbb{L}$ называется множество, представимое в виде объединения произвольного множества X открытых μ окрестностей

$$\mathbb{L} = \bigcup_{x\in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что таким образом на PR_1 задана структура топологического пространства $T_1 = (PR_1, \tau_1)$, где τ_1 — множество всех открытых множеств $\mathbb{L}$. Топологическое пространство $T_1 = (PR_1, \tau_1)$ имеет счетную базу $\mathbb{B}$, состоящую из всех μ-окрестностей рациональных решёток M с рациональными μ, и является сепарабельным топологическим пространством, так как роль счетного всюду плотного его подмножества выполняет множество PQ_1 всех рациональных решёток, т.е. решёток $M = M(\lambda)$ с $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda > 0$.

Лемма 3. *Топология τ_1 инвариантна относительно любого линейного невырожденного преобразования A пространства $\mathbb{R}$. Счетная база $\mathbb{B}$ инвариантна только относительно диагональных рациональных преобразований $D(d) = (d)$, $d \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$.*

Доказательство. Так как под действием линейного невырожденного преобразования A пространства $\mathbb{R}$ произвольная решётка Λ переходит в решётку $A\cdot\Lambda$, то из равенства

$$A\cdot\mathbb{L} = \bigcup_{x\in X} A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$$

следует, для инвариантности топологии достаточно доказать, что $A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ — открытое множество для любого $x \in X$.

Действительно,

$$A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x) = \left\{\Lambda = A\cdot B\cdot M_x \mid \|B-I\| < \mu_x\right\}.$$

Пусть

$$\|B-I\| < \mu_x, \quad \delta = \frac{\mu_x - \|B-I\|}{\|B\|\cdot\|A^{-1}\|\cdot\|A\|} = \frac{\mu_x - \|B-I\|}{\|B\|},$$
$$\Lambda = A\cdot B\cdot M_x, \quad \Lambda_1 = C\cdot A\cdot B\cdot M_x \in \mathbb{L}_\delta(\Lambda).$$

Таким образом, $\|C-I\| < \delta$ и $\delta < 1$ так как $\mu_x < 1 < \|I-B\| + \|B\|$.

Тогда
$$\Lambda_1 = C\cdot A\cdot B\cdot M_x = A\cdot B_1\cdot M_x, \quad B_1 = C\cdot B$$

и справедливы неравенства

$$\|B_1 - I\| = \|C\cdot B - I\| \leqslant \|C\cdot B - B\| + \|B-I\| \leqslant$$
$$\leqslant \|B\|\cdot\|C-I\| + \|B-I\| \leqslant \|B\|\cdot\delta + \|B-E\| < \mu_x.$$

Отсюда следует

$$\mathbb{L}_\delta(\Lambda) \subset A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x), \quad A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x) = \bigcup_{\Lambda\in A\cdot\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)} \mathbb{L}_\delta(\Lambda)$$

и инвариантность топологии τ_1 относительно невырожденных линейных преобразований доказана.

Инвариантность счётной базы $\mathbb{B}$ очевидна. □

Как известно (см. [19], стр. 165), множество всех s-мерных решёток PR_s является полным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(1+\mu), \ln(1+\nu)), \tag{4}$$

где
$$\mu = \inf_{\Gamma = A\cdot\Lambda} \|A - I\|, \quad \nu = \inf_{\Lambda = B\cdot\Gamma} \|B - I\|,$$

Применительно к PR_1 имеем, если $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$, $\Gamma = \gamma\mathbb{Z}$, то $\Gamma = A\cdot\Lambda$, $A = \left(\gamma\lambda^{-1}\right)$, $\Lambda = B\cdot\Gamma$, $B = \left(\gamma^{-1}\lambda\right)$. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda > \gamma$, тогда $\mu = 1 - \gamma\lambda^{-1}$, $\nu = \gamma^{-1}\lambda - 1$ и $\rho(\Lambda, \Gamma) = \max(\ln(2 - \gamma\lambda^{-1}), \ln(\gamma^{-1}\lambda))$. Положим $\theta = \gamma\lambda^{-1}$, тогда $0 < \theta < 1$ и $2 - \theta < \theta^{-1}$, поэтому $\rho(\Lambda, \Gamma) = \ln(\gamma^{-1}\lambda)$.

Теперь можно записать как выглядит "симметричный отрезок" решёток длинной 2ρ с центром в $\Lambda(\lambda)$: $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$. Ясно, что когда h пробегает числовой отрезок $[-\rho; \rho]$, то $\Lambda(e^{h}\lambda)$ пробегает отрезок решёток $[\Lambda(e^{-\rho}\lambda); \Lambda(e^{\rho}\lambda)]$.

Как известно, для любой решётки Λ её взаимная решётка Λ^* определяется из условия
$$\Lambda^* = \{\vec{x} \,|\, \forall \vec{y} \in \Lambda \quad (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{Z}\}.$$
Отсюда следует, что для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$.

Лемма 4. *Для любой решётки $\Lambda(\lambda) \in PR_1$ справедливо равенство*
$$\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}). \tag{5}$$

Доказательство. Так как $\Lambda^* = \Lambda(\lambda^{-1})$ и $(\Lambda^*)^* = \Lambda$, то без ограничения общности можно считать, что $\lambda > 1$. Случай $\lambda = 1$ тривиальный, так как тогда $\Lambda = \mathbb{Z} = \Lambda^*$.

Далее имеем: $\rho(\Lambda, \mathbb{Z}) = \ln\lambda$, $\rho(\Lambda^*, \mathbb{Z}) = \ln\lambda$, что и доказывает утверждение леммы. □

Заметим, что доказанная лемма является частным случаем теоремы А. Н. Кормачёвой (см. [20]).

Топологическое пространство PR_1 является хаусдорфовым, так как для любых двух решеток $\Lambda(\lambda_1)$, $\Lambda(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\mu = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ открытые μ-окрестности $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_1))$ и $\mathbb{L}_\mu(\Lambda(\lambda_2))$ не пересекаются.

Всё пространство одномерных решёток PR_1 гомеоморфно $\mathbb{R}$. Действительно, таким гомеоморфизмом является
$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R},$$
при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ ставится в соответствие точка
$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$
а числу $\theta \in \mathbb{R}$ ставится в соответствие решётка
$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^{\theta}\mathbb{Z} \in PR_1.$$
Отсюда следует, что пространство одномерных решёток PR_1 локально евклидово пространство размерности 1.

Согласно Уорнеру (см. [32], стр. 13), пара (U, φ), где $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, решётка $M = M(\lambda)$, а φ — гомеоморфное отображение U на интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ называется системой координат, φ — координатным отображением. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат.

Согласно Арнольду (см. [2], стр. 205) интервал $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$ является картой открытой μ-окрестности $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ и $\varphi(\Lambda)$ изображением решётки $\Lambda \in \mathbb{L}_\mu(M)$ на карте $(\ln((1-\mu)\lambda); \ln((1+\mu)\lambda))$.

Лемма 5. *Для любых двух открытых пересекающихся μ-окрестностей $U_\nu = \mathbb{L}_{\mu_\nu}(M_\nu)$ решёток $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ гомеоморфные отображения φ_ν окрестностей U_ν на интервалы $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ связаны соотношениями $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta) = \theta$ для любого θ из пересечения интервалов $(\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \bigcap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2))$.*

Доказательство. Действительно, пусть $M_\nu = M_\nu(\lambda_\nu)$ $(\nu = 1, 2)$ и, без ограничения общности, $\lambda_1 < \lambda_2$, тогда окрестности пересекаются, если $\lambda_1(1+\mu_1) > \lambda_2(1-\mu_2)$. Рассмотрим окрестность $U = U_1 \bigcap U_2$ и интервал

$$(\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_1(1+\mu_1)) = (\lambda_1(1-\mu_1); \lambda_1(1+\mu_1)) \bigcap (\lambda_2(1-\mu_2); \lambda_2(1+\mu_2)).$$

Гомеоморфное отображение φ_ν, переводящее U_ν на интервал $(\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$, ставит решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ в соответствие число $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in (\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$, а числу $\theta \in (\ln((1-\mu_\nu)\lambda_\nu); \ln((1+\mu_\nu)\lambda_\nu))$ ставится в соответствие решётка $\Lambda = \varphi_\nu^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in \mathbb{U}_\nu$. Поэтому для любого $\theta \in (\ln((1-\mu_2)\lambda_2); \ln((1+\mu_1)\lambda_1))$ имеем

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(\theta) = \varphi_1(e^\theta\mathbb{Z}) = \theta = \varphi_2(e^\theta\mathbb{Z}) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\theta),$$

что и доказывает утверждение леммы. □

Лемма 6. *Гомеоморфное отображение*

$$\varphi : PR_1 \leftrightarrow \mathbb{R},$$

при котором решётке $\Lambda = \lambda\mathbb{Z}$ *ставится в соответствие точка*

$$\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda) \in \mathbb{R},$$

а числу $\theta \in \mathbb{R}$ *ставится в соответствие решётка*

$$\Lambda = \varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\mathbb{Z} \in PR_1,$$

переводит произвольное открытое множество $\mathbb{L} = \bigcup_{x\in X} \mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)$ *в открытое множество*

$$\varphi(\mathbb{L}) = \bigcup_{x\in X} (\ln((1-\mu_x)\lambda_x); \ln((1+\mu_x)\lambda_x)). \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, $\varphi(\mathbb{L}_{\mu_x}(M_x)) = (\ln((1-\mu_x)\lambda_x); \ln((1+\mu_x)\lambda_x))$, что и доказывает утверждение леммы. □

Пользуясь указанным соответствием, можно определить понятие производной функции $f(\Lambda)$ на гладком многообразии $\mathcal{M} = PR_1$ следующим образом.

Пусть $M = M(\lambda) \in PR_1$, $U = \mathbb{L}_\mu(M)$ — открытая μ-окрестность, координатная функция φ для произвольной решетки $\Lambda = \lambda_1\mathbb{Z} \in U$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1})$. Так как $\varphi(M) = 0$, то решётка M является началом данной системы координат. Для любого $\theta \in (\ln(1-\mu); \ln(1+\mu))$ имеем: $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta \cdot M$. Касательное пространство многообразия $\mathcal{M}$ в точке M будем обозначать через $\mathcal{M}_M$, оно имеет размерность один.

Касательный вектор $\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M \in \mathcal{M}_M$ зададим равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f) = \frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi(M)} \tag{7}$$

для каждой функции f класса C^∞ в окрестности решётки $M \in \mathcal{M}$. Также будет использоваться обозначение

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi}\Big|_M = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big|_M\right)(f). \tag{8}$$

3. Функции на пространстве решёток и ряды Дирихле

В теоретико-числовом методе в приближенном анализе следующие функции на пространстве решёток представляют особый интерес, это — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум, дзета-функция решётки и гиперболическая дзета-функция решётки. Рассмотрим эти понятия последовательно в случае пространства PR_1 одномерных решёток.

Детерминант решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ задается равенством $\det\Lambda = \lambda$. Ясно, что $\det\Lambda^* = (\det\Lambda)^{-1}$, $\det\mathbb{Z} = 1$. Для вычисления $\frac{\partial\det\Lambda}{\partial\varphi}\Big|_M$ заметим следующее: для решётки $M = M(\lambda)$ координатная функция $\varphi(\Lambda)$ задается равенством $\varphi(\Lambda) = \ln(\lambda_1\lambda^{-1}) = \theta$, где $\Lambda = \Lambda(\lambda_1)$. Далее имеем $\varphi^{-1}(\theta) = e^\theta\cdot M$ и $\det\Lambda\circ\varphi^{-1} = \det(e^\theta\cdot M) = e^\theta\lambda$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\det\Lambda}{\partial\varphi}\bigg|_M = \frac{\partial e^\theta\lambda}{\partial\theta}\bigg|_0 = \lim_{h\to 0}\frac{e^h\lambda-\lambda}{h} = \lambda = \det M.$$

В одномерном случае все три величины — детерминант решётки, гиперболический параметр решётки, норменный минимум — совпадают. Начиная с размерности $s = 2$ справедливы неравенства $N(\Lambda)\leqslant q(\Lambda)\leqslant\det\Lambda$, где

$$N(\Lambda) = \inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}}|x_1\cdot\ldots\cdot x_s| - \text{норменный минимум},$$

$$q(\Lambda) = \inf_{\vec{x}\in\Lambda,\,\vec{x}\neq\vec{0}}\overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_s} - \text{гиперболический параметр решетки}.$$

Дзета-функция решётки в одномерном случае всегда определена и мы для решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ при $\lambda > 0$ имеем:

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = {\sum_{x\in\Lambda}}'|x|^{-\alpha} = \frac{2\zeta(\alpha)}{\lambda^\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\zeta(\Lambda|\alpha) = \frac{2\zeta(\alpha)}{(e^\theta\lambda)^\alpha},\quad \frac{\partial\zeta(\Lambda|\alpha)}{\partial\varphi}\bigg|_M = \frac{\partial\frac{2\zeta(\alpha)}{(e^\theta\lambda)^\alpha}}{\partial\theta}\Bigg|_0 = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2\zeta(\alpha)}{(e^h\lambda)^\alpha}-\frac{2\zeta(\alpha)}{(\lambda)^\alpha}}{h} = -\alpha\zeta(M|\alpha).$$

Относительно дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки необходимо сказать следующее в случае размерности $s\geqslant 2$. Дзета-функция решётки определена для произвольной декартовой решётки, но неопределена для произвольной алгебраической решётки. Поэтому её как функцию на всём пространстве многомерных решёток рассматривать нельзя, так как множество алгебраических решёток всюду плотно в пространстве всех решёток (см. [31]).

Гиперболической дзета-функции решёток посвящены следующие два раздела.

3.1. Гиперолическая дзета-функция решёток

Так как в данной работе нас интересует только одномерный случай, то все необходимые определения и результаты будем формулировать для размерности $s = 1$, хотя они справедливы и для любой размерности $s\geqslant 1$.

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_1$ всех периодических функций $f(x)$ с периодом 1, у которых их ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}C(m)e^{2\pi im\cdot x},\quad C(m) = \int\limits_0^1 f(x)e^{-2\pi im\cdot x}dx$$

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_1$ относительно нормы

$$\|f(x)\|_{l_1} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |C(m)| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплекснозначных последовательностей (см. [11]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство периодических функций $E_1^\alpha \subset \mathfrak{A}_1$ состоит из функций $f(x)$, у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка[3]

$$C(m) = O\left(\frac{1}{\overline{m}^\alpha}\right).$$

Таким образом, эти функции удовлетворяют условиям

$$\sup_{m\in\mathbb{Z}} |C(m)|\overline{m}^\alpha = \|f(x)\|_{E_1^\alpha} < \infty. \tag{9}$$

Ясно, что для этих функций ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(x)\|_{l_1} \leqslant \|f(x)\|_{E_1^\alpha}(1 + 2\zeta(\alpha)),$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

О свойствах класса $E_s^\alpha(C)$ подробно можно узнать в [21] и [22] (так же см. [11]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_1 = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_1^\alpha$. Очевидно, $E_1 \subset \mathfrak{A}_1$. Ясно, что класс E_1 незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_1$ относительно нормы $\|f(x)\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Пространства E_1^α $(\alpha > 1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{1,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётке $\mathbb{Z}$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Действительно, этот изоморфизм φ_α нормированных пространств E_1^α и $l_{1,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(m) = \frac{c(m)}{\overline{m}^\alpha},\ m \in \mathbb{Z}, \quad ||c(m)||_\infty = \sup_{m\in\mathbb{Z}} |c(m)| < \infty.$$

Таким образом, если $x \in \mathbb{R}$ — произвольная точка, а $c(m) \in l_{1,\infty}$, то значение функции $\varphi_\alpha(c(m))$ в точке x задается с помощью ряда Дирихле

$$\varphi_\alpha(c(m))(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c(m)e^{2\pi i x\cdot m}}{\overline{m}^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(x,n)}{n^\alpha},$$

где

$$a(x,n) = \sum_{\overline{m}=n} c(m)e^{2\pi i x\cdot m}.$$

[3]Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1, |m|)$.

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\rho_k f[\xi(k)] - R_N[f]. \tag{10}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int\limits_0^1 f(x)dx$$

средним взвешенным значением функции $f(x)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi(k)) \qquad (k = 1, \dots, N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. Будем использовать равноправные обозначения $|M| = N$. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Определение 1. *Тригонометрической суммой сетки с весами (M, ρ) для произвольного целочисленного m называется выражение*

$$S(m, (M, \rho)) = \sum_{x\in M}\rho(x)e^{2\pi i m\cdot x}, \tag{11}$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(m, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|}S(m, (M, \rho)).$$

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [6]).[4]

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$R_N[f] = C(\vec{0})\left(\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \frac{1}{N}\sideset{}{'}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) =$$

$$= C(\vec{0})\left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1\right) + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m})S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \tag{12}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда, и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

В работе [12] дано следующее определение дзета-функции сетки M с весами $\vec{\rho}$.

[4]Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \dots, m_s) \neq (0, \dots, 0)$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ называется функция $\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(M,\vec{\rho},n)}{n^\alpha}, \tag{13}$$

где

$$S^*(M,\vec{\rho},n)=\sum_{\vec{m}\in N(n)}|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \tag{14}$$

и $N(n)$ — усечённая норменная поверхность, заданная равенством

$$N(n)=\{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s|\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s=n\}.$$

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 1 и следующая теорема:

Теорема 2. *Если $f(x_1,\ldots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]|\le C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+C\cdot\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}), \tag{15}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (11). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (10) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}=\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}). \tag{16}$$

Следуя К. И. Бабенко [3] и О. В. Локуциевскому [23], в работе [6] дано следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$.

Определение 3. *Говорят, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha=\alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x})\in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x})\notin E_s^\beta$ для любого $\beta>\alpha$. В противном случае говорят, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.*

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x})\in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 4. *Говорят, что алгоритм приближенного интегрирования*

$$<M(j),\vec{\rho}(j),\Delta>\ (j=1,2,\ldots)$$

периодических функций из класса $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ,λ), если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha=\alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство

$$R_{N_j}[f(\vec{x})]=O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right). \tag{17}$$

Как известно (см. [22]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

Из теоремы 2 сразу следует, что если алгоритм приближенного интегрирования

$$< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta > \ (j = 1, 2, \ldots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ), то

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1, \quad \zeta(\alpha|M(j), \vec{\rho}(j)) = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Из предыдущего видно, что ряды Дирихле, порождённые решетками, естественно возникают в теоретико-числовом методе в приближенном анализе и играют в его развитии существенную роль.

Теперь мы рассмотрим общий случай одномерной обобщенной параллелепипедальной сетки. Пусть $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ — произвольная одномерная решётка с детерминантом $\det\Lambda = \lambda > 1$ и Λ^* — её сопряженная решётка с $\det\Lambda^* = \lambda^{-1} < 1$.

Определение 5. *Для произвольной решетки Λ обобщенной параллелепипедальной сеткой $M(\Lambda)$ называется множество $M(\Lambda) = \Lambda^* \cap [0;1)$.*

Сетка $M_1(\Lambda) = \Lambda^* \cap [-1;1)$.

Обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода $M'(\Lambda)$ называется множество

$$M'(\Lambda) = \{x \,|\, x = \{y\}, y \in M_1(\Lambda)\}.$$

Определение 6. *Весовой функцией порядка r с константой B_r называется гладкая функция $\rho(x)$, удовлетворяющая условиям*

$$\rho(x) + \rho(x-1) = 1 \ \textit{при}\ x \in [0;1), \tag{18}$$

$$\rho(x) = 0 \quad \textit{при} \quad x \notin (-1;1), \tag{19}$$

$$\left|\int\limits_{-1}^{1} \rho(x) e^{2\pi i\sigma\cdot x} dx\right| \leqslant B_r \cdot (\overline{\sigma})^{-r} \quad \textit{для любого} \quad \sigma \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Если выполнены условия (18) и (19), то говорим просто о весовой функции $\rho(x)$.

Примером весовой функции порядка $r \geqslant 2$ служит функция из работы [8]

$$\rho_r(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| > 1, \\ 1 - (2r-3)C_{2r-4}^{r-2} \int\limits_0^{|x|} t^{r-2}(1-t)^{r-2} dt & \text{при } |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

Определение 7. *Квадратурной формулой с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(x)$ называется формула вида*

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = (\det\Lambda)^{-1} \sum_{x\in M'(\Lambda)} \rho_x f(x) - R_{N'(\Lambda)}[f],$$

$$\textit{где} \quad \rho_x = \sum_{y\in M_1(\Lambda), \{y\}=x} \rho(y), \quad N'(\Lambda) = |M'(\Lambda)|,$$

$R_{N'(\Lambda)}[f]$ — погрешность квадратурной формулы.

Рассмотрим два принципиально разных случая. Пусть $\lambda = N$ — натуральное число, тогда

$$\Lambda^* = \left\{ \frac{k}{N} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$$

и для сетки $M'(\Lambda)$ справедливо равенство

$$M'(\Lambda) = \left\{ \frac{k}{N} \middle| k = 0, 1, \ldots, N-1 \right\}, \quad \rho_x = 1, \quad N'(\Lambda) = N.$$

В этом случае мы получаем обычную формулу левых прямоугольников:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{k}{N}\right) - R_N[f].$$

Пусть теперь λ — нецелое число больше 1, тогда для любых целых k и m имеем $1 - \frac{k}{\lambda} \neq \frac{m}{\lambda}$, поэтому

$$M_1(\Lambda) = \left\{ \frac{k}{\lambda} \middle| -N \leqslant k \leqslant N \right\}, \quad N = [\lambda],$$

$$M'(\Lambda) = \left\{ 0 < 1 - \frac{N}{\lambda} < \frac{1}{\lambda} < \ldots < 1 - \frac{1}{\lambda} < \frac{N}{\lambda} \right\}, \quad N'(\Lambda) = 2N + 1,$$

$$\rho_x = \begin{cases} \rho(x) & \text{при } x = \frac{k}{\lambda},\ k = 0, \ldots, N, \\ 1 - \rho(x) & \text{при } x = 1 - \frac{k}{\lambda},\ k = 1, \ldots, N. \end{cases}.$$

В этом случае квадратурная формула будет с весами и примет вид:

$$\int\limits_0^1 f(x)dx = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{k=0}^{N} \rho\left(\frac{k}{\lambda}\right) f\left(\frac{k}{\lambda}\right) + \sum_{k=1}^{N} \left(1 - \rho\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right)\right) f\left(1 - \frac{k}{\lambda}\right) \right) - R_{2N+1}[f].$$

Для погрешности квадратурной формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II рода на классе E_1^α справедлива оценка (см. [8], [22])

$$R_{N'(\Lambda)}[E_1^\alpha(C)] = \sup_{f \in E_1^\alpha(C)} |R_{N'(\Lambda)}[f]| \leqslant CB \cdot c_1(\alpha) \zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

$$\text{где} \quad c_1(\alpha) = 2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right), \quad \zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{x \in \Lambda}{}' (\overline{x})^{-\alpha}.$$

Отметим важное обстоятельство — квадратурные формулы с обобщенной параллелепипедальной сеткой II типа и весовой функцией $\rho(\vec{x})$, вообще говоря, задают насыщаемый алгоритм численного интегрирования, если весовая функция конечного порядка и решетка не является целочисленной.

Этот алгоритм будет ненасыщаемый для целочисленных решеток, то есть для параллелепипедальных сеток, или для весовых функций бесконечного порядка. Определение ненасыщаемых алгоритмов дано в монографиях [3], [23].

Сформулируем без доказательства частный случай одной леммы из работы [7].

Лемма 7. *Пусть гладкая функция $f(x)$ обращается в ноль вместе со своей производной $f'(x)$ на границе отрезка $[-1; 1]$ и обращается тождественно в ноль вне его.*

Тогда для погрешности приближенного интегрирования квадратурной формулы

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{\det\Lambda}\sum_{x\in\Lambda^*} f(x) - R[f]$$

справедливо равенство

$$R[f] = {\sum_{x\in\Lambda}}' \int\limits_{-1}^{1} f(y)e^{-2\pi i y\cdot x}dy.$$

Оценка погрешности интегрирования получается сразу из леммы 7 и определения весовой функции, если вместо $f(x)$ взять гладкую функцию $f(x)\rho(x)$ и воспользоваться равенством

$$\int\limits_{0}^{1} f(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} f(x)\rho(x)dx.$$

Действительно, если $\rho(x)$ — весовая функция порядка $r \geqslant \alpha > 1$ и $f(x) \in E_1^\alpha$, то

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c(m)}{\overline{m}^\alpha} e^{2\pi i m x}, \quad |c(m)| \leqslant \|f(x)\|_{E_1^\alpha}$$

и

$$R[f] = {\sum_{x\in\Lambda}}' \int\limits_{-1}^{1} f(y)\rho(y)e^{-2\pi i y\cdot x}dy = {\sum_{x\in\Lambda}}' \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{c(m)}{\overline{m}^\alpha} \int\limits_{-1}^{1} \rho(y)e^{2\pi i y(m-x)}dy.$$

Отсюда следует, что

$$|R[f]| \leqslant B_r\|f(x)\|_{E_1^\alpha} {\sum_{x\in\Lambda}}' \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\overline{m}^\alpha\overline{m-x}^r}.$$

Пользуясь оценкой (2.10) из монографии [22] стр. 53, получим

$$|R[f]| \leqslant B_r\|f(x)\|_{E_1^\alpha} {\sum_{x\in\Lambda}}' \frac{A(\alpha}{\overline{x}^\alpha} = B_r\|f(x)\|_{E_1^\alpha} A(\alpha)\zeta_H(\Lambda|\alpha),$$

где $A(\alpha) = 2^{\alpha+1}(1 + 2\zeta(\alpha))$.

Теперь приведём пример из работы [8] весовой функции бесконечного порядка. Пусть

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ \exp\left(\frac{1}{x-1}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) & \text{при } 0 < x < 1, \\ 1 - \rho(x+1) & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Функция $\rho(x)$ на отрезке $[0;1]$ монотонно убывает от 1 до 0, так как при $0 < x < 1$

$$\rho'(x) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{-x^2+x-1}{x^2(x-1)^2} < 0.$$

3.2. Производная от гиперболической дзета-функции

Прежде всего введём следующие обозначения $K(\lambda) = \left\lceil \frac{1}{\lambda} \right\rceil$, где для $x > 0$ $\lceil x \rceil = k$ при $k - 1 < x \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$. Положим при $k \in \mathbb{N}$, $\alpha > 1$

$$\zeta(k, \alpha) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

При $k = 1$ имеем $\zeta(k, \alpha) = \zeta(\alpha)$.

Используя сделанные обозначения, можно записать следующее простое выражение для гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \begin{cases} \frac{2\zeta(\alpha)}{\lambda^{\alpha}} & \text{при } \lambda \geqslant 1, \\ 2(K(\lambda) - 1) + \frac{2\zeta(K(\lambda),\alpha)}{\lambda^{\alpha}}, & \text{при } 0 < \lambda < 1. \end{cases}$$

Если положить $\zeta_H^*(\Lambda|\alpha) = \frac{2\zeta(K(\lambda),\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$, то для любого $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = 2(K(\lambda) - 1) + \zeta_H^*(\Lambda|\alpha).$$

Непрерывность гиперболической дзета-функции решётки $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ очевидна для всех $\lambda \neq \frac{1}{k}$, где k — любое натуральное число. Непрерывность слева в точке $\lambda = \frac{1}{k}$ также очевидна.

Рассмотрим $\lim\limits_{\lambda \to \left(\frac{1}{k-1}\right)^-} \zeta_H(\Lambda|\alpha)$. Имеем:

$$\lim_{\lambda \to \left(\frac{1}{k-1}\right)^-} \zeta_H(\Lambda|\alpha) = 2(k-1) + 2(k-1)^{\alpha}\zeta(k, \alpha) = 2((k-1) - 1) + 2(k-1)^{\alpha}\zeta(k-1, \alpha) =$$
$$= \zeta_H\left(\Lambda\left(\frac{1}{k-1}\right)\middle|\,\alpha\right)$$

и непрерывность справа также установлена.

Таким образом, установлена непрерывность гиперболической дзета-функции на пространстве PR_1, что согласуется с общей теоремой из работы [13].

Так как при $\lambda \geqslant 1$ имеем равенство дзета-функции решётки и гиперболической дзета-функции решётки, то при $\lambda \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial\zeta_H(\Lambda|\alpha)}{\partial\varphi}\right|_M = -\alpha\zeta_H(M|\alpha).$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda \in \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right)$ для любого натурального $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial\zeta_H(\Lambda|\alpha)}{\partial\varphi}\right|_M = -\alpha\zeta_H^*(M|\alpha).$$

Таким образом, мы видим, что при $0 < \lambda < 1$ гиперболическая дзета-функция решётки кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в точках $M = M\left(\frac{1}{k}\right)$, где $k \in \mathbb{N}$.

3.3. Ряды Дирихле для решёток

Пусть $a(n)$ — произвольная числовая функция на $\mathbb{Z}'$, где $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, тогда рядом Дирихле на решётке $\Lambda = \Lambda(\lambda)$ назовём функцию

$$f(\Lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}'} \frac{a(n)}{(\lambda n)^{\alpha}},$$

а гиперболическим рядом Дирихле — функцию

$$f_H(\Lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{n\in\mathbb{Z}'} \frac{a(n)}{\overline{\lambda n}^{\alpha}}.$$

Положим

$$A(\lambda, a(n)) = \sum_{|n|<K(\lambda)} a(n), \quad f(\lambda, a(n)|\alpha) = \sum_{|n|\geqslant K(\lambda)} \frac{a(n)}{|n|^{\alpha}},$$

тогда

$$f(\Lambda, a(n)|\alpha) = \frac{f(\mathbb{Z}, a(n)|\alpha)}{|\lambda|^{\alpha}}, \quad f_H(\Lambda, a(n)|\alpha) = A(\lambda, a(n)) + f_H^*(\Lambda, a(n)|\alpha),$$

где

$$f_H^*(\Lambda, a(n)|\alpha) = \frac{f(\lambda, a(n)|\alpha)}{|\lambda|^{\alpha}}.$$

По аналогии с предыдущим разделом получим:

$$\left.\frac{\partial f(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial\varphi}\right|_M = -\alpha f(M, a(n)|\alpha).$$

При $\lambda \geqslant 1$ справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial f_H(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial\varphi}\right|_M = -\alpha f_H(M, a(n)|\alpha);$$

при $\lambda \in \left(\frac{1}{k}; \frac{1}{k-1}\right)$ для любого натурального $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial f_H(\Lambda, a(n)|\alpha)}{\partial\varphi}\right|_M = -\alpha f_H^*(M, a(n)|\alpha).$$

Таким образом, мы видим, что при $\lambda \geqslant 1$ ряд Дирихле $f(\Lambda, a(n)|\alpha)$ — бесконечно дифференцируемая функция на дифференцируемом многообразии PR_1, а при $0 < \lambda < 1$ гиперболический ряд Дирихле на решётке кусочно дифференцируемая функция, у которой отсутствуют производные в точках $M = M\left(\frac{1}{k}\right)$, где $k \in \mathbb{N}$.

4. Заключение

Построенные основы теории гладких многообразий касаются только простейшего случая пространства одномерных теоретико-числовых решёток. Он более простой, так как любая одномерная решётка имеет только два базиса, отличающихся знаком.

Уже рассмотрение сдвинутых решёток осложнено тем, что для задания метрики на пространстве таких решёток необходимо рассмотреть их погружение в пространство решёток большой размерности. А как известно, уже для любой двумерной решётки количество базисов решётки счётно. Поэтому возникают определенные трудности для построения теории гладких многообразий многомерных теоретико-числовых решёток и сдвинутых решёток.

Решению этих проблем будут посвящены следующие статьи по этой тематике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акрамов У. А. Теорема изоляции для форм, отвечающих чисто вещественным алгебраическим полям, // Аналитическая теория чисел и теория функций: 10. Зап. науч. семинара. ЛОМИ. 1990. N 185. С. 5–12.

2. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука. 1975. — 240 с.

3. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

4. Вейль Г. Алгебраическая теория чисел — М.: И*Л, 1947

5. Делоне Б. Н., Фаддеев Д. К. Теория иррациональностей третьей степени // Научн. тр. / Мат. ин-т им. В. А. Стеклова. 1940. Т.11.

6. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008. Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185–223.

7. Н. М. Добровольский Оценки отклонений обобщенных параллелепипедальных сеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6089–84.

8. Н. М. Добровольский О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84. № 6091–84.

9. Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решёток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

10. Добровольский Н. М. Многомерные теоретико-числовые сетки и решетки и их приложения к приближенному анализу // Сб. IV Международная конференция „Современные проблемы теории чисел и ее приложения“, посвященная 180-летию П. Л. Чебышева и 110-летию И. М. Виноградова. Тула, 10—15 сентября, 2001 Актуальные проблемы Ч. I. М. МГУ, 2002. С. 54—80.

11. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

12. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

13. Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

14. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Алгебраические, вероятностные, геометрические, комбинаторные и функциональные методы в теории чисел: Сб.тез. докл. II Междунар. конф. Воронеж, 1995. С. 53.

15. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. Об аналитическом продолжении гиперболической дзета-функции рациональных решёток // Современные проблемы теории чисел и ее приложения: Сб. тез. докл. III Междунар. конф. Тула, 1996. С. 49.

16. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.

17. Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О числе точек решётки в гиперболическом кресте // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 3. 1998. С. 363–369.

18. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

19. Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965. — 420 с.

20. А. Н. Кормачева. Приближение квадратичных алгебраических решёток целочисленными решётками — II // Чебышевский сборник, 2019, т. 21, вып. 3, с. 215–222.

21. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

22. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

23. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995.

24. Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 233–246.

25. Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета–функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

26. Скубенко Б. Ф. О произведении n линейных форм от n переменных // Труды МИАН СССР. № 158. 1981. С. 175 — 179.

27. Скубенко Б. Ф. Теорема изоляции для разложимых форм чисто вещественных алгебраических полей степени $n \geqslant 3$ // Аналитическая теория чисел и теория функций. 4. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 112. 1981. С. 167–171.

28. Скубенко Б. Ф. Циклические множества чисел и решёток // Аналитическая теория чисел и теория функций. 8. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 160. 1987. С. 151–158.

29. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимой кубической формы от трех переменных // Аналитическая теория чисел и теория функций. 9. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 168. 1988. С. 125–139.

30. Скубенко Б. Ф. Минимумы разложимых форм степени n от n переменных при $n \geqslant 3$ // Модулярные функции и квадратичные формы. 1. Зап. науч. семинара ЛОМИ. № 183. 1990. С. 142–154.

31. Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 326–338.

32. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и группы Ли. — М.: Мир, 1987. — 304 с.

33. Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

34. Фролов К. К. Квадратурные формулы на классах функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ВЦ АН СССР. 1971.

REFERENCES

1. Akramov, U. A. 1990, “The isolation theorem for forms corresponding to purely real algebraic fields“, *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 10 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no. 185, pp. 5–12.

   bibitem engAr Arnold V. I., 1975, “Ordinary differential equations”, M .: Science, 240 p.

2. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

3. Vejl’, G. 1947, *Algebraicheskaya teoriya chisel [Algebraic number theory]*, Gosudarstvennoe izdatel’stvo inostrannoj literatury, Moscow, Russia.

4. Delone, B. N. & Faddeev, D. K. 1940, “Theory of irrationalities of the third degree“, *Trudy matematicheskogo instituta imeni V.A. Steklova* (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics), vol. 11, pp. 3–340.

5. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

6. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “Evaluation of generalized variance parallelepipedal grids”, Dep. v VINITI, no. 6089–84.

7. Dobrovol’skii, N. M. 1984, “On quadrature formulas in classes $E_s^\alpha(c)$ and $H_s^\alpha(c)$”, Dep. v VINITI, no. 6091–84.

   bibitemengKd36 Dobrovolskiy N. M. Hyperbolic zeta function of lattices. Dep. in VINITI 08.24.84, no. 6090-84.

   bibitemengDaK Dobrovolsky N. M. “Multidimensional number-theoretic grids and lattices and their applications to approximate analysis”, Sb. IV International conference glqq Modern problems of number theory and its applications grqq dedicated to the 180th anniversary of P. L. Chebyshev and 110th anniversary of I. M. Vinogradov. Tula, 10 — 15 September, 2001 Actual problems Ch. I. M. MGU, 2002. p. 54 — 80.

8. Dobrovol’skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, “Banach spaces of periodic functions”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

9. Dobrovol’skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, “On the continuity of the zeta function of a grid with weights”, Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.

10. Dobrovol’skij, N.M., Rebrova, I.YU. & Roshhenya, A.L. 1998, “Continuity of the hyperbolic zeta function of lattices“, *Matematicheskie zametki* (Mathematical Notes), vol. 63, no. 4, pp. 522–526.

11. N. M. Dobrovol’skii, A. L. Roshchenya, “Number of lattice points in the hyperbolic cross”, Math. Notes, 63:3 (1998), 319–324.

12. Dobrovolskiy N. M., Roshchenya A. L., 1995, “On the number of points of a lattice in a hyperbolic cross”, Algebraic, probabilistic, geometric, combinatorial and functional methods in number theory: Collected tez. report II Int. conf. Voronezh, p. 53.

13. Dobrovolskii N. M., Roshchenya A. L., 1996, “On the analytic continuation of the hyperbolic zeta-function of rational lattices”, Modern problems of number theory and its applications: Collection of articles. thesis. report III Int. conf. Tula, p. 49.

14. Dobrovol'skii N. M., Roshchenya A. L., 1996, "On the continuity of the hyperbolic zeta-function of lattices", Izv. Toole. state un-that. Ser. Mathematics. Mechanics. Computer science. T. 2. Issue 1. Tula: Publishing house of Tula State University, p. 77 — 87.

15. Kassels, D. 1965, *Vvedenie v geometriyu chisel*, [Introduction to the geometry of numbers], Mir, Moscow, Russia.

16. A. N. Kormacheva, 2019, "Approximation of quadratic algebraic lattices by integer lattices — II" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 215–222.

17. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

18. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

19. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

20. N. V. Maksimenko, 2020, "The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication", Chebyshevskii sbornik, vol. 21, no. 1, pp. 233–246.

21. Rebrova, I. YU. 1998, "The continuity of the generalized hyperbolic zeta lattice function and its analytic continuation", *Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*, vol. 4, no. 3, pp. 99–108.

22. Skubenko, B. F. 1981, "The isolation theorem for decomposable forms of purely real algebraic fields of degree $n > 3$", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 4 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.112, pp. 167–171.

23. Skubenko, B. F. 1981, "On the product of n linear forms of n variables", *Trudy MIAN SSSR*, no.158, pp. 175–179.

24. Skubenko, B. F. 1982, "To joint approximations of algebraic irrationalities", *Tselochislennye reshetki i konechnye linejnye gruppy, Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 142–154.

25. Skubenko, B. F. 1987, "Cyclic sets of points and lattices", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij. 8 Zap. nauchn. sem. LOMI*, pp. 151–158.

26. Skubenko, B. F. 1988, "The minima of a decomposable cubic form in three variables", *Analiticheskaya teoriya chisel i teoriya funktsij.* 9 Zap. nauchn. sem. LOMI, no.168, pp. 151–158.

27. Skubenko, B. F. 1990, "Minima of decomposable forms of degree n of n variables for $n > 3$", *Modulyarnye funktsii i kvadratichnye formy. 1 Zap. nauchn. sem. LOMI*, no.183, pp. 142–154.

    bibitem engSPDD E. N. Smirnova, O. A. Pikhtilkova, N. N. Dobrovolsky, N. M. Dobrovolsky., 2017, "Algebraic lattices in the metric space of lattices", Chebyshev sb., vol. 18, no. 4, p. 326–338.

    bibitem engWar Warner F. Foundations of the theory of smooth manifolds and Lie groups. — M .: Mir, 1987. — 304 p.

28. Frolov, K. K. 1976, "Estimates from above of the error of quadrature formulas on function classes", *DAN SSSR*, no.4, pp. 818–821.

29. Frolov, K. K. 1979, “Quadrature formulas on function classes“, Ph.D. Thesis, Computing Center of the Russian Academy of Sciences of the USSR, Moscow, Russia.

Получено 21.04.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.