

ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-142-164

**Оценки снизу многочленов и линейных форм
от значений F -рядов**

А. Х. Муньос Васкес

Анхель Хорхеевич Муньос Васкес — аспирант кафедры теории чисел, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).

e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Аннотация

Цель настоящей работы — применить обобщенный метод Зигеля — Шидловского для рассмотрения значения F — рядов в достаточно малых p — адических точках для конкретного значения p . Обобщенный метод Зигеля — Шидловского получил значительное развитие в работах Чирского В. Г., Бертрана Д., Йеббоу Й., Матала-Ахо Т., Зудилин В. В., Матвеева В. Ю., Андре И., однако эти работы относились к так называемым глобальным соотношениям и тесно связанными с ними понятиями бесконечной линейной и алгебраической независимости. В этой работе рассматриваются значения этих рядов в конкретном поле Q_p . Понятие бесконечной алгебраической независимости относится к прямому произведению бесконечного числа полей Q_p , оно означает что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — элементы этого прямого произведения координаты которых в поле Q_p обозначаются $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}$, то для любого многочлена с целыми коэффициентами, отличными от нуля, существует бесконечное множество простых чисел p , таких что в поле Q_p выполнено неравенство $P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}) \neq 0$. Однако эти результаты не дают соответствующего утверждения для каждого конкретного числа p . В этой работе мы доказываем отличие от нуля линейной формы и многочлена от значений этих рядов в достаточно малой p — адической точке, малость которой зависит от высоты H этой формы или многочлена и от степени многочлена. В дальнейшем результаты этой работы будут применены к гипергеометрическим рядам с рациональными параметрами входящими в класс F — рядов.

Ключевые слова: F — ряды, оценки линейных форм и многочленов, p — адические числа.

Библиография: 23 названия.

Для цитирования:

А. Х. Муньос Васкес. Оценки снизу многочленов и линейных форм от значений F -рядов // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 142–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 511.36

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-142-164

Lower estimates of polynomials and linear forms
in the values of F -series

A. Kh. Munos Vaskes

Ankhel Khorkheevich Munos Vaskes — post-graduate student, department of number theory, Moscow State Pedagogical University (Moscow).

e-mail: m.v.ankhel@yandex.ru

Abstract

The paper applies a modification of the generalized Sigel – Shidlovskii's method to values of F – series at sufficiently small p – adic points for a given p . The generalized Siegel – Shidlovskii's method is considerably developed in works by Chirskii V. G., Bertrand D., Yebbou Y, Matala-Aho T., Zudilin V. V., Matveev V. Yu., Andre Y. et al. But these papers dealt with the so called global relations and related notions such as infinite linear and algebraic independence. Here we consider values at points from a given field $\mathbb{Q}_p$. The notion of the infinite algebraic independence is related to a direct product of infinite set of fields $\mathbb{Q}_p$, it means that if $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – are elements of this direct product with coordinates $\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}$ in the field $\mathbb{Q}_p$, then for any non-zero polynomial with integer coefficients there exist infinitely many primes p such that in $\mathbb{Q}_p$ one has $P(\alpha_1^{(p)}, \dots, \alpha_n^{(p)}) \neq 0$. But these results give no information for a specific p . Here we prove that a non-zero linear form and a non-zero polynomial do not vanish at values of the considered series at p – adic points which are small enough, depending on the height of a linear form or a polynomial and depending on the degree of the polynomial. The results of these paper will be applied to the values of generalized hypergeometric F – series.

Keywords: F – series, estimates linear forms and polynomials, p – adic numbers.

Bibliography: 23 titles.

For citation:

A. Kh. Munos Vaskes, 2020, "Lower estimates of polynomials and linear forms in the values of F -series", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 142–164.

1. Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Степенной ряд называется F – рядом, если он входит в некоторый класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$, где $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, $\kappa = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$*

Класс $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ определяется следующим образом. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n. \quad (1)$$

Пусть:

1. $a_n \in \mathbb{K}, n = 0, 1, 2, \dots;$

2. $|\overline{a_n}| = O(e^{c_1 n})$, $n \rightarrow \infty$ (где для алгебраического числа α символ $|\overline{\alpha_n}|$ обозначает наибольшую из абсолютных величин алгебраически сопряжённых с α чисел);
3. существует последовательность натуральных чисел $d_n = q^n d_{0,n}$, где $q \in \mathbb{N}$, такая, что $d_n a_k \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, \dots, n$.

При этом $d_{0,n}$ делятся только на простые числа p , не большие $c_2 n$, причём

$$\text{ord}_p d_{0,n} \leq c_3 \left(\log_p n + \frac{n}{p^2} \right).$$

При выполнении перечисленных условий будем говорить, что $f(z)$ *входит в класс* $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$.

Мы сохраняем обозначения использованные в работах В. Г. Чирского.

F – ряды естественным образом дополняют классы E – и G – функций Зигеля, представляющих собой степенные ряды вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ соответственно. Более того, сразу ясно, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n$ является F – рядом, то $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ – G – функция, а $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ – E – функция Зигеля.

Пусть $\mathbb{K}$ – алгебраическое числовое поле конечной степени κ над $\mathbb{Q}$. Пусть V – множество всех нормирований на поле $\mathbb{K}$. Для любого $v \in V$ соответствующие пополнения полей $\mathbb{K}$ и $\mathbb{Q}$ обозначаем $\mathbb{K}_v$ и $\mathbb{Q}_v$. Поле $\mathbb{K}_v$ является конечным расширением поля $\mathbb{Q}_v$, $[\mathbb{K}_v : \mathbb{Q}_v] = \kappa_v$, причём для любого простого числа p

$$\sum_v \kappa_v = \kappa. \quad (2)$$

где суммирование в левой части равенства производится по всем нормированиям v , продолжающим p – адическое нормирование поля $\mathbb{Q}$.

Удобно рассматривать нормализованные нормирования: если v продолжает p – адическое нормирование то положим

$$|p|_v = p^{-\frac{\kappa_v}{\kappa}} \quad (3)$$

Из формулы произведения по всем нормированиям v поля $\mathbb{K}$

$$\prod_{v \in V} |x|_v = 1,$$

для любого $x \in \mathbb{K}$, $x \neq 0$ следует часто встречающееся в дальнейшем неравенство: *если A – целое число из поля $\mathbb{K}$, $A \neq 0$, то для любого $v \in V_0$ (множества всех неархимедовых нормирований поля $\mathbb{K}$) имеет место неравенство:*

$$|A|_v \geq \frac{1}{|A|}. \quad (4)$$

Действительно, для любого $\tilde{v} \in V_0$ выполняется неравенство $|A|_{\tilde{v}} \leq 1$, следовательно

$$\prod_{\tilde{v} \in V_0} |A|_{\tilde{v}} \leq |A|_v. \quad (5)$$

С другой стороны, по формуле произведения

$$\prod_{\tilde{v} \in V_0} |A|_{\tilde{v}} = \frac{1}{\prod_{\tilde{v} \in V_{\infty}} |A|_{\tilde{v}}} \quad (6)$$

Кроме того в виду равенства (2)

$$\prod_{v \in V_\infty} |A|_v = \prod_{i=1}^{\kappa} |A^{(i)}|^{\frac{\kappa_v}{\kappa}} \leq \prod_{i=1}^{\kappa} |\bar{A}|^{\frac{\kappa_v}{\kappa}} = |\bar{A}|, \quad (7)$$

где $A^{(i)}$ – сопряжённые с A числа. Из (5) – (7) следует (4).

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n, b_n \in \mathbb{K}_v$ сходится в $\mathbb{K}_v, v \in V_0$ тогда и только тогда, когда $|b_n|_v \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ (См. [1]).

Известно следующее очевидное свойство нормирований $v \in V_0$: если $\sum_{k=K}^{\infty} a_k$ – сходящийся в $\mathbb{K}_v$ ряд, то

$$\left| \sum_{k=K}^{\infty} a_k \right|_v \leq \max_{k \geq K} |a_k|_v, a_k \in \mathbb{K}_v \quad (8)$$

Далее, извстно, что

$$\text{ord}_p n! = \frac{n - S_n}{p - 1}, \quad (9)$$

(См. [1]), где S_n обозначает сумму цифр в p -ичном разложении натурального числа n . Очевидно неравенства

$$1 \leq S_n \leq (p - 1) \log_p n. \quad (10)$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (11)$$

и пусть для некоторого $v \in V_0$ множество $|A_n|_v, n = 0, 1, 2, \dots$ ограничено. Тогда мы обозначаем

$$\langle f \rangle_v = \sup \{|A_n|_v, n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (12)$$

ЛЕММА 1. *Введённая выше величина (12) обладает следующими свойствами:*

1. Если для рядов $f(z), g(z)$ вида (11) и некоторого $v \in V_0$ определены величины $\langle f \rangle_v, \langle g \rangle_v$ то для их произведения $f(z)g(z)$ определена величина $\langle fg \rangle_v$, причём

$$\langle fg \rangle_v \leq \langle f \rangle_v \langle g \rangle_v \quad (13)$$

2. Если для ряда (11) и некоторого $v \in V_0$ определена величина $\langle f \rangle_v$, то для формальной производной этого ряда $f'(z)$ также определена величина $\langle f' \rangle_v$ и

$$\langle f' \rangle_v \leq \langle f \rangle_v \quad (14)$$

3. Если для ряда (11) и некоторого $v \in V_0$ определена величина $\langle f \rangle_v, |\xi|_v \leq 1$ и ряд $f(\xi)$ сходится в поле $\mathbb{K}_v$, то

$$|f(\xi)|_v \leq \langle f \rangle_v \quad (15)$$

ЛЕММА 2. 1. *Формальная производная*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n n! z^{n-1} \quad (16)$$

F – ряда (1) является F – рядом.

2. Формальный интеграл

$$\int_0^z f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

F – ряда (1) является F – рядом.

3. Если λ – алгебраическое число, то $f(\lambda z)$ – F – ряд.

4. Сумма и произведение конечного числа F – рядов является F – рядом.

Лемма 2 означает, что F – ряды, также как и E – и G – функции (см. [18]) образуют кольцо степенных рядов, замкнутое относительно операций формального дифференцирования, формального интегрирования от 0 до z и замены переменной z на λz где λ – алгебраическое число.

ЛЕММА 3. Пусть F – ряд $f(z)$ принадлежит классу $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$. Тогда для любого простого числа p и любого нормирования v , продолжающего p – адическое, и любого числа $\delta > 0$, рассматриваемый ряд сходится в $\mathbb{K}_v$ при

$$|z|_p < p^{\frac{\kappa_v}{\kappa} \left(\frac{1}{p-1} - \text{ord}_p q - \frac{c_3}{p^2} - \delta \right)}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\xi = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, b \in \mathbb{N}$, b выбрано наименьшим с такими условиями, p – простое число, $p \geq c_3$, $(p, q) = 1$, v продолжает p – адические нормирования. Тогда любой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! \xi^n$$

из класса $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ сходится в поле $\mathbb{K}_v$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого F – ряда $f(z)(1)$ из класса $F(\mathbb{K}, c_1, c_2, c_3, q)$ и $v \in V_0$, продолжающего p – адическое нормирование, $p \geq c_3$, $(p, q) = 1$, определена величина $\langle f \rangle_v$, причём $\langle f \rangle_v = \max_n |a_n n!|_v$.

Напомним упомянутое выше определение глобального соотношения.

Если $P(y_1, \dots, y_m)$ – многочлен с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, степенные ряды $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \mathbb{K}[[z]]$, $\xi \in \mathbb{K}$, то соотношение

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) = 0 \quad (17)$$

называется *глобальным*, если оно выполняется во всех полях $\mathbb{K}_v$, где сходятся все ряды $f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)$.

Отсутствие глобальных соотношений означает, что для любого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ существует простое число p и существует нормирование v поля $\mathbb{K}$, продолжающее p – адическое такие, что в поле $\mathbb{K}_v$ выполняется неравенство

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0$$

Говоря об отсутствии глобальных соотношений, имеет смысл определить границу сверху для вышеупомянутого числа p , и дать оценку снизу для величины $|P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_v$ в виде выражений, зависящих от ξ , от степени и размера многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$, от числа m и от параметров класса, которому принадлежат рассматриваемые ряды. В формулируемых теоремах положительные постоянные $c_i, i = 4, 5, \dots$ зависят от ξ , числа m и от параметров класса, которому принадлежат F – ряды, но не зависят от степени и размера рассматриваемого многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$.

В работах [3]–[6], [8]–[12], [19]–[23] исследован вопрос о глобальных соотношениях для F – рядов.

Везде далее считаем $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}$ и рассматриваем $|\cdot|_p$ для выбранного p .

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – ряды $1 = f_1(z), \dots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ и удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$y'_i = \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \dots, m, \quad (18)$$

где $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$, $i, j = 1, \dots, m$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z)$, $i, j = 1, \dots, m$. Пусть эти ряды линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m \quad (19)$$

произвольная линейная форма, коэффициенты которой являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, $\max_{i=1, \dots, m} |\overline{h_i}| = H$, $H \geq H_0$.

Пусть p – простое число, $(p, q) = 1$, выполняются условия

$$p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, \quad (20)$$

а также $\xi = p^{\gamma(H)}$, $T(\xi) \neq 0$ и пусть $\gamma(H) > \frac{m \ln \ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется

$$L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть F – ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ и удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=1}^{\infty} Q_{i,j} y_j, i = 1, \dots, m, \quad (22)$$

где $Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$. Пусть $T(z) \in \mathbb{Z}[z]$ и $T(z)Q_{i,j} \in \mathbb{Z}(z)$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$. Пусть эти ряды алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Пусть

$$P(y_1, \dots, y_m) \quad (23)$$

произвольный многочлен степени K , коэффициенты которого являются целыми числами из поля $\mathbb{Q}$, причём среди них есть отличные от нуля. Пусть, кроме того, наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, равна H , $H \geq H_0$.

Пусть p – простое число, $(p, q) = 1$, выполняются условия

$$p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2(c_3 + 1)K, \quad (24)$$

а также $\xi = p^{\gamma(H)}$, $T(\xi) \neq 0$ и пусть $\gamma(H) \geq \binom{m+K}{m} \frac{\ln \ln H}{\ln p}$.

Тогда в поле $\mathbb{Q}_p$ выполняется

$$P(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)) \neq 0. \quad (25)$$

2. Доказательство теорем 1 и 2

Используется модификация обобщающая метод Зигеля – Шидловского. Используемые леммы и сам метод сформулированы следуя монографии [18].

2.1. Формулировка основных лемм метода Зигеля – Шидловского

Пусть

$$f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{k,n} z^n, k = 1, \dots, m, m \geq 2, b_{k,n} \in \mathbb{Q} \quad (26)$$

формальные степенные ряды. Пусть N – натуральное число,

$$P_k \in \mathbb{Q}[z], \deg P_k \leq N. \quad (27)$$

Рассмотрим линейную форму

$$R(z) = \sum_{k=1}^m P_k f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n z^n \quad (28)$$

Если считать $P_k \in \mathbb{Q}[z]$ многочленами с неопределёнными коэффициентами и потребовать, чтобы $r_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots, m(N+1) - 2$, то получится система из $m(N+1) - 1$ линейных однородных уравнений относительно $m(N+1)$ неизвестных коэффициентов. Эта система всегда имеет нетривиальное решение. Следовательно, $P_k \in \mathbb{Q}[z]$ можно выбрать так, чтобы $\text{ord}_{z=0} R(z) \geq m(N+1) - 1$.

Тем не менее, если ряды (26) не все тождественно равны нулю, а степени многочленов $P_k \in \mathbb{Q}[z]$ ограничены сверху, то при изменении коэффициентов этих многочленов невозможно получить отличную от тождественного нуля форму со сколь угодно высоким порядком нуля при $z = 0$.

ЛЕММА 4 (Лемма 4, [18]). Пусть N – натуральное число, (26) – формальные степенные ряды. Тогда существует натуральное число Θ , зависящее от (26) и числа N такое, что при любом выборе многочленов (27) линейная форма (28) либо тождественно равна нулю, либо выполняется неравенство $\text{ord}_{z=0} R(z) \leq \Theta$.

ЛЕММА 5 (Лемма 5, [18]). Пусть

$$\phi_1(z), \dots, \phi_s(z); \psi_1(z), \dots, \psi_m(z) \quad (29)$$

совокупность формальных степенных рядов, причём хотя бы при одном значении i ряд $\psi_i(z)$ отличен от тождественного нуля.

Тогда существует натуральное число Θ_0 , зависящее только от рядов (29), обладающее следующим свойством. Пусть

$$\alpha_1, \dots, \alpha_s; \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{Q} \quad (30)$$

произвольный набор чисел, для которого формальный степенной ряд $\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i(z)$ не равен нулю тождественно. Пусть

$$\omega = \frac{\sum_{i=1}^s \alpha_i \phi_i(z)}{\sum_{i=1}^m \beta_i \psi_i(z)} \quad (31)$$

формальный степенной ряд. Тогда ни при каком наборе (30) ряд (31) не может быть рациональной функцией от z степени большей, чем Θ_0 .

Рассмотрим линейные формы от переменных $y_1, \dots, y_m, m \geq 2$ вида

$$R = \sum_{i=1}^m P_i y_i, P_i \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m. \quad (32)$$

Линейные формы (32) образуют модуль над кольцом $\mathbb{Q}[z]$.

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка (18), где $Q_{k,i} = Q_{k,i}(z) \in \mathbb{Q}[z], i, k = 1, \dots, m$. Многочлен $T = T(z)$ представляет собой наименьший общий знаменатель коэффициентов системы (18). На рассматриваемом модуле линейных форм (32) определим соответствующий системе (18) линейный дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^m Q_{k,i} y_i \right) \frac{\partial}{\partial y_k}. \quad (33)$$

Пусть $y_1, \dots, y_m, m \geq 2$ представляют собой формальные степенные ряды по степеням z , составляющие формальное решение системы (18). Подставляя их в форму (32) вместо переменных, получаем формальный степенной ряд $R(z)$ по степеням z . Формальная производная ряда $R(z)$ по z является линейной формой от рядов $y_1, \dots, y_m$ и их формальных производных. После замены $y'_1, \dots, y'_m$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений (18) и умножения на многочлен $T = T(z)$ получим линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}[z]$. Таким образом, применение оператора D (33) к форме R означает вычисление формальной производной $R(z)$ по z с последующей заменой $y'_1, \dots, y'_m$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений (18), т.е. для решений этой системы имеем

$$TDR = TR'.$$

Рассмотрим произвольную линейную форму (32) от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}[z]$ и обозначим её

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i} y_i, P_{1,i} \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m. \quad (34)$$

Положим

$$R_k = TDR_{k-1}, k = 2, 3, \dots \quad (35)$$

Иными словами, ввиду (35), при подстановке в R_1 (34) некоторого нетривиального формального решения системы (18) вместо переменных $y_1, \dots, y_m$, имеют место равенства

$$R_k = TR'_{k-1}, k = 2, 3, \dots \quad (36)$$

Согласно сказанному выше, R_k представляет собой линейную форму от $y_1, \dots, y_m$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}[z]$. Следовательно, выполняются равенства

$$R_k = \sum_{i=1}^m P_{k,i} y_i, P_{k,i} \in \mathbb{Q}[z], i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots \quad (37)$$

Из (36) и (37) следует, что

$$P_{k,i} = T \left(P'_{k-1,i} + \sum_{j=1}^m P_{k-1,j} Q_{j,i} \right), i = 1, \dots, m, k = 2, 3, \dots \quad (38)$$

Рангом совокупности линейных форм с коэффициентами из кольца или поля W называется максимальное число линейно независимых над W форм в этой совокупности.

ЛЕММА 6 (Лемма 6,[18]). Ранг совокупности линейных форм $R_1, R_2, \dots$ над $\mathbb{Q}[z]$ равен l тогда и только тогда, когда формы $R_1, \dots, R_l$ линейно независимы над $\mathbb{Q}[z]$, но формы $R_1, \dots, R_{l+1}$ уже линейно зависимы над $\mathbb{Q}[z]$

ЛЕММА 7 (Лемма 7,[18]). Пусть ранг системы линейных форм $R_1, \dots, R_m$ равен l , $1 \leq l < m$. Тогда можно выбрать $m - l$ линейно независимых над $\mathbb{Q}(z)$ формальных решений системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18)

$$y_{1,s}, \dots, y_{m,s}, s = 1, \dots, m - l$$

таких, что формы $R_1, R_2, \dots$ обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ любого из этих решений.

Сформулируем вариант основной леммы Шидловского А.Б. о порядке нуля линейной формы.

ЛЕММА 8 (Лемма 8,[18]). Пусть совокупность формальных степенных рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над $\mathbb{Q}(z)$,

$$\rho = \min_{1 \leq i \leq m} \text{ord}_{z=0} f_i(z), \quad (39)$$

$$\sigma = \max(\deg T, \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq m}} \deg TQ_{k,i}). \quad (40)$$

Пусть N – натуральное число,

$$R_1 = \sum_{i=1}^m P_{1,i} y_i, \deg P_{1,i} \leq N, P_{1,i} \in \mathbb{Q}(z), i = 1, 2, \dots, m,$$

R_1 – отличная от тождественного нуля линейная форма и ранг линейных форм $R_1, R_2, \dots$, полученных с помощью равенств (36) равен l .

Тогда существует постоянная r_0 , зависящая только от совокупности рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ такая, что при $y_i = f_i(z), i = 1, \dots, m$ выполняется неравенство

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) = \text{ord}_{z=0} \sum_{i=1}^m P_{1,i} f_i(z) \leq lN + r_0. \quad (41)$$

При $l = m$ в неравенстве (41) можно заменить число r_0 на число r_1 ,

$$r_1 = \sigma \frac{(m-1)m}{2} + m + \rho - 1. \quad (42)$$

Положим

$$N_0 = 2(r_0 - m + 1), \quad (43)$$

$$s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil, \quad (44)$$

$$t = \sigma \frac{(m-1)m}{2} + s + \rho \quad (45)$$

где N – натуральное число, а r_0 определено в лемме 8 (или равенством (42) при $l = m$).

ЛЕММА 9 (Лемма 9,[18]). Пусть выполнены условия леммы 8 и линейная форма R_1 при $y_i = f_i(z)$ удовлетворяют условию

$$\text{ord}_{z=0} R_1(z) \geq m(N+1) - s - 1 \quad (46)$$

Тогда при $N \geq N_0$ линейные формы $R_1, \dots, R_m$, получающиеся из формы R_1 с помощью равенств (36), линейно независимы и определитель

$$\Delta(z) = |P_{k,i}|_{k,i=1,\dots,m}, \quad (47)$$

составленный из коэффициентов этих форм, имеет вид

$$\Delta(z) = z^{mN-s-\rho} \Delta_1(z) \quad (48)$$

где $\Delta_1(z)$ отличный от тождественного нуля многочлен из $\mathbb{Q}[z]$, $\deg \Delta_1(z) = \theta$, $0 \leq \theta \leq t$

ЛЕММА 10 (Лемма 10,[18]). Пусть совокупность формальных степенных рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над $\mathbb{Q}(z)$, числа ρ, σ определены равенствами (39), (40), а числа N_0, s, t равенствами (43) – (45). Пусть линейная форма R_1 такова, что $N \geq N_0$ и при $y_i = f_i(z)$, $i = 1, \dots, m$ выполняется условие (46), $R_{k+1} = TDR_k$, $k = 1, 2, \dots$, ξ – целое число из $\mathbb{Q}$, $T(\xi) \neq 0$.

Тогда матрица

$$\|P_{k,i}(\xi)\|_{\substack{i=1,\dots,m \\ k=1,\dots,m+t}} \quad (49)$$

имеет ранг m .

2.2. Построение первой приближающей формы

ЛЕММА 11. Пусть ряды

$$f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m$$

принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$. Тогда для любого натурального числа N существуют многочлены

$$P_i(z) = \sum_{n=0}^N B_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m \quad (50)$$

такие, что их коэффициенты $B_{i,n}$, $i = 1, \dots, m$, $n = 0, \dots, N$ – целые числа из поля $\mathbb{Q}$, удовлетворяющие неравенству

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq e^{c_{10} N \sqrt{\ln N}}. \quad (51)$$

При этом линейная форма

$$R(z) = \sum_{i=1}^m P_i(z) f_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n n! z^n \quad (52)$$

имеет порядок нуля $\text{ord}_{z=0} R(z)$ не меньше, чем $k(N) + 1$, где

$$k(N) = m(N+1) - \left\lceil \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rceil \quad (53)$$

и для любого простого числа p , не превосходящего величины $k(N)$ такого, что

$$p \geq c_3, p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, (p, q) = 1 \quad (54)$$

справедливы неравенства

$$\langle R \rangle_p \leq \left| (m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)! \right|_p e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \quad (55)$$

$$|R(\xi)|_p \leq |(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)!|_p \cdot e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)} \quad (56)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим

$$P_i(z) f_i(z) = \sum_{k=0}^N B_{i,k} k! z^k \sum_{l=0}^{\infty} a_{i,l} l! z^l = \sum_{n=0}^{\infty} b_{i,n} n! z^n, i = 1, \dots, m, \quad (57)$$

где при любом натуральном n

$$b_{i,n} = \frac{1}{n!} \sum B_{i,k} k! a_{i,l} l!,$$

а суммирование производится по всем неотрицательным целым k, l таким, что $k + l = n$.

Условие (53) означает, что

$$\sum_{i=1}^m b_{i,n} = 0, n = 0, 1, \dots, m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor,$$

или ввиду (57),

$$\sum_{i=1}^m \sum \frac{k! l!}{(k+l)!} B_{i,k} a_{i,l} = 0, n = 0, 1, \dots, m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor, \quad (58)$$

где внутреннее суммирование производится по всем неотрицательным целым k, l таким, что $k + l = n$.

Оценим величину $d_{0,n}$, фигурирующую в определении класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$. Заметим, что ряд $\sum_p \frac{c_3}{p^2}$ сходится, поэтому из третьего условия этого определения и из неравенства

$$\pi(n) \leq c_5 \frac{n}{\ln n} \quad (59)$$

(здесь мы использовали оценку Чебышёва П. Л. для нахождения количества простых чисел p не превосходящих n , справедливую для всех $n \geq 2$, [2]) следует неравенство:

$$d_{0,n} = \prod_{p \leq c_2 n} p^{\text{ord}_p d_{0,n}} \leq \prod_{p \leq c_2 n} p^{c_3 (\log_p n + \frac{n}{p^2})} \leq e^{c_3 \ln n \cdot c_3 \frac{c_2 n}{\ln(c_2 n)}} e^{n \sum_p \frac{c_3}{p^2}} \leq e^{c_{12} n}. \quad (60)$$

Умножим обе части каждого из уравнений (58) на $\beta_N d_{0,N}$, где величина β_N наименьшее общее кратное чисел $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $k = 0, \dots, n$ про которую известна оценка $\beta_n \leq e^{c_4 n}$. При этом получится система линейных уравнений относительно $B_{i,n}$, $i = 1, \dots, m$, $n = 0, \dots, N$. Коэффициенты этой системы являются целыми числами поля $\mathbb{Q}$. Архимедовы абсолютные величины этих коэффициентов, а также сопряжённых с ними чисел, ввиду определения класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$, оценки для β_N и неравенства (60) не превосходят величины:

$$e^{c_6 n} q^n e^{c_{12} n} e^{c_7 n} = e^{c_{13} n} \leq e^{c_{13} (m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)}. \quad (61)$$

Применем к нашей системе уравнений известную лемму Зигеля.

ЛЕММА 12 (см.[18]). Пусть

$$a_{i,j} \in \mathbb{Z}, |\overline{a_{i,j}}| \leq A, i = 1, \dots, P, j = 1, \dots, Q, A > 0.$$

Пусть $P < Q$. Тогда существует нетривиальное решение $(x_1, \dots, x_Q)$ системы уравнений

$$\sum_{j=1}^Q a_{i,j} x_j = 0, i = 1, \dots, P$$

такое, что $x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, Q$. Кроме того, с некоторой, зависящей только от поля $\mathbb{Q}$, постоянной c_{14} выполняются неравенства

$$|\overline{x_i}| < c_{14}(c_{14}QA)^{\frac{P}{Q-P}}, i = 1, \dots, Q.$$

В рассматриваемой системе (58) число неизвестных Q равно $m(N+1)$, число уравнений P равно $m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1$. Следовательно, $Q - P = \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor - 1$,

$$\frac{P}{Q-P} = \frac{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor - 1} \leq \frac{m(N+1) - \frac{N}{\sqrt{\ln N}} + 2}{\frac{N}{\sqrt{\ln N}} - 2} \leq c_{15} \sqrt{\ln N} \quad (62)$$

Следовательно,

$$|\overline{B_{i,n}}| \leq c_{14}(c_{14}m(N+1)e^{c_{13}(m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)})^{c_{15}\sqrt{\ln N}} \leq e^{c_{16}N\sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, n = 0, \dots, N.$$

Неравенство (51) доказано.

Рассмотрим

$$r_n = \sum_{i=1}^m b_{i,n} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^m \sum B_{i,n-k} a_{i,k} (n-k)! k! = \sum_{i=1}^m \sum B_{i,n-k} a_{i,k} \frac{(n-k)! k!}{n!},$$

где внутреннее суммирование производится по всем неотрицательным целым k , не превосходящим n . Для произвольного простого числа $p, p \geq c_3$, не превосходящего величины $k(N)$ такого, что $(p, q) = 1$, имеет место неравенство

$$|r_n|_p \leq \max |B_{i,n-k}|_p |a_{i,k}|_p \frac{(n-k)! k!}{n!}_p,$$

где максимум взят по всем $i = 1, \dots, m$ и всем неотрицательным целым k , не превосходящим n . По определению класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ для p -адического нормирования $(p, q) = 1$, при $p > c_2 n, p \geq c_3$ выполняется неравенство $|a_{i,k}| \leq 1$, а при $c_3 \leq p \leq c_2 n$ выполняется неравенство

$$|a_{i,k}|_p \leq e^{c_3(\log_p n + \frac{n}{p^2})}.$$

Имеем при $p > n$ выполняется $\left| \frac{(n-k)! k!}{n!} \right|_p = 1$, а при $p \leq n$ имеем

$$\left| \frac{(n-k)! k!}{n!} \right|_p = e^{\frac{S_{n-k} + S_k - S_n}{p-1}} \leq e^{c_{17} \log_p n}.$$

Следовательно, для p -адического нормирования при $p \leq c_2 n$ выполняется неравенство

$$|r_n|_p \leq e^{c_{18} \log_p n + c_8 \frac{n}{p^2}}, \quad (63)$$

а при $p > c_2 n$ выполняется неравенство $|r_n|_p \leq 1$.

Для произвольного простого числа p , не превосходящего величины $k(N)$, такого, что $p \geq c_3$, $(p, q) = 1$, оценим сверху

$$\langle R \rangle_p \leq \max_{n \geq k(N)+1} (|r_n|_p |n!|_p).$$

Поскольку для $|r_n|_p$ выполняется оценка (63),

$$\langle R \rangle_p \leq \max_{n \geq k(N)+1} e^{c_{18} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2}} \cdot e^{-\frac{n - S_n}{p-1} \times \ln p} \leq \max_{n \geq k(N)+1} e^{c_{19} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p-1}}. \quad (64)$$

Функция $c_{19} \log_p n + c_3 \frac{n}{p^2} - \frac{n}{p-1}$ убывает при

$$n > \frac{c_{19} p^2 (p-1)}{(p^2 - c_3 (p-1)) \ln p},$$

поэтому если

$$k(N) > \frac{c_{19} p^2 (p-1)}{(p^2 - c_3 (p-1)) \ln p}, \quad (65)$$

то максимум в правой части неравенства (64) будет достигнут при $n = k(N)$. Правая часть неравенства (65) представляет собой возрастающую функцию от p при условии, что выполняется неравенство

$$p \left(\frac{\ln p - 1}{\ln p} \right) > 2c_3, \quad (66)$$

поскольку её производная по p равна

$$\frac{c_{19}}{((p^2 - c_3 (p-1)) \ln p)^2} \times (p^4 (\ln p - 1) - 2c_3 p^3 \ln p + (c_3 + 1)p^3 + 4c_3 p^2 \ln p - 2c_3 p^2 - 2c_3 p \ln p + pc_3)$$

и эта величина положительна при условии (66). Так как рассматриваются лишь простые числа $p \leq k(N)$, неравенство (65) выполняется при всех таких p , удовлетворяющих неравенству (66), если

$$k(N) > \frac{c_{19} (k(N))^2 (k(N) - 1)}{((k(N))^2 - c_3 (k(N) - 1)) \ln k(N)}, \quad (67)$$

а неравенство (67), выполняется при $N > c_{20}$. Итак, мы доказали, что

$$\langle R \rangle_p \leq e^{-\frac{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor + 1}{p-1} + c_9 \frac{N}{p^2} + c_{21} \log_p N}.$$

ЛЕММА 13. Если $\text{ord}_{z=0} R(z) \geq m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor$, $|\xi|_p \leq 1$, то $|R(\xi)|_p \leq \langle R \rangle_p |\xi|_p^{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$R(\xi) = \sum_{n=m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}^{\infty} r_n \xi^n \leq \max |r_n \xi^n|_p \leq \langle R \rangle_p |\xi|_p^{m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor}$$

□

Лемма 11 полностью доказана. □

3. Оценки для приближающих форм

ЛЕММА 14. Пусть $N \geq N_0$, совокупность степенных рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ из класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, форма $R_1 = R$ (52) и её коэффициенты $P_{1,i}$ (50) сконструированы по лемме 11, $\xi = p^{\gamma(H)}, T(\xi) \neq 0$.

Пусть линейные формы R_k и их коэффициенты $P_{k,i}$ определены равенствами (37) и (38). Тогда

$$|\overline{P_{k,i}(\xi)}| \leq \prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{10} N \sqrt{\ln N} + c_{22} k + c_{23} N} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{24} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)}, i = 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots \quad (68)$$

для размера $|\overline{P}|$ (т.е. для максимума модулей коэффициентов многочлена и всех их алгебраически сопряжённых) также выполняется (68), и для любого простого числа p , не превосходящего величины $k(N)$ (53) и удовлетворяющего условиям (54) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \langle R_k \rangle_p &\leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{11} \log_p N + c_3 \frac{N}{p^2}} \\ |R_k(\xi)|_p &\leq \left| (m(p+1) - \left\lfloor \frac{p}{\sqrt{\ln p}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{11} + \frac{c_3}{p}} \cdot p^{-\gamma(H)(mN - c_{25} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \end{aligned} \quad (69)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ и выполняются неравенства $|a_n| \leq b_n, n = 0, 1, 2, \dots$, то это принято обозначать так: $\phi(z) \ll \psi(z)$ ([18]). Пусть, как и раньше,

$$\max_{k,i=1,\dots,m} (\deg T(z), \deg T(z)Q_{k,i}(z)) = \sigma. \quad (70)$$

Кроме того, пусть C обозначает наибольшую из абсолютных величин всех сопряжённых в поле $\mathbb{Q}$ с коэффициентами многочленов $T(z), T(z)Q_{k,i}(z)$ чисел. Тогда, ввиду (70), для всех $k, i = 1, \dots, m$

$$T(z) \ll C(1+z)^\sigma, T(z)Q_{k,i}(z) \ll C(1+z)^\sigma \quad (71)$$

Докажем по индукции следующее утверждение:

$$P_{k+1,i}(z) \ll C^k (1+z)^{k\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{26} N \sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots \quad (72)$$

Если верхний предел в произведении меньше, или равен 0, то мы полагаем всё это произведение равным 1.

Из неравенства (51) леммы 11 следует неравенство

$$P_{1,i}(z) \ll (1+z)^N e^{N \ln N + c_{27} N \sqrt{\ln N}}, i = 1, \dots, m, \quad (73)$$

так что доказываемое утверждение выполняется при $k = 0$.

Согласно (38),

$$P_{k+1,i}(z) = T(z) \left(P'_{k,i}(z) + \sum_{j=1}^m P_{k,j}(z) Q_{j,i}(z) \right), i = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots \quad (74)$$

Из (50), (71) и (74) при $k \leq m + t$ следует неравенство

$$\deg P_{k,i}(z) \leq N + c_{28} N \sqrt{\ln N} \quad (75)$$

Ввиду неравенства (71) и индуктивного предположения

$$P'_{k,i}(z) << ((k-1)\sigma + N)C^{k-1}(1+z)^{(k-1)\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-2} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{28} N \sqrt{\ln N}}, \quad (76)$$

$$i = 1, \dots, m, k = 1, 2, \dots$$

Кроме того, по индуктивному предположению и ввиду (71),

$$T(z) \sum_{j=1}^m P_{k,j} Q_{j,i} << C(1+z)^\sigma C^{k-1}(1+z)^{(k-1)\sigma+N} \prod_{n=0}^{k-2} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{29} N \sqrt{\ln N}} \quad (77)$$

Из (73), (74), (76), (77) получаем доказываемое соотношение (72).

Из (77) и (75) получаем неравенство (68).

Перейдём к оценке $|R_k(\xi)|_p$. Докажем, что $\langle R_k \rangle_p |\xi|_p \leq \langle R_1 \rangle_p$. Действительно, по построению (37)

$$R_k = T R'_{k-1}, k = 2, 3, \dots$$

По лемме 1, учитывая, что многочлен $T(z)$ имеет целые коэффициенты из поля $\mathbb{Q}$,

$$\langle R_k \rangle_p \leq \langle T \rangle_p \langle R'_{k-1} \rangle_p \leq \langle R'_{k-1} \rangle_p \leq \langle R_{k-1} \rangle_p, k = 2, 3, \dots \quad (78)$$

Из (78) сразу следует, что

$$\langle R_k \rangle_p \leq \langle R_1 \rangle_p, k = 2, 3, \dots \quad (79)$$

Согласно (55) леммы 11, из (79) следует:

$$\langle R_k \rangle_p \leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p e^{c_{30} \log_p N + c_{31} \frac{N}{p^2}}$$

Снова по лемме 11, из неравенства (56) получаем по лемме 13 искомое неравенство (69). $\square$

Из лемм 10 и 14 непосредственно следует такая лемма.

ЛЕММА 15. Пусть $N \geq N_0$, совокупность степенных рядов $f_1(z), \dots, f_m(z)$ из класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$ составляет формальное решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (18) и линейно независима над $\mathbb{C}(z)$, $\xi = p^{\gamma(H)}$, $T(\xi) \neq 0$.

Тогда при любом $N \geq N_0$, где N_0 определено равенством (43), существует совокупность m линейно независимых линейных форм вида

$$L_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m h_{k,i} y_i, k = 1, \dots, m, \quad (80)$$

где $h_{k,i} \in \mathbb{Z}$, $i, k = 1, \dots, m$, причём

$$|\overline{h_{k,i}}| \leq e^{N \ln N + c_{32} N \sqrt{\ln N}} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{33} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \quad (81)$$

и для любого простого числа p , не превосходящего величины $k(N)$ (53) такого, что выполнены условия (54) справедливы неравенства

$$|L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_p \leq \left| (m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor)! \right|_p \cdot e^{c_{34} \log_p N + c_{35} \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \quad (82)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть N – любое число, удовлетворяющее условиям леммы, а форма $R_1(z)$ (52) сконструированна по лемме 11. Рассмотрим формы $R_k(z)$, $k = 2, 3, \dots$. По лемме 10 матрица (49) имеет ранг m над полем $\mathbb{Q}$. Значит, среди её строк с номерами $1, 2, \dots, m + t$ есть m линейно независимых над $\mathbb{Q}$. Пусть эти строки имеют номера $w_1, \dots, w_m$. Рассмотрим линейные формы

$$R_{w_j} = \sum_{i=1}^m P_{w_j,i}(\xi) y_i, j = 1, \dots, m. \quad (83)$$

Степени многочленов $P_{w_j,i}(z)$ ввиду (75), не превосходят величины $N + \sigma(m + t - 1)$. Поэтому число $P_{w_j,i}(\xi) \in \mathbb{Z}$. Обозначим, учитывая (80) и (83),

$$L_k(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m a_{k,i} y_i = R_{w_k} = \sum_{i=1}^m P_{w_k}(\xi) y_i, k = 1, \dots, m.$$

Тогда по лемме 14,

$$|\overline{h_{k,i}}| \leq \prod_{n=0}^{m+t-1} (n\sigma + m + N) e^{N \ln N + c_{36} N \sqrt{\ln N} + c_{37} k + c_{38} N} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{39} \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)}, i, k = 1, \dots, m. \quad (84)$$

Так как $t = \left\lceil \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rceil$,

$$\prod_{n=0}^{m+t-1} (n\sigma + m + N) \leq ((m + t - 1)\sigma + m + N)^{m+t-1} \leq e^{c_{40} N \sqrt{\ln N}}. \quad (85)$$

Из (84) и (85) следует доказываемое неравенство (81). Далее

$$\begin{aligned} |L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))|_p &= |R_{w_k}(\xi)|_p \leq \\ &\leq |(m(N + 1) - \lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \rfloor)|_p \cdot e^{c_{41} \log_p N + c_{42} \frac{N}{p^2}} \cdot p^{-\gamma(H)(m(N+1) - \lfloor \frac{N}{\ln N} \rfloor)} \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (82), а с ним и лемма 15, доказаны. $\square$

Рассмотрим линейную форму

$$L(y_1, \dots, y_m) = h_1 y_1 + \dots + h_m y_m, h_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m,$$

где не все $h_i = 0$, $|\overline{h_i}| \leq H$.

По лемме 15 существует совокупность линейно независимых над полем $\mathbb{Q}$ форм

$$L_1(y_1, \dots, y_m), \dots, L_m(y_1, \dots, y_m).$$

Среди этих форм имеется $m - 1$ форм, линейно независимых с формой $L(y_1, \dots, y_m)$. Без потери общности будем считать что линейно независимы формы

$$L(y_1, \dots, y_m), L_2(y_1, \dots, y_m), \dots, L_m(y_1, \dots, y_m).$$

Это означает, что определитель

$$\begin{vmatrix} h_1 & \dots & h_m \\ h_{2,1} & \dots & h_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{m,1} & \dots & h_{m,m} \end{vmatrix} \quad (86)$$

отличен от 0. Определитель (86) представляет собой целое число из поля $\mathbb{Q}$. В каждом поле $\mathbb{Q}_p$, где p – простое число, удовлетворяющее условию (54) и неравенству

$$p \leq m(N+1) - \left\lfloor \frac{N}{\sqrt{\ln N}} \right\rfloor = k(N), \quad (87)$$

умножим первый столбец определителя (86) на 1, второй столбец на $f_2(\xi)$, и так далее, столбец с номером m на $f_m(\xi)$ и прибавим к первому столбцу полученные остальные. Поскольку первый столбец умножили на 1, определитель не изменился.

Обозначим

$$L(\xi) = L(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), \quad L_k(\xi) = L_k(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi)), \quad k = 2, \dots, m.$$

Тогда в первом столбце преобразованного определителя как раз и стоят, соответственно, $L(\xi), L_2(\xi), \dots, L_m(\xi)$, представляющие собой элементы рассматриваемого поля $\mathbb{Q}_p$. Иными словами, в каждом поле $\mathbb{Q}_p$, p – простое число, удовлетворяющее (54) и (87), имеет место равенство

$$\Delta = \begin{vmatrix} L(\xi) & h_2 & \cdots & h_m \\ L_2(\xi) & h_{2,2} & \cdots & h_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_m(\xi) & h_{m,2} & \cdots & h_{m,m} \end{vmatrix} \quad (88)$$

Обозначим $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, m$ алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя Δ . Тогда равенство (88) можно записать в виде

$$\Delta = L(\xi)\Delta_1 + \sum_{i=2}^m L_i(\xi)\Delta_i. \quad (89)$$

Если $L(\xi) = 0$ в рассматриваемом поле $\mathbb{Q}_p$, то

$$\Delta = \sum_{i=2}^m L_i(\xi)\Delta_i.$$

По доказанному выше, Δ – отличное от 0 целое число. Поэтому $|\Delta|_p \geq \frac{1}{|\Delta|}$ так как

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} h_1 & \cdots & h_m \\ h_{2,1} & \cdots & h_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{m,1} & \cdots & h_{m,m} \end{vmatrix} \leq m!H(\max R_{i,j})^{m-1} \leq \\ &\leq m!H(e^{N \ln N + c_{43}N\sqrt{\ln N}} \cdot p^{\gamma(H)(N + c_{44}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})})^{m-1} \end{aligned}$$

поэтому

$$|\Delta|_p \geq e^{-\ln H - (m-1)(N \ln N + c_{45}N\sqrt{\ln N}) - \gamma(H) \ln p(m-1)(N + c_{46}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} \quad (90)$$

С другой стороны,

$$\left| \sum_{j=2}^m L_j(\xi)\Delta_j \right|_p \leq p^{-\gamma(H)(mN - c_{47}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} = e^{-\gamma(H) \ln p(mN - c_{48}\frac{N}{\sqrt{\ln N}})} \quad (91)$$

Для того, чтобы (90) и (91) давали противоречие с предположением о том, что $L(\xi) = 0$ в $\mathbb{Q}_p$ требуется, чтобы

$$\begin{aligned} -\gamma(H) \ln p(mN - c_{49} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) < \\ < -\gamma(H) \ln p((m-1)N + c_{50} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) - \ln H - (m-1)N \ln N - c_{51}N\sqrt{\ln N} \end{aligned}$$

или

$$\gamma(H) \ln p(N - c_{52} \frac{N}{\sqrt{\ln N}}) > \ln H + (m-1)N \ln N + c_{53}N\sqrt{\ln N}$$

или

$$N \ln N \left(\frac{\gamma(H) \ln p}{\ln N} - (m-1) - c_{54} \frac{\gamma(H) \ln p}{(\ln N)^{3/2}} - \frac{c_{55}}{\sqrt{\ln N}} \right) > \ln H \quad (92)$$

Пусть N и $\gamma(H)$ таковы, что $N \geq N_1$ и $\frac{\gamma(H) \ln p}{\ln N} \geq m$ тогда из неравенств (92) следует, что $N \ln N > \ln H$.

Пусть $H \geq H_0$, и пусть N выбрано так, что

$$N \ln N \geq \ln H \geq (N-1) \ln(N-1).$$

Тогда $\ln N \sim \ln \ln H$, $H \rightarrow +\infty$ поэтому при достаточно большом значении H , $H \geq H_0$ если $\gamma(H) > \frac{m \ln \ln H}{\ln p}$, то (90) и (91) противоречивы.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Рассмотрим произвольный отличный от тождественного нуля многочлен $P(y_1, \dots, y_m)$ степени K по совокупности переменных $y_1, \dots, y_m$. Предположим, что коэффициенты этого многочлена – целые алгебраические числа из поля $\mathbb{Q}$, причём наибольшая из абсолютных величин этих коэффициентов, а также их алгебраических сопряжённых не превосходит H .

ЛЕММА 16. *Если ряды $f_1(z), \dots, f_m(z)$ удовлетворяют системе линейных (вообще говоря, неоднородных) дифференциальных уравнений*

$$y'_i = Q_{i,0} + \sum_{j=0}^m Q_{i,j} y_j, \quad (93)$$

где $Q_{i,0}, Q_{i,j} \in \mathbb{Q}(z)$, $T = T(z) \in \mathbb{Z}[z]$, $TQ_{i,j} \in \mathbb{Z}[z]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 0, \dots, m$, то ряды

$$\phi_{k_1, \dots, k_m} = f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z), k_i \geq 0, i = 1, \dots, m, k_1 + \dots + k_m \leq K,$$

удовлетворяют системе из $\binom{m+K}{m}$ линейных однородных дифференциальных уравнений вида

$$\phi'_{k_1, \dots, k_m} = \sum Q_{l_1, \dots, l_m}^* \phi_{l_1, \dots, l_m}, \quad (94)$$

где суммирование производится по всевозможным наборам неотрицательных целых чисел $l_1, \dots, l_m$ таким, что $l_1 + \dots + l_m \leq K$, а $Q_{l_1, \dots, l_m}^* \in \mathbb{Q}(z)$, причём $Q_{l_1, \dots, l_m}^*$ являются линейными комбинациями с коэффициентами из $\mathbb{Z}$ коэффициентов исходной системы дифференциальных уравнений и, следовательно, $TQ_{l_1, \dots, l_m}^* \in \mathbb{Z}[z]$ для любого набора неотрицательных целых чисел $l_1, \dots, l_m$ такого, что $l_1 + \dots + l_m \leq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим формальную производную от ряда $f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z)$:

$$(f_1^{k_1}, \dots, f_m^{k_m})' = \sum_{i=1}^m k_i f_1^{k_1} \dots f_{i-1}^{k_{i-1}} f_i^{k_i-1} f_{i+1}^{k_{i+1}} \dots f_m^{k_m} f_i' \quad (95)$$

Система (94) получается, если в правой части каждого уравнения (95) заменить f_i' , $i = 1, \dots, m$ правой частью соответствующего уравнения (93), в которое вместо y_i подставлено $f_i(z)$, $i = 1, \dots, m$. $\square$

ЛЕММА 17. Пусть $f_1(z), \dots, f_m(z)$ – ряды из класса $F(\mathbb{Q}, c_1, c_2, c_3, q)$. Тогда произведения степеней этих рядов вида

$$f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z), \quad k_1 + \dots + k_m \leq K \quad (96)$$

принадлежат классу $F(\mathbb{Q}, c_1^*, c_2^*, c_3^*, q^*)$ где

$$c_1^* \leq c_1 + \ln 2, \quad c_2^* \leq \max(c_2, 1), \quad c_3^* \leq (c_3 + 1)K, \quad q^* = q^{1 + [\ln K]}. \quad (97)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим ряды (96) в виде

$$f_1^{k_1}(z), \dots, f_m^{k_m}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n.$$

Произведение в левой части этого равенства рассматриваем, как произведение $s \leq K$ сомножителей, среди которых могут быть и равные. Коэффициент при z^n сомножителя с номером i будем обозначать $a_{i,n}n!$. Тогда

$$a_n = \sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!} a_{1,n_1} \dots a_{s,n_s}, \quad (98)$$

где суммирование в правой части равенства (98) производится по всем наборам $n_1, \dots, n_s$ неотрицательных целых чисел таким, что $n_1 + \dots + n_s = n$. Имеет место оценка

$$|\overline{a_{1,n_1}}, \dots, a_{s,n_s}| = O(e^{c_{56}(n_1 + \dots + n_s)}) = O(e^{c_{57}n}), \quad n_1 + \dots + n_s = n \rightarrow \infty.$$

Величина $\sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!}$ допускает оценку

$$\sum \frac{n_1! \dots n_s!}{n!} \leq \sum 1 = \frac{(n + s - 1)!}{n!(s - 1)!} \leq 2^{n+s-1} \leq 2^{n+K},$$

где суммирование производится по всем наборам $n_1, \dots, n_s$ неотрицательных целых чисел таким, что $n_1 + \dots + n_s = n$. Использована также формула $\frac{(n+s-1)!}{n!(s-1)!}$ для числа решений уравнения $n_1 + \dots + n_s = n$ в неотрицательных целых числах и известная оценка сверху для биномиального коэффициента. Таким образом,

$$|\overline{a_n}| = 2^{n+K} O(e^{c_{58}n}) = O(e^{(c_{59} + \ln 2)n}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (99)$$

Расположим при каждом n и каждом наборе $n_1, \dots, n_s$ неотрицательных целых чисел таких, что $n_1 + \dots + n_s = n$ эти числа в порядке не возрастания, и обозначим получившиеся номера $l_1, \dots, l_s$, т.е. $n_{l_1} \geq n_{l_2} \geq \dots \geq n_{l_s}$. Тогда верны неравенства

$$n_{l_1} \leq n, n_{l_2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots, n_{l_s} \leq \left\lfloor \frac{n}{s} \right\rfloor.$$

Рассмотрим Ξ_n – наименьший общий знаменатель чисел $\frac{n_1! \dots n_s!}{n^*!}$, $n_1 + \dots + n_s = n^*$, $n^* \leq n$. Он делится только на простые числа p , не превосходящие n . Кроме того, для любого такого простого числа p , согласно (9) и (10),

$$\text{ord}_p\left(\frac{n_1! \dots n_s!}{n^*!}\right) = \frac{n_1 - S_{n_1} + \dots + n_s - S_{n_s} - n^* + S_{n^*}}{p - 1} = \frac{S_{n^*} - S_{n_1} \dots - S_{n_s}}{p - 1} \geq -s \log_p n.$$

Значит,

$$\text{ord}_p \Xi_n \leq s \log_p n \leq K \log_p n.$$

Из приведённых выше рассуждений следует, что

$$q^{n+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor} d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n a_n \in \mathbb{Z}, \quad (100)$$

причём число $d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n$ делится только на простые числа p , не превосходящие

$$\max(c_2, 1)n \quad (101)$$

$$\begin{aligned} \text{ord}_p d_{0,n} d_{0,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \dots d_{0,\lfloor \frac{n}{s} \rfloor} \Xi_n &\leq \\ &\leq c_{60} (\log_p n + \log_p \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \log_p \lfloor \frac{n}{s} \rfloor) + \frac{n}{p^2} + \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{p^2} + \dots + \frac{\lfloor \frac{n}{s} \rfloor}{p^2} + K \log_p n \leq \\ &\leq K(c_{61} + 1) (\log_p n + \frac{n}{p^2}). \end{aligned} \quad (102)$$

Если положить

$$q^* = q^{1+\lfloor \ln K \rfloor}, \quad (103)$$

то ввиду очевидного неравенства $n(1 + \lfloor \ln K \rfloor) \geq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{K} \rfloor \geq n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor$ число $q^{n+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \dots + \lfloor \frac{n}{s} \rfloor}$ делит число $(q^*)^n$.

Из (99) – (103) следует, что ряды (97) входят в класс $F(\mathbb{Q}, c_1^*, c_2^*, c_3^*, q^*)$, параметры которого удовлетворяют условиям (97). $\square$

Леммы 16 и 17 показывают, что рассматриваемые ряды

$$f_1^{k_1}(z) \dots f_m^{k_m}(z), \quad k_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad k_1 + \dots + k_m \leq K,$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 1 при любом натуральном K . Применяя эту теорему, получаем утверждение теоремы 2.

4. Заключение

Полученные результаты будут применяться к обобщенным гипергеометрическим F – рядам.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коблиц Н. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции // М. Мир. 1982.
2. Чебышев П. Л. Избранные математические труды // ГИТТИ. 1946.
3. Чирский В. Г. Арифметические свойства обобщённых гипергеометрических F – рядов // Доклады Академии наук. Наука (М.). 2018. т. 483, №3, с.257-259.
4. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Доклады Академии наук, математика. Наука (М). 2014. т. 439, №6. с. 677-679.
5. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических рядов с периодическими коэффициентами // Известия РАН. Серия математическая. 2017. т. 81, выпуск 2. с. 215-232.
6. Чирский В. Г. Арифметические свойства полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2015. т. 16, №1. с. 254-264.
7. Чирский В. Г. Линейная независимость p – адических значений некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Фунд. и прикл. матем. 1999. т. 5, №2. с. 619–625.

8. Чирский В. Г. О глобальных соотношениях // Мат. заметки. 1990. т. 48, №2. с. 123-127.
9. Чирский В. Г. О преобразованиях периодических последовательностей // Чебышевский сборник. 2016. т. 17, №3. с. 180-185.
10. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах обобщённых гипергеометрических рядов с иррациональными параметрами // Известия РАН. Серия математическая. 2014. т. 78, №6. с. 193-210.
11. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах ряда Эйлера // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. Изд-во Моск. университета (М). 2015. №1. с. 59-61.
12. Чирский В. Г. Оценки линейных форм и многочленов от совокупностей полиадических чисел // Чебышевский сборник. 2011. т. 12, № 4. с. 129-133.
13. Чирский В. Г. Периодические и непериодические конечные последовательности // Чебышевский сборник, 18:2, 2017. с. 275–278.
14. Чирский В. Г. Приближения Эрмита – Паде для некоторых q – базисных гипергеометрических рядов // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика. 2000. №2. с. 7–11.
15. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О некоторых свойствах полиадических разложений // Чебышевский сборник. 2013. т. 14, вып. 2. с. 164-172.
16. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2013. т. 14, вып. 1. с. 92-101.
17. Чирский В. Г., Матвеев В. Ю. О представлении натуральных чисел // Вестник МГУ. Серия 1 Математика. Механика. 2013. №6. с. 57-59.
18. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа // М. Наука. 1987.
19. André Y. Séries Gevrey de type arithmétique. // Inst. Math., Jussieu.
20. Bertrand D., Chirskii V. G., Yebbou Y. Effective estimates for global relations on Euler-type series // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 2004. Vol. XIII, №2. pp. 241-260.
21. Chirskii V. G. Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2020. Vol. 27, №2, pp. 175-184.
22. Chirskii V. G. Product formula, global relations and polyadic integers Russian Journal of Mathematical Physics, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). 2019. Vol. 26, №3, pp. 286-305.
23. Matala-Aho T., Zudilin W. Euler factorial series and global relations. // J. Number Theory. 2018. 186, pp.202–210.

REFERENCES

1. André, Y. “Séries Gevrey de type arithmétique“, Inst. Math., Jussieu.
2. Bertrand, D., Chirskii, V. G. & Yebbou, Y. 2004. “Effective estimates for global relations on Euler-type series“, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, Vol. XIII, №2. pp. 241-260.
3. Cheby’shev, P. L. 1946, “Izbranny’e matematicheskie trudy“[Selected Mathematical Works], GITTI.
4. Chirskii, V. G. 2020, “Arithmetic properties of Generalized Hypergeometric Series“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol 27, №2, pp. 175-184.
5. Chirskii, V. G. 2019, “Product formula, global relations and polyadic integers“, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 26, №3, pp. 286-305.
6. Chirskii, V. G. 2018, “Arithmetic properties of generalized hypergeometric F -series“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation). Vol. 98, №3. pp.589-591.
7. Chirskii, V.,G. 2017, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States), Vol. 81,№2. pp. 444-461.
8. Chirskii,V. G. 2017, “Periodicity and non-periodicity of finite sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, 18:2, pp.275–278.
9. Chirskii, V. G. 2016, “On transformations of periodic sequences“, *Chebyshevskii Sb.*, 17:3, pp.191–196.
10. Chirskii, V.,G. 2015, “Arithmetic properties of Euler series“, *Moscow University Mathematics Bulletin*, Allerton Press Inc.(United States), Vol. 70, №1, pp.41-43.
11. Chirskii, V. G. 2015, “Arithmetic properties of polyadic integers“, *Chebyshevskii Sb.*, 16:1, pp.254–264.
12. Chirskii, V. G. 2014, “On the arithmetic properties of generalized hypergeometric series with irrational parameters“, *Izvestiya Mathematics*, American Mathematical Society (United States). Vol. 78, №6. pp. 1244-1260.
13. Chirskii, V. G. 2014, “Arithmetic properties of polyadic series with periodic coefficients“, *Doklady Mathematics*, Maik Nauka/Interperiodica Publishing (Russian Federation), Vol. 90, №3, pp. 766-768.
14. Chirskii, V. G. 2011, “Estimates of linear forms and polynomials in polyadic numbers“, *Chebyshevskii Sb.*, 12:4, pp.129–133.
15. Chirskii,V. G. 2000, “Hermite–Padè approximants for some q -basic hypergeometric series“, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2000, no. 2, pp.7–11.
16. Chirskii, V. G. 1999, “Linear independence of the p – adic values of certain q – basic hypergeometric series“, *Fundam. Prikl. Mat.*, 5:2 , pp.619–625.

17. Chirskii, V. G. 1990, “Global relations”, *Mat. Zametki*, 48:2, 123–127; *Math. Notes*, 48:2 (1990), pp.795–798.
18. Chirskii, V. G. & Matveev, V. G. 2013, “On certain properties of polyadic expansions”, *Chebyshevskii Sb.* 14:2, pp.164–172. (Russian)
19. Chirskii, V. G. & Matveev, V. Y. 2013, “On representations of positive integers”, *Chebyshevskii Sb.* 14:1, pp.75–85. (Russian)
20. Chirskii, V. G. & Matveev, V. Yu. 2013, “Representations of positive integers”, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 68:6, pp.307–308
21. Koblitz, N. 1977. “ p -adic numbers, p -adic analysis and zeta-functions“ Grad.texts Math.58.– Berlin: Springer.
22. Matala-Aho T. & Zudilin W. 2018, “Euler factorial series and global relations“, *J. Number Theory*, 186, pp.202-210.
23. Shidlovskii, A. B. 1989, “Transcendental numbers“ [Transtsendentnye chisla] / Andrei Borisovich Shidlovskii; translated from the Russian by Neal Koblitz.

Получено 29.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.