

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

### Том 21. Выпуск 3.

УДК 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-129-141

### Математическая модель цифровой системы управления с контроллерами фон Неймановского типа сложными многоконтурными объектами<sup>1</sup>

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Т. А. Акименко, И. Н. Лариошкин

**Евгений Васильевич Ларкин** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: elarkin@mail.ru*

**Александр Николаевич Привалов** — доктор технических наук, профессор, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула).

*e-mail: privalov.61@mail.ru*

**Татьяна Алексеевна Акименко** — кандидат технических наук, доцент, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Иван Николаевич Лариошкин** — аспирант, Тульский государственный университет (г. Тула).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

#### Аннотация

В работе построена математическая модель цифрового управления многоконтурными объектами, учитывающая реальные характеристики цифрового контроллера, как элемента системы управления. Сформулирована проблема, заключающаяся в том, что методы моделирования цифровых систем управления известны и широко применяются в практике инженерной деятельности, однако в подавляющем большинстве они предполагают формирование моделей, не учитывающих наличие временных интервалов между транзакциями в ЭВМ фон Неймановского типа.

Для решения задачи разработана типовая структурная схема сложных многоконтурных систем управления с цифровыми контроллерами фон Неймановского типа, которая учитывает случайный характер обрабатываемых данных и реальные временные задержки между транзакциями.

Предложено с учетом случайности временного интервала между транзакциями и стохастического характера переключения в сопряженные операторы считать адекватной моделью алгоритма функционирования цифровых систем управления считать полумарковский процесс.

На основе полумарковских процессов предложен метод оценки параметров временных интервалов между транзакциями в циклических алгоритмах управления, который позволяет оценить характеристики системы на этапе ее проектирования, а следовательно является ключом к рациональному проектированию цифровых систем управления многоконтурными объектами с алгоритмами управления практически любой сложности. Представлен пример математического моделирования двухконтурной системы с цифровым управлением.

**Ключевые слова:** полумарковский процесс, время блуждания, цифровая система управления, контроллер, алгоритм управления цифровой системой управления, транзакция.

**Библиография:** 21 название.

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ по проекту 19-47-710004\_p\_a.

**Для цитирования:**

Е. В. Ларкин, А. Н. Привалов, Т. А. Акименко, И. Н. Лариошкин. Математическая модель цифровой системы управления с контроллерами фон Неймановского типа сложными многоконтурными объектами // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 129–141.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 3.

UDC 519.217.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-129-141

**Mathematical model of a digital control system with background controllers of the Neuman type for complex multicirculated objects**

E. V. Larkin, A. N. Privalov, T. A. Akimenko, I. N. Larioshkin

**Evgenii Vasil'evich Larkin** — Doctor of technical sciences, Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: elarkin@mail.ru*

**Alexander Nikolaevich Privalov** — Doctor of technical sciences, Professor, Tula State Pedagogical University (Tula).

*e-mail: privalov.61@mail.ru*

**Tatyana Alekseevna Akimenko** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Tula State University (Tula).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Ivan Nikolaevich Larioshkin** — postgraduate student, Tula State University (Tula).

*e-mail: tantan72@mail.ru*

**Abstract**

In the work, a mathematical model of digital control of multi-circuit objects is built, taking into account the real characteristics of a digital controller as an element of a control system. The problem is formulated that the methods of modeling digital control systems are known and are widely used in engineering practice, however, in the overwhelming majority, they involve the formation of models that do not take into account the presence of time intervals between transactions in a Von Neumann type computer.

To solve the problem, a typical block diagram of complex multi-loop control systems with digital controllers of the Von Neumann type has been developed, which takes into account the random nature of the processed data and real time delays between transactions.

It is proposed, taking into account the randomness of the time interval between transactions and the stochastic nature of switching to conjugate operators, to consider a semi-Markov process as an adequate model of the algorithm for the functioning of digital control systems.

On the basis of semi-Markov processes, a method is proposed for estimating the parameters of time intervals between transactions in cyclic control algorithms, which makes it possible to evaluate the characteristics of the system at the design stage, and therefore is the key to the rational design of digital control systems for multi-circuit objects with control algorithms of almost any complexity. An example of mathematical modeling of a two-circuit system with digital control is presented.

**Keywords:** semi-Markov process, wandering time, digital control system, controller, digital control system control algorithm, transaction.

**Bibliography:** 21 titles.

**For citation:**

E. V. Larkin, A. N. Privalov, T. A. Akimenko, I. N. Larioshkin, 2020, "Mathematical model of a digital control system with background controllers of the Neuman type for complex multicirculated objects", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 129–141.

## 1. Введение

Основной тенденцией развития современной промышленности является усложнение технологических процессов и связанное с этим широкое внедрение цифровой управляющей техники систем управления для обеспечения требуемых показателей качества производимой продукции [1, 2]. Переход при управлении объектами на цифровые системы связан с включением в их структуру контроллеров фон Неймановского типа, т.е. приборов, которые обладают новыми, по сравнению с аналоговыми контроллерами, свойствами [3, 4, 5]. Свойства обусловлены последовательной интерпретацией операторов алгоритма управления, развивающейся в реальном физическом времени, за счет чего управляющая ЭВМ, кроме того, что алгоритмически реализует заданный закон управления, вносит временные задержки в процесс управления, в связи с чем, временной фактор напрямую влияет на качественные характеристики системы в целом. Алгоритм обрабатывает случайные данные, формируемые на выходах сенсоров, и содержит операторы принятия решения в местах ветвления, поэтому в результате его интерпретации генерируются случайные временные интервалы между транзакциями, как при вводе-выводе данных (перекос данных), так и при расчете управляющего воздействия (чистое запаздывание) [5, 6, 7]. В то же время промышленные, военные и иные системы при переходе на цифровые технологии должны обеспечивать требуемую точность функционирования в широких диапазонах изменений параметров объекта управления, независимо от случайных временных задержек в контурах управления [8, 9, 10]. Поэтому возникает научная проблема создания моделей управления сложными объектами, учитывающих реальные физические характеристики управляющих ЭВМ, которые могли бы быть положены в основу методологии синтеза цифровых регуляторов.

Методы моделирования цифровых систем управления известны [11, 12, 13] и широко применяются в практике инженерной деятельности, однако в подавляющем большинстве они предполагают формирование моделей, не учитывающих наличие временных интервалов между транзакциями в ЭВМ фон Неймановского типа. Это, в свою очередь, неоправданно увеличивает сроки и объемы экспериментальных исследований при отработке систем управления и, в частности, приводит к необходимости дополнительных экспериментальных исследований систем при переводе отработанных алгоритмов управления на другую элементную базу, например на контроллеры с другим быстродействием, или контроллеры с другой системой команд.

Учет временного фактора при проектировании цифровых систем управления развит недостаточно, что обуславливает необходимость и актуальность исследований в данной области.

## 2. Структура цифровой системы

Структурная схема цифровой системы управления приведена на рис. 1. Блоки структурной схемы  $\Phi_{11}(s), \dots, \Phi_{kl}(s), \dots, \Phi_{KK}(s)$  описывают динамические процессы, протекающие в объекте управления, через передаточные функции. Перекрестные межблочные связи, когда  $k \neq l$ , отражают реальное взаимовлияние контуров в объекте. Блоки  $\Phi_{01}(s), \dots, \Phi_{0k}(s), \dots, \Phi_{0K}(s)$  описывают динамику сенсоров системы.

Система функционирует следующим образом. В цифровой контроллер (Digital controller) вводится вектор сигналов  $F(s) = [F_1(s), \dots, F_k(s), \dots, F_K(s)]$ , формирующих цель управления. Указанные сигналы могут также генерироваться самим контроллером, что показано на рис. 1 жирной штриховой линией. На выходах контроллера программно генерируются последовательности кодов  $\varepsilon(s) = [\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s), \dots, \varepsilon_K(s)]$ , подаваемые на входы объекта управления, который на физическом уровне преобразует сигналы вектора  $\varepsilon(s)$  в вектор параметров  $X(s) = [X_1(s), \dots, X_k(s), \dots, X_K(s)]$ , описывающих состояние объ-

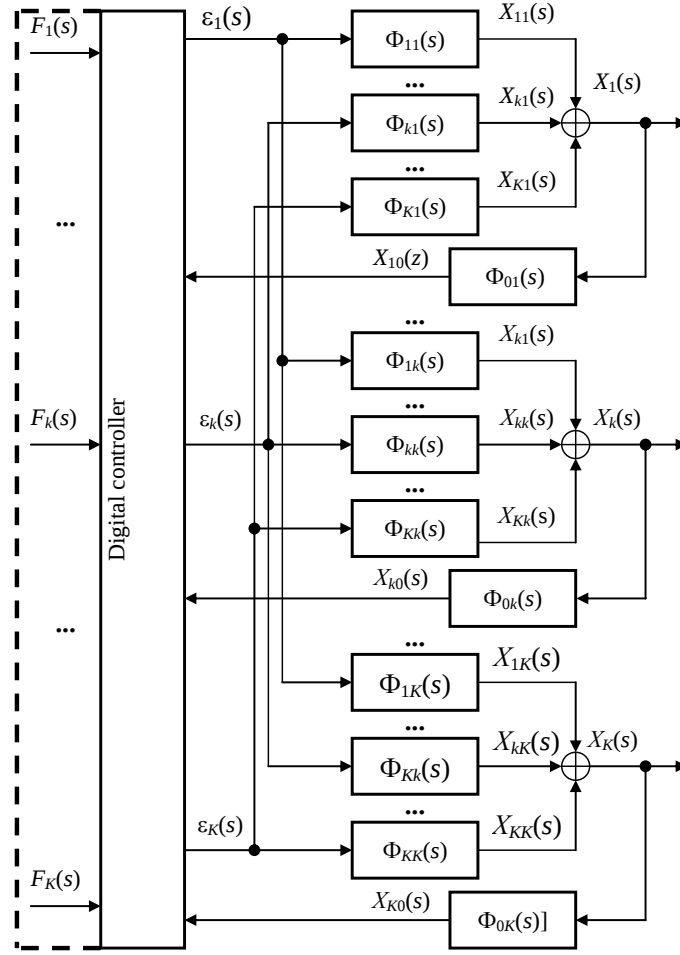


Рис. 1: Структурная схема цифровой системы управления.

екта. Параметры измеряются сенсорами, и результаты измерения в виде цифровых кодов  $X_0(s) = [X_{01}(s), \dots, X_{0k}(s), \dots, X_{0K}(s)]$  вводятся в контроллер. Во всех вышеприведенных векторах  $s$  — оператор дифференцирования преобразования Лапласа [8, 14].

Выходная последовательность кодов генерируется в соответствии с законом управления и циклограммой, заложенной в алгоритмическое и программное обеспечение контроллера. В дальнейшем будем считать, что временные интервалы в циклограмме отсчитываются от момента ввода первого элемента вектора  $F(s)$ ,  $F_1(s)$ . Остальные элементы вводятся/выводятся с задержками по времени обозначенными следующим образом:

элемент  $F_k(s)$  вводится с задержкой  $\tau_{fk}$ ,  $\tau_{f0} = 0$ ,  $1 \leq k \leq K$ ;

элемент  $X_{0k}(s)$  вводится с задержкой  $\tau_{0k}$ ,  $1 \leq k \leq K$ ;

элемент  $\varepsilon_k(s)$  выводится с задержкой  $\tau_{\varepsilon k}$ ,  $1 \leq k \leq K$ .

В соответствии с теоремой о смещении во временной области [14]

$$L[\varphi(t - \tau)] = \exp(-\tau s) \Phi(s), \quad \tau > 0, \quad (1)$$

где  $\tau$  — величина смещения;  $t$  — время;  $\varphi$  — импульсный отклик;  $L[\dots]$  — прямое преобразование Лапласа.

Из (1) следует, что

$$F_{sh}(s) = F(s) \cdot N_f(s); \quad (2)$$

$$X_{sh}(s) = X_0(s) \cdot N_0(s); \quad (3)$$

$$\varepsilon_{sh}(s) = \varepsilon(s) \cdot N_\varepsilon(s), \quad (4)$$

где  $N_f(s)$ ,  $N_0(s)$ ,  $N_\varepsilon(s)$  — матрицы смещений, равные

$$N_f(s) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{fk}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{fK}s) \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$N_0(s) = \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{01}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{0k}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{0K}s) \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$$N_\varepsilon(s) = \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{\varepsilon 1}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp(-\tau_{\varepsilon k}s) & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp(-\tau_{\varepsilon K}s) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В том случае, если цифровой контроллер реализует линейный закон управления  $\Phi_c(s)$ , на исполнительные приводы поступает сигнал

$$\varepsilon(s) = [F(s) \cdot N_f(s) - X(s) \cdot \Phi_0(s) \cdot N_0(s)] \cdot \Phi_c(s) \cdot N_\varepsilon(s), \quad (8)$$

где  $\Phi_c(s) = [\Phi_{ckl}(s)]$ ,  $1 \leq k, l \leq K$  — матрица линейных передаточных функций, реализуемых в цифровом контроллере.

Вектор  $X(s)$  определяется как

$$X(s) = \varepsilon(s) \cdot \Phi(s) = [F(s) \cdot N_f(s) - X(s) \cdot \Phi_0(s) \cdot N_0(s)] \cdot \Phi_c(s) \cdot N_\varepsilon(s) \cdot \Phi(s), \quad (9)$$

где  $\Phi(s) = [\Phi_{kl}(s)]$ ,  $1 \leq k, l \leq K$  — матрица линейных передаточных функций, реализуемых в объекте управления.

Разрешение (9) относительно  $X(s)$  дает

$$X(s) = [E - \Phi_0(s) \cdot \Phi_c(s) \cdot N_{0\varepsilon}(s)]^{-1} F(s) \cdot \Phi_c(s) \cdot N_{f\varepsilon}(s) \cdot \Phi(s) \quad (10)$$

где  $E$  — единичная диагональная матрица;

$$\begin{aligned} N_{f\varepsilon}(s) &= N_f(s) \cdot N_\varepsilon(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp(-\tau_{\varepsilon 1}s) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp[-(\tau_{fk} + \tau_{\varepsilon k})s] & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp[-(\tau_{fL} + \tau_{\varepsilon K})s] \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N_{0\varepsilon}(s) &= N_0(s) \cdot N_\varepsilon(s) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp[-(\tau_{01} + \tau_{\varepsilon 1})s] & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \exp[-(\tau_{0k} + \tau_{\varepsilon k})s] & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \exp[-(\tau_{0K} + \tau_{\varepsilon K})s] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Члены, характеризующие чистое запаздывание, появляются как в числителе,  $N_{f\varepsilon}(s)$ , так и в знаменателе,  $N_{0\varepsilon}(s)$ , (10). Запаздывание в числителе определяет т.н. «перекося данных» (data screw) и общее запаздывание выполнения объектом внешних команд. Запаздывание в знаменателе изменяет значения полюсов характеристического многочлена, а следовательно меняет качественно характеристики переходных процессов.

### 3. Оценка временных интервалов

Для оценки временных интервалов задержки должны быть построена модель интерпретации алгоритма управления контроллером фон Неймановского типа. Для простоты, без нарушения общности, модель может быть построена только из операторов транзакций. Поскольку управление сводится к периодическому опросу элементов векторов  $F(s) = [F_1(s), \dots, F_k(s), \dots, F_K(s)]$ ,  $X_0(s) = [X_{01}(s), \dots, X_{0k}(s), \dots, X_{0K}(s)]$ , и  $\varepsilon(s) = [\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_k(s), \dots, \varepsilon_K(s)]$ , алгоритм является циклическим, но в нем отсутствует эффект заикливания. Кроме того, поскольку для расчета управляющего воздействия  $\varepsilon(s)$  все элементы векторов  $F(s)$  и  $X_0(s)$  должны быть использованы, на структуру алгоритма накладываются условия сильной связности [15]. Подобными свойствами в самом общем случае обладает структура, представленная полным графом с петлями (рис. 2).

С учетом случайности временного интервала между транзакциями и стохастического характера переключения в сопряженные операторы, адекватной моделью алгоритма является полумарковский процесс [16, 17, 18, 19], представленный полумарковской матрицей

$$h(t) = [h_{k,l}(t)] = [g_{k,l}(t)] \otimes [p_{k,l}(t)], \quad (13)$$

где  $p_{k,l}(t)$  — вероятности прямого переключения из  $k$ -го оператора транзакции в  $l$ -й;  $g_{k,l}(t)$  — плотность распределения времени прямого переключения из  $k$ -го оператора транзакции в  $l$ -й;  $\otimes$  — знак прямого произведения матриц;  $t$  — физическое время.

В силу названных свойств моделируемого алгоритма, полумарковский процесс (13) является эргодическим, и в нем нет поглощающих и частично поглощающих состояний.

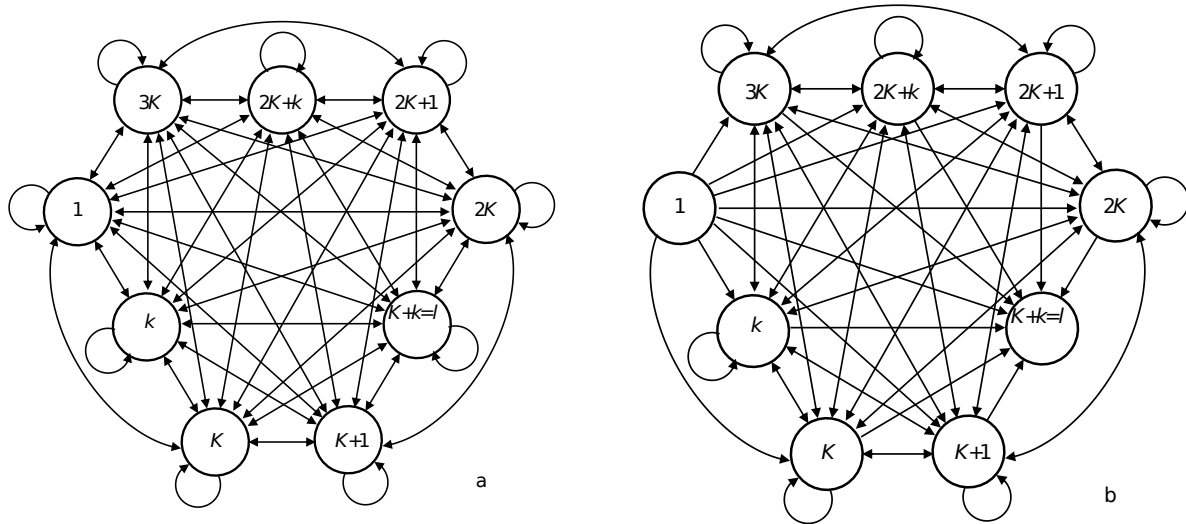


Рис. 2: Общая структура полумарковского процесса.

В силу эргодичности полумарковского процесса на плотности распределения  $g_{k,l}(t)$  и вероятности  $p_{k,l}(t)$  накладываются следующие ограничения:

$$0 < T_{k,l}^{\min} \leq \arg [g_{k,l}(t)] \leq T_{k,l}^{\max} < \infty, 1 \leq k, l \leq 3K; \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{3K} p_{k,l} = 1; \quad (15)$$

$$\int_{T_{k,l}^{\min}}^{T_{k,l}^{\max}} g_{k,l}(t) dt = 1, \quad (16)$$

где  $3K$  — общее количество операторов транзакций;  $T_{k,l}^{\min}$  и  $T_{k,l}^{\max}$  — нижняя и верхняя границы области определения плотности распределения  $g_{k,l}(t)$ .

При оценке временных интервалов между транзакциями в алгоритме не имеет значения, каким образом полумарковский процесс (13) попал из  $k$ -го состояния в  $l$ -е. Определяющим в данном случае является то, что это попадание является первым, а не вторым, третьим и т.п. Для оценки исходный полумарковский процесс (13) должен быть преобразован в процесс со структурой, приведенной на рис. 2 б, в котором  $k$ -е состояние является стартовым, а  $l$ -е состояние — поглощающим. Для этого:

$l$ -я строка и  $k$ -й столбец матрицы  $h(t)$  обнуляются;

вероятности  $p_{k,l}(t)$  во всех строках, исключая  $l$ -ю, и во всех столбцах, исключая  $k$ -й, пересчитываются по зависимости:

$$p'_{m,n} = \frac{p_{m,n}}{\sum_{\substack{n=1, \\ n \neq l}}^{3K} p_{m,n}}, \quad 1 \leq m, n \leq 3K, \quad m \neq k, \quad n \neq l. \quad (17)$$

Таким образом

$$h(t) \rightarrow h'(t) = [g_{k,l}(t) \cdot p'_{k,l}]. \quad (18)$$

После пересчета вероятностей по зависимости (17) частично поглощающие состояния, т.е. состояния, для которых не выполняется свойство (15), уничтожаются, и события достижения  $l$ -го состояния из  $k$ -е по одной из возможных траекторий блуждания начинают составлять полную группу несовместных событий [20]. Таким образом, плотность распределения времени достижения  $l$ -го состояния из  $k$ -го определяется как

$$g_{k,l}^{\Sigma}(t) = I_k^r \cdot L^{-1} \left[ \sum_{j=1}^{\infty} L [h'(t)]^j \right] \cdot I_l^c, \quad (19)$$

где  $L[...]$  и  $L^{-1}[...]$  — соответственно прямое и обратное преобразование Лапласа;  $I_k^r$  — вектор-строка,  $k$ -й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю; знак транспонирования;  $I_l^c$  — вектор-столбец,  $l$ -й элемент которого равен единице, а остальные элементы равны нулю [21].

Для плотности распределения (19) могут быть рассчитаны математическое ожидание и дисперсия по зависимостям [20]:

$$T_{k,l}^{\Sigma} = \int_0^{\infty} t \cdot g_{k,l}^{\Sigma}(t) dt; \quad (20)$$

$$D_{k,l}^{\Sigma} = \int_0^{\infty} (t - T_{k,l}^{\Sigma})^2 \cdot g_{k,l}^{\Sigma}(t) dt. \quad (21)$$

Состояния полумарковского процесса (13) могут быть распределены между транзакциями, осуществляемые в соответствии со схемой, приведенной на рис. 1, следующим образом:

состояния с первого по  $K$ -е являются математическими аналогами операторов ввода элементов вектора  $F(s)$ ;

состояния с  $(K+1)$ -го по  $(2K)$ -е моделируют ввод элементов вектора  $X_0(s)$ ;

состояния с  $(2K+1)$ -го по  $(3K)$ -е моделируют вывод элементов вектора  $\varepsilon(s)$ .

Оценка временного интервала может быть оценена либо по математическому ожиданию (20), либо по максимальному значению [20] с использованием соотношения

$$\tau = T_{k,l}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{k,l}^{\Sigma}}. \quad (22)$$

Соответственно, для матриц (5), (6), (7) временные задержки будут определяться, как это показано в таблице 1:

| Вид тран-<br>закции    | Номер вводимого<br>элемента | Среднее значение<br>времени                  | Максимальное значение вре-<br>мени                                         |
|------------------------|-----------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Ввод $F(s)$            | 1                           | $\tau_{f1} = 0$                              | $\tau_{f1} = 0$                                                            |
|                        | $2 \leq k \leq K$           | $\tau_{fk} = T_{1,k}^{\Sigma}$               | $\tau_{fk} = T_{1,k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,k}^{\Sigma}}$                  |
| Ввод $X_0(s)$          | $1 \leq k \leq K$           | $\tau_{0k} = T_{1,K+k}^{\Sigma}$             | $\tau_{0k} = T_{1,K+k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,K+k}^{\Sigma}}$              |
| Вывод $\varepsilon(s)$ | $1 \leq k \leq K$           | $\tau_{\varepsilon k} = T_{1,2K+k}^{\Sigma}$ | $\tau_{\varepsilon k} = T_{1,2K+k}^{\Sigma} + 3\sqrt{D_{1,2K+k}^{\Sigma}}$ |

Таблица 1: Оценки временных интервалов.

При учете временных задержек, приведенных в третьей колонке таблицы 1, оцениваются показатели качества управления в среднем. При учете временных задержек, приведенных в четвертой колонке, оцениваются предельные показатели качества управления.

#### 4. Пример анализа системы управления

В качестве примера исследована простейшая двухконтурная система. В системе реализована единичная обратная связь по обоим контурам, а в цифровом контроллере реализован П-закон управления.

Передаточные функции, определяющие динамику объекта управления, равны:

$$\Phi_{11}(s) = \frac{10}{s+5}; \Phi_{22}(s) = \frac{12}{s+3}; \Phi_{12}(s) = \Phi_{21}(s) = \frac{1}{s+4}. \quad (23)$$

Между транзакциями обеспечиваются следующие временные задержки:

$$\tau_{f1} = 0; \tau_{f2} = 0,05; \tau_{01} = 0,1; \tau_{02} = 0,15; \tau_{\varepsilon 1} = 0,2; \tau_{\varepsilon 2} = 0,25. \quad (24)$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер переходных процессов, без учета погрешностей, вносимых цифровым контроллером, имеет вид:

$$s^4 + 38s^3 + 480s^2 + 2272s + 3885 = 0. \quad (25)$$

Характеристическое уравнение, определяющее характер переходных процессов, с учетом погрешностей, вносимых цифровым контроллером, имеет вид:

$$[s+5+10\exp(-0,3s)] \cdot [s+3+12\exp(-0,4s)] \cdot (s^2+8s+16) - \exp(-0,7s) \cdot (s^2+8s+15) = 0. \quad (26)$$

Структура простейшей двухконтурной системы приведена на рис. 3 а, с цифровым контроллером, в котором реализован алгоритм со структурой, показанной на рис. 3 б и ее графическое решение 3с.

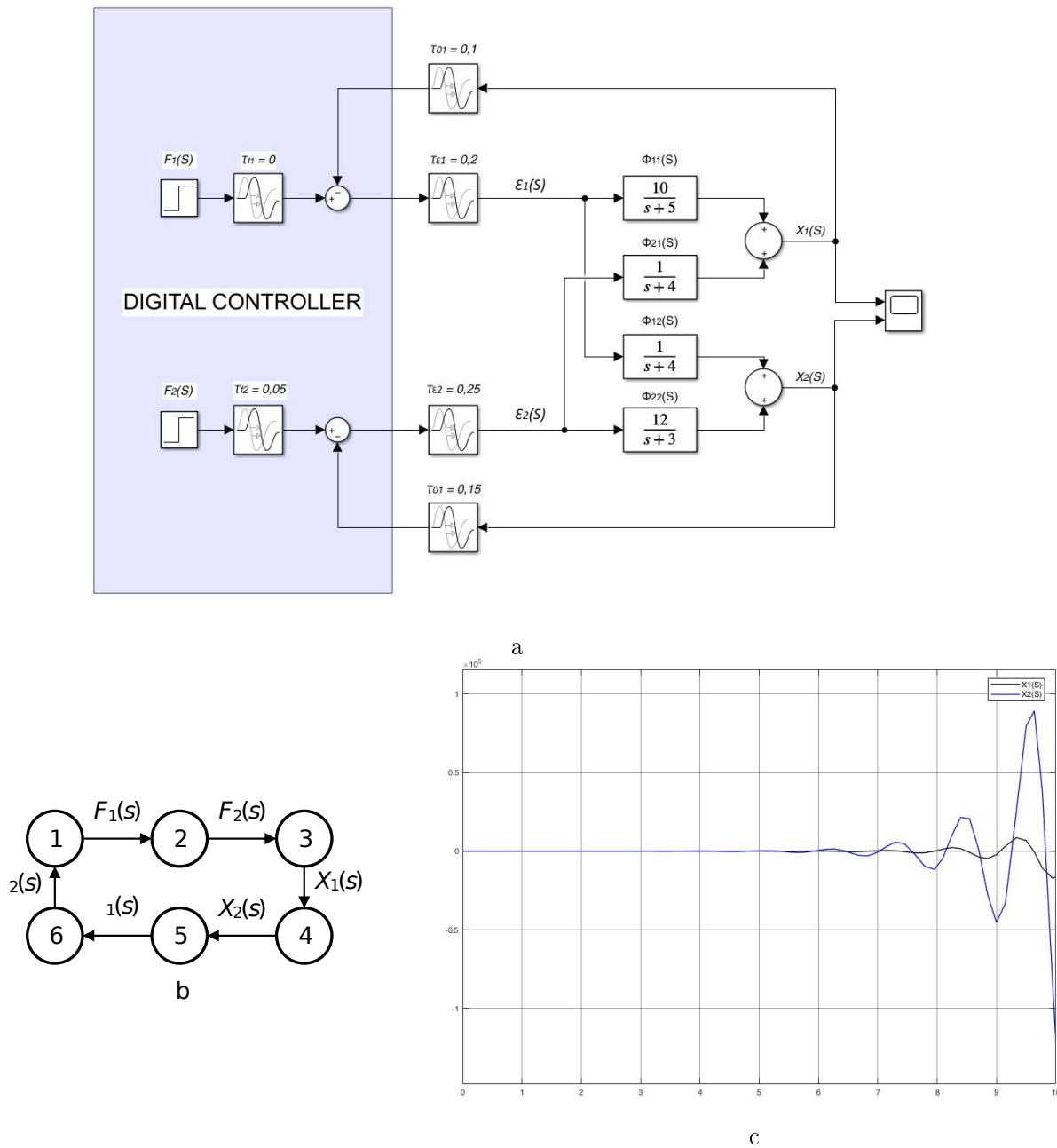


Рис. 3: Двухконтурная система (а); циклограмма управления (b); графическое представление (с).

Решение характеристических уравнений (25) и (26) дает следующие значения полюсов:

— без учета погрешностей

$$s_1 = -14; s_2 = -16; s_3 = -4 + 0,091i; s_4 = -4 - 0,091i, \text{ где } i \text{ — мнимая единица.}$$

— с учетом погрешностей

$$s_1 = 23,5; s_2 = -21,7; s_3 = 0,79 + 21,5i; s_4 = 0,79 - 21,5i, \text{ где } i \text{ — мнимая единица.}$$

Наличие пары комплексно-сопряженных корней:

— с положительной действительной частью указывает на то, что в замкнутой системе возникает расходящийся периодический переходный процесс; наличие действительного положительного корня, в дополнение к расходящемуся периодическому процессу свидетельствует о неустойчивости замкнутой системы;

— с отрицательной действительной частью указывает на то, что в замкнутой системе возникает затухающий периодический переходный процесс, который обусловлен исключительно наличием перекрестных связей. При отсутствии перекрестных связей в объекте управления система распадается на два независимых контура управления объектами, которые описываются звеньями первого порядка, т.е. затухающая периодическая составляющая в них отсутствует.

Таким образом, замыкание обратных связей устойчивой аналоговой системы через цифровой контроллер при той же логике работы приводит к качественным изменениям характера переходных процессов, что необходимо учитывать при проектировании цифровых систем управления.

## 5. Заключение

В результате построена математическая модель цифрового управления многоконтурными объектами, учитывающая реальные характеристики цифрового контроллера, как элемента системы управления. Показано, что контроллеры фон Неймановского типа с последовательной интерпретацией команд алгоритма управления являются источником временных задержек, которые приводят таким явлениям, как перекося данных и чистое запаздывание в контуре управления. В свою очередь, и перекося данных и чистое запаздывание приводят к ухудшению таких качественных параметров управления, как время переходного процесса, перерегулирование и колебательность. Предложенный метод расчета временных интервалов позволяет оценить характеристики системы на этапе ее проектирования, а следовательно является ключом к рациональному проектированию цифровых систем управления многоконтурными объектами с алгоритмами управления практически любой сложности.

Дальнейшие исследования в этой области могут быть направлены на разработку алгоритмов цифрового управления, оптимальных по соотношению показателей сложность/качество, и обеспечивающих требуемые характеристики функционирования цифровых систем.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malin Löfving M., Säfsen K.; Winroth M. Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises // IJMTM. 2016. Vol. 30. no. 5, pp. 306-325.
2. Zhou M.C. Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach // Wspc. 1999, 428 p.
3. Landau I.D., Zito G., Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation // Springer. 2006, 484 p.
4. Åström J., Wittenmark B., Computer Controlled Systems: Theory and Design // Tsinghua University Press. Prentice Hall. 2002, 557 p.
5. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., Estimation of Events Flow Generated with Ergodic Semi-Markov Processes // 2nd International Ural Conference on Measurements (URALCON), South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, 2017, pp. 124-129.
6. Fadali M.S., Visioli A., Digital control engineering: Analysis and design // Elsevier Inc. 2013, pp. 239 - 272.
7. Auslander D.M., Ridgely J.R. Jones J.C., Real-time software for implementation of feedback control // The control handbook. Control system fundamentals. Ed. by W.S. Levine. CRC Press. Taylor and Francis Group, US. 2017, pp.16-32.

8. Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C., System dynamics: Modeling, simulation and control of mechatronic systems // John Wiley & Sons. New Jersey. 2012, 636 p.
9. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
10. Babishin V., Taghipour S. Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements // Applied Mathematical Modelling 2016, V. 40. no. 23, pp. 10480-10505.
11. Arnold K. A. "Timing analysis in embedded systems", In embedded hardware by J. Ganssler, K. Arnold et al, USA, Elsevier Inc. 2008. pp. 239 - 272.
12. Balsamo S., Harrison P.G., Marin A., "Methodological construction of product-form stochastic Petri nets for performance evaluation" // In Journal of Systems and Software. Elsevier Inc., 2012, Vol. 85, no. 7. pp. 1520–1539.
13. Hamann A., Racu, R., Ernst R., "Multi-dimensional robustness optimization in heterogeneous distributed embedded systems" // In Proceedings of the 13th IEEE Real Time and Embedded Technology and Applications Symposium, RTAS '07, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. 2007, pp. 269–280.
14. Schiff J.L., The Laplace transform: Theory and applications, USA, NY Springer Verlag, 199, 233 p.
15. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., "A Method for Estimating the Time Intervals between Transactions in Speech-Compression Algorithms", In: Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 2017, Vol. 51. Iss. 5. pp. 214-219.
16. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęglowski M., "Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence", In Stochastic Processes and their Applications. 2017, V. 127, no. 4. pp. 1125–1170.
17. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., "Markov Chains: Models, Algorithms and Applications", In International Series in Operations Research & Management Science, V. 189. Springer Science + Business Media NY, 2013, 241 p.
18. Howard R.A., Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes // Courier Corporation. 2012, 205p.
19. Janssen J., Manca R., Applied Semi-Markov processes. Springer US. 2006, 310 p.
20. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., Probability, Random Processes and Statistical Analysis: Cambridge University Press. 2012, 812 p.
21. Petersen P., Linear algebra. Springer-Verlag. NY. 2012, 427 p.

## REFERENCES

1. Malin Löfving M., Säfsten K.; Winroth M., 2016, Manufacturing strategy formulation, leadership style and organizational culture in small and medium-sized enterprises, IJMTM. Vol. 30. no. 5, pp. 306 - 325.
2. Zhou M.C., 1999, Modeling, Simulation, and Control of Flexible Manufacturing Systems: A Petri Net Approach. Wspc, 428 p.

3. Landau I.D., Zito G., 2006, Digital Control Systems, Design, Identification and Implementation. Springer, 484 p.
4. Åström J., Wittenmark B., 2002, Computer Controlled Systems: Theory and Design. Tsinghua University Press. Prentice Hall, 557 p.
5. Larkin E., Bogomolov A., Privalov A., 2017, Estimation of Events Flow Generated with Ergodic Semi-Markov Processes // 2nd International Ural Conference on Measurements (URALCON), South Ural State University, Chelyabinsk, Russia, pp. 124-129.
6. Fadali M.S., Visioli A., 2013, Digital control engineering: Analysis and design. Elsevier Inc., pp. 239 - 272.
7. Auslander D.M., Ridgely J.R. Jones J.C., 2017, Real-time software for implementation of feedback control // The control handbook. Control system fundamentals. Ed. by W.S. Levine. CRC Press. Taylor and Francis Group, US. pp.16–32.
8. Karnopp D.C., Margolis D.L., Rosenberg R.C., 2012, System dynamics: Modeling, simulation and control of mechatronic systems. John Willey & Sons. New Jersey, 636 p.
9. Tzafestas S.G. Introduction to Mobile Robot Control. Elsevier, 2014. 750 p.
10. Babishin V., Taghipour S.. 2016, Optimal maintenance policy for multicomponent systems with periodic and opportunistic inspections and preventive replacements // Applied Mathematical Modelling, V. 40. no. 23, pp. 10480 -10505.
11. Arnold K. A. “Timing analysis in embedded systems”, In embedded hardware by J. Ganssler, K. Arnold et al, USA, Elsevier Inc. 2008. pp. 239 - 272.
12. Balsamo S., Harrison P.G., Marin A., 2012, “Methodological construction of product-form stochastic Petri nets for performance evaluation”, In Journal of Systems and Software. Elsevier Inc., Vol. 85, no. 7. pp. 1520–1539.
13. Hamann A., Racu, R., Ernst R., 2007, “Multi-dimensional robustness optimization in heterogeneous distributed embedded systems”, In Proceedings of the 13th IEEE Real Time and Embedded Technology and Applications Symposium, RTAS '07, IEEE Computer Society, Washington, DC, USA. pp. 269–280.
14. Schiff J.L., 199, The Laplace transform: Theory and applications, USA, NY Springer Verlag, 233 p.
15. Larkin E.V., Bogomolov A.V., Privalov A.N., 2017, “A Method for Estimating the Time Intervals between Transactions in Speech-Compression Algorithms”, In: Automatic Documentation and Mathematical Linguistics, Vol. 51. Iss. 5. pp. 214-219.
16. Bielecki T.R., Jakubowski J., Niewęglowski M., 2017, “Conditional Markov chains: Properties, construction and structured dependence”, In Stochastic Processes and their Applications, V. 127, no. 4. pp. 1125–1170.
17. Ching W.K., Huang X., Ng M.K., Siu T.K., 2013, “Markov Chains: Models, Algorithms and Applications”, In International Series in Operations Research & Management Science, V. 189. Springer Science + Business Media NY,. 241 p.
18. Howard R.A., 2012, Dynamic Probabilistic Systems. Vol. 1: Markov Models. Vol. II: Semi-Markov and Decision Processes, Courier Corporation, 205p.

- 
19. Janssen J., Manca R., 2006, Applied Semi-Markov processes. Springer US, 310 p.
  20. Kobayashi H., Marl B.L., Turin W., 2012, Probability, Random Processes and Statistical Analysis: Cambridge University Press.. 812 p.
  21. Petersen P., 2012, Linear algebra. Springer-Verlag. NY. 427 p.

Получено 12.06.2020 г.

Принято в печать 22.10.2020 г.