ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511 DOI 0.22405/2226-8383-2020-21-3-39-58

Интеграл Шнирельмана и аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей[1]

С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков, С. С. Афанасьева

Сергей Владимирович Востоков — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
Тимофей Юрьевич Шашков — Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: 7197163@mail.ru
Софья Сергеевна Афанасьева — кандидат физико-математических наук, инженер-исследователь, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: sonya.afan@gmail.com

Аннотация

Задача работы возникла из потребности исследования связей между теорией полей алгебраических чисел и теорией функций. Один из самых фундаментальных и классических результатов из комплексного анализа «Интегральная теорема Коши» имеет дискретный аналог для случая одномерных локальных полей. Следовательно, возникает естественный вопрос можно ли обобщить аналог Интегральной теоремы Коши на случай двумерных полей. Данная работа отвечает на поставленный вопрос, обобщая интеграла Шнирельмана и доказывая аналог интегральной теоремы Коши. Как следствие, получена связь между символом Гильберта и интегралом Шнирельмана.

Ключевые слова: Интеграл Шнирельмана, аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:
С. В. Востоков, Т. Ю. Шашков, С. С. Афанасьева. Интеграл Шнирельмана и аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 39–58.

[1]Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 16-11-10200).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 511 DOI 0.22405/2226-8383-2020-21-3-39-58

Schnirelmann's integral and analogy of Cauchy integral theorem for two-dimensional local fields

S. V. Vostokov, T. Yu. Shashkov, S. S. Afanas'eva

Sergey Vladimirovich Vostokov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
e-mail: s.vostokov@spbu.ru
Timofei Yurievich Shashkov — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
e-mail: 7197163@mail.ru
Sofya Sergeevna Afanas'eva — Saint Petersburg State University (Saint-Petersburg).
e-mail: sonya.afan@gmail.com

Abstract

The problem studied in the thesis arose from the need to find connections between algebraic field theory and theory of functions. The Cauchy integral theorem, which is one of the most basic and classical results of the complex analysis, has a discrete analog in the case of one-dimensional local fields. The natural question then arises whether it is possible to generalize the same result to two-dimensional local fields. The present paper contains the definition of Schnirelmann's integral and the proof of an analog of Cauchy's integral theorem for two-dimensional local fields. As a consequence, links between the Hilbert symbol and Schnirelmann's integral are established.

Keywords: Schnirelmann's integral, analog of Cauchy's integral theorem for two-dimensional local fields.

Bibliography: 15 titles.

For citation:
S. V. Vostokov, T. Yu. Shashkov, S. S. Afanas'eva, 2020, "Schnirelmann's integral and analogy of Cauchy integral theorem for two-dimensional local fields" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 39–58.

1. Введение

Одной из центральных тем в алгебраической теории чисел является закон взаимности для локальных полей и его приложения. Первый результат в этом направлении был получен Л. Эйлером и К. Гауссом, известный как квадратичный закон взаимности, связывающий символы Лежандра нечетных простых чисел:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}},$$

где p, q — нечетные простые числа, а $\left(\frac{p}{q}\right)$ и $\left(\frac{q}{p}\right)$ — символы Лежандра.

Для конечных расширений поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (обозначим такое поле через E) и сравнений произвольной степени, было получено обобщение квадратичного закона взаимности (начало 20-го века), связывающее произведение степенных вычетов с символами Гильберта:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1} = \prod_{p|n\infty} \left(\frac{\alpha,\beta}{p}\right)_n,$$

где $\left(\frac{\alpha,\beta}{p}\right)_n$ — символ Гильберта, а α, β — ненулевые элементы рассматриваемого поля.

Первоначальное определение символа Гильберта было достаточно сложным и возникла потребность в нахождении альтернативного способа (явной формулы) для подсчета символа Гильберта. В 1950 г. в мультипликативной группе локального поля, содержащего все корни p^n-ой степени из единицы, И. Р. Шафаревичем (см.[15]) был построен базис, который оказался удобным для вычисления символа Гильберта. Окончательная формула была получена в 1978 году С. В. Востоковым (см. [5]), что повлекло за собой массу различных приложений.

Нахождение явной формулы для символа Гильберта оказалось существенным этапом в развитии конструктивной теории полей классов для локальных полей (конечных расширений поля p-адических чисел).

Помимо этого, можно изучать теорию полей классов для формальных модулей (модулей, построенных на максимальном идеале локального поля с помощью формального группового закона). Важным объектом здесь выступают эллиптические кривые, на которых можно завести структуру абелевой группы. В свою очередь, эллиптические кривые сыграли ключевую роль в доказательстве Великой теоремы Ферма.

1.1. Связь между законом взаимности и интегральной теоремой Коши

Один из самых важных результатов теории комплексного анализа — Интегральная теорема Коши, связывающая контурный интеграл мероморфной функции с ее вычетами. Для одномерных локальных полей нулевой характеристики можно определить аналог контурного интеграла (интеграл Шнирельмана), для которого будет верна формулировка теоремы Коши. Аналог этой теоремы для одномерных локальных полей был доказан С. В. Востоковым и М. А. Ивановым в работе [8]. Это позволило, в свою очередь, найти связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта и, как следствие, получить альтернативный вариант явной формулы для символа Гильберта.

Таким образом существует аналогия между объектами дискретной и непрерывной природы, что позволяет глубже понимать суть вещей и комбинировать методы разной природы для решения задач.

Возникает естественный вопрос о том возможно ли обобщение вышеперечисленных результатов, связанных с интегралом Шнирельмана, с одномерного случая на многомерный. Оказывается, для двумерных полей ответ положительный, и задача этой работы как раз заключается в исследовании интеграла Шнирельмана и его свойств для двумерных локальных полей характеристики 0.

Целью настоящей работы является обобщение результатов, связанных с интегралом Шнирельмана и полученных для одномерных локальных полей характеристики 0, на случай двумерных локальных полей нулевой характеристики. В этой работе обобщено понятие интеграла Шнирельмана для полей указанного вида и доказан аналог интегральной теоремы Коши для двумерных полей. Как следствие интегральной теоремы Коши, была получена связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта (рассматриваются поля вида $K = E\{\{t\}\}$).

2. Обозначения и предварительные сведения

2.1. Многомерные локальные поля

Локальная теория полей классов развивается и для многомерных локальных полей (см. [12, 3, 4] и [14]).

Определение 1. *Поле K будем называть n-мерным локальным полем, если задана цепочка полей $K = k_n, k_{n-1}, \dots, k_1, k_0$, где k_{i+1} — полное дискретно нормированное поле с полем вычетов k_i, а k_0 — конечное поле.*

Иногда предполагается, что k_0 — совершенное поле простой характеристики. В работе будем предполагать, что K — двумерное локальное поле характеристики 0, а E — конечное расширение поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$.

Введем основные обозначения, которые будут использоваться в работе дальше.

Пусть ζ — корень из единицы степени $q = p^m$ (для результатов, связанных с символом Гильберта, будем дополнительно требовать, чтобы ζ был элементом поля K).

$\nu = (\nu_1, \nu_2) : K^* \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ — дискретное нормирование ранга 2 (см. [10]). Будем считать, что на группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ задан лексикографический порядок: $(i_1, i_2) < (j_1, j_2)$, если и только если либо $i_1 < j_1$ либо $i_1 = j_1$, $i_2 < j_2$. Для упрощения записей в работе периодически двумерный показатель будет сравниваться с 0. В этом случае под 0 понимается на самом деле $(0, 0)$.

ν_E — дискретное нормирование на E.

O_K — кольцо целых многомерного локального поля K, то есть множество $\{x \in K : \nu(x) \geq \geq 0\}$.

K^{alg} — алгебраическое замыкание локального поля K.

$\overline{K^{alg}}$ — пополнение алгебраического замыкания локального поля K.

$|\cdot|_p$ — p-адическая норма (а точнее одна из класса эквивалентности), а ν_p — p-адический показатель.

Пусть k_0, k_1, k_2 — последовательность полей:

- k_0 — конечное поле,
- k_{i-1} — поле вычетов для k_i, k_i — полное дискретно нормированное поле, $i = 1, 2$,
- $k_2 = K$.

t_1, t_2 — система локальных параметров k, т.е. t_2 — простой элемент поля K, $\nu(t_1) = (0, 1)$. Иногда простой элемент поля K будем обозначать через π (традиционно он так обозначается в случае одномерных локальных полей).

2.2. Классификация многомерных локальных полей

Для полного дискретно нормированного поля E положим

$$E\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i t^i | a_i \in E, \inf \nu_E(a_i) > -\infty, \lim_{i \to -\infty} \nu_E(a_i) = +\infty \right\}.$$

Для многомерных локальных полей известна следующая классификационная теорема (Паршин А.Н., [12]).

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$. Тогда любое n-мерное локальное поле либо изоморфно полю $\mathbb{F}_q((t_1))((t_2))...((t_n))$, либо изоморфно полю вида $k((t_1))..((t_{n-1}))$, либо является подполем в поле $k\{\{t_1\}\}...\{\{t_{i-1}\}\}((t_{i+1}))...((t_n))$, где k — конечное расширение поля p-адических чисел, а q — степень простого числа p.*

Мы будем работать с двумерными локальными полями характеристики 0, поэтому нам достаточно будет рассматривать случаи $K = E\{\{t\}\}$ и $K = E((t))$, где E — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$ а также их подполя. На самом деле достаточно рассматривать только первые 2 случая, поскольку топология подполя будет индуцированной и все утверждения про сходимость после сужения сохранятся.

Нормирование для полей вида $K = E\{\{t\}\}$ устроено следующим образом: пусть $x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_i t^i \in K$, тогда $\nu(x)$ равно двумерному вектору $(\nu_1(x), \nu_2(x))$, где $\nu_1(x) = \min_{i\in\mathbb{Z}}(\nu_E(a_i))$, $\nu_2(x) = \min\{i|\nu_E(a_i) = \nu_1(x)\}$.

Для поля $K = E((t))$ нормирование устроено так: для $x = \sum\limits_{k=-m}^{+\infty} a_i t^i$ выполнено $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$, где $\nu_1(x)$ — минимальное i, для которого $a_i \neq 0$, $\nu_2(x) = \nu_E(a_{\nu_1(x)})$.

2.3. Символ Гильберта

Для n-мерного локального поля K существует канонический гомоморфизм

$$\psi : K_n^M(K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K),$$

где $K_n^M(K)$ — K-функтор Милнора (см.[13, 11]), K^{ab} — максимальное абелево расширение поля K. Предположим, что поле K содержит группу μ_q корней степени q из единицы.

Символ Гильберта, играющий ключевую роль в локальной теории полей классов и связывающий последнюю с теорией Куммера, может быть определен следующим образом:

$$(\cdot,\cdot)_q : K_n^M(K)/K_n^M(K)^q \longrightarrow \mu_q,$$
$$(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \beta)_q = \sqrt[q]{\beta}^{\psi(\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\})-1}.$$

В работе [6] было получено явное выражение для спаривания Гильберта. Было в явном виде построено мультипликативное по всем аргументам, кососимметричное отображение $\Gamma : K^* \times \ldots \times K^* \longrightarrow \mu_q$, с помощью которого можно задать непрерывное и невырожденное спаривание

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma : K_n^M(K)/K_n^M(K)^q \times K^*/K^{*q} \longrightarrow \mu_q$$
$$\langle x, y\rangle_\Gamma = \Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, y).$$

Спаривание $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Gamma$ совпадает с символом Гильберта, а значит задает его в явном виде.

Этот результат позволяет независимо строить теорию полей классов многомерного локально поля, а также будет использоваться в настоящей работе.

Отображение Γ задается следующим образом

$$\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \zeta^{\mathrm{tr}\,\mathrm{res}\Phi/s},$$

где tr — оператор следа в подполе инерции T поля K, а ряды Φ и s будут описаны ниже.

В настоящей работе мы будем рассматривать случай $K = E\{\{t\}\}$. Опишем ряды Φ и s в этом случае. T изоморфно полю частных кольца векторов Витта $W(k_0)$.

$\mathcal{O}_T$ — кольцо целых поля T.

$R = \mathcal{O}_T\{\{t\}\}$.

$\triangle$ — автоморфизм Фробениуса.

Пусть π — простой элемент, разложим ζ как ряд по π с коэффициентами из R. Тогда можно определить соответствующий ряд $z(X)$ из $R((X))$. Для удобства будем обозначать элементы K^* и соответствующие ряды с коэффициентами из R одной буквой. В кольце $R\{\{X\}\}$ оператор $\triangle$ действует на переменные t_1, X как возведение в p-ю степень, а на коэффициенты как обычный автоморфизм Фробениуса в подполе инерции.

Обозначим через $s(X)$ ряд $s(X) = z(X)^q - 1$. Для любого α из $R\{\{X\}\}$ корректно задан (см.[6]) ряд

$$l(\alpha) = \frac{1}{p}\log(\alpha^{p-\triangle})$$

со значениями в $R\{\{X\}\}$. Далее, для ряда α введем следующие обозначения:

$$\delta_i(\alpha) = \alpha^{-1}\frac{\partial \alpha}{\partial t_i}, \qquad \text{где } i = 1, 2$$

$$\eta_i(\alpha) = \delta_i(\alpha) - \frac{\partial}{\partial t_i} l(\alpha), \qquad \text{где } i = 1, 2.$$

Для элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ из K^* ряд Φ определяется следующим образом

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = l(\alpha_1)D_1 - l(\alpha_2)D_2 + l(\alpha_3)D_3,$$

где

$$D_1 = \det\begin{pmatrix}\eta_1(\alpha_2) & \eta_2(\alpha_2)\\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3)\end{pmatrix}, D_2 = \det\begin{pmatrix}\delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1)\\ \eta_1(\alpha_3) & \eta_2(\alpha_3)\end{pmatrix}, D_3 = \det\begin{pmatrix}\delta_1(\alpha_1) & \delta_2(\alpha_1)\\ \delta_1(\alpha_2) & \delta_2(\alpha_2)\end{pmatrix}.$$

3. Вспомогательные топологические свойства двумерных локальных полей

Прежде, чем формулировать и доказывать интегральную теорему Коши необходимо будет зафиксировать несколько важных топологических свойств K и определить интеграл Шнирельмана для двумерных локальных полей.

3.1. Топология двумерных локальных полей и базовые окрестности 0 для полей $E\{\{t\}\}$ и $E((t))$

Прежде всего напомним, как устроена база окрестностей 0 поля K.

Пусть V_i — база окрестностей 0 в поле E (можно считать, что $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$), где m_i — целое или $-\infty$ (что соответствует случаю, когда окрестность совпадает со всем полем E).

Разберем 2 основных случая:

Случай 1. $K = E\{\{t\}\}$

База окрестностей нуля в рассматриваемом случае определяется так (см. [1], [7]):

Пусть $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — последовательность базовых окрестностей 0 в E такая, что:

1. Существует число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что множество $\{x \in E : \nu_E(x) \geq c\}$ лежит в V_i для всех целых i.

2. Для любого целого $l \in \mathbb{Z}$ множество $\{x \in E : \nu_E(x) \geq l\}$ лежит в V_i для достаточно больших i.

Пусть $U_{V_i} = \{\sum b_i t^i : b_i \in V_i\}$. Тогда все множества U_{V_i} образуют базу окрестностей 0 в K.

Случай 2. $K = E((t))$

Согласно [1] и [7] в этом случае база окрестностей нуля задается следующим образом:

Как и в случае $K = E\{\{t\}\}$ предполагаем, что V_i — база окрестностей нуля в поле E, но на этот раз немного с другими условиями:

1. $V_{j-1} \subset V_j$ для любого целого j.

2. $V_j = E$ для достаточно больших j .

Как и в первом случае, точки базовой окрестности будут иметь вид $\sum a_i t^i$, где $a_i \in V_i$.

Топология для подполей — индуцированная топология.

Для двумерных локальных полей верны следующие утверждения (см. [1], например):

Предложение 1. *Пусть K — двумерное локальное поле. Тогда*

1. *K — полное топологическое пространство.*
2. *Умножение на ненулевую константу — гомеоморфизм.*
3. *Сложение — непрерывная операция, а умножение — секвенциально непрерывная, то есть если $a_n \to a$, а $b_n \to b$, то тогда $a_n b_n \to ab$ и, кроме того, если $b_n, b \neq 0$, то $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Лемма 1. *Пусть K — двумерное локальное поле (вида $E\{\{t\}\}$ или $E((t))$), где E — конечное расширение $\mathbb{Q}_p$, a_n — последовательность элементов из K, $x \in K$.*

Тогда

1. *если $\nu(x) > 0$, то последовательность x^n стремится к нулю при $n \to +\infty$;*
2. *если $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$, а b_n — ограниченная последовательность элементов из E, (то есть такая, что последовательность чисел $\nu_E(b_n)$ ограничена снизу конечным целым числом), то последовательность $a_n b_n \to 0$ при $n \to +\infty$.*
3. *Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится и $a_i = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{i,k} t^k$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}) t^k$.*

   (в случае $K = E((t))$ считаем, что почти все коэффициенты при отрицательных степенях равны 0).
4. *Если $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ сходится.*

Доказательство. Первый случай: $K = E\{\{t\}\}$.

Докажем сначала первое утверждение леммы.

Пусть U_{V_i} — базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует $N > 0$ такое, что $x^n \in U_{V_i}$ для любого $n \geq N$.

Разберем 2 случая:

1. $\nu_1(x) > 0$ ($x = \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i$, где $\min(\nu_E(a_i)) > 0$, $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x))$).

Тогда $\nu_1(x^n) = n\nu_1(x) \geq n$. Поскольку по первому свойству U_{V_i} существует n, что все коэффициенты лежат в V_i, $x^n \in U_{V_i}$ для достаточно больших n, а это то, что нужно.

2. $\nu_1(x) = 0$, $\nu_2(x) > 0$. Тогда элемент x можно представить в виде

$$x = \pi \sum_{j=-\infty}^{0} b_j t^j + t^i \sum_{j=0}^{+\infty} c_j t^j,$$

где $i > 0$, $c_0 \neq 0$, b_j и $c_j \in O_E$ (т.е. $\nu_E(b_j) \geq 0$ и $\nu_E(c_j) \geq 0$), а π — простой элемент.

По свойству 1 базы окрестности существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что для любого целого j множество $\{x : \nu_E(x) \geq k\}$ лежит в U_j. Поскольку $\nu_E(a_i) \to +\infty$ при $i \to -\infty$, то существует целое число M_1, что $\nu_E(a_m) \geq k$ для любого $m \leq M_1$. Считаем для удобства, что $M_1 < 0$.

Разобьем ряд для x на 3 суммы:

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i t^i = \sum_{i=-\infty}^{M_1} a_i t^i + \sum_{i=M_1+1}^{0} a_i t^i + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i t^i.$$

Поскольку для любого целого числа i нормирование $\nu_E(a_i) \geq 0$, нетрудно понять, что после раскрытия скобок (при возведении в степень n суммы вида $(a+b+c)$, где a соответствует первому ряду разбиения, b — второму и c — третьему) слагаемые, которые содержат множитель a будут, очевидно, лежать в множестве U_{V_i} (так как их первая координата нормирования будет хотя бы k).

Значит из замкнутости U_{V_i} относительно суммы достаточно проверять наше утверждение в предположении, что $a = 0$.

Таким образом можно считать, что

$$x = \pi \sum_{j=-m}^{0} b_j t^j + t^i \sum_{j=0}^{+\infty} c_j t^j,$$

где $i > 0, c_0 \neq 0$, b_j, $c_j \in O_E$ для любого j, m — целое неотрицательное число.

По второму свойству определения базовых окрестностей $\{x \in E : \nu_E(x) \geq 0\} \subset U_j$ для достаточно больших j (больших, скажем, числа M').

Пусть M — натуральное число, большее, чем $\frac{k(i+m)+M'}{i}$.

Возьмем $n \geq M$. После раскрытия скобок $(b+c)^n$ у нас получится сумма слагаемых вида $b^l c^{n-l}$, где $0 \leq l \leq n$. Покажем, что каждое слагаемое лежит в рассматриваемой базовой окрестности 0. Заметим, что если $l \geq k$, тогда это верно по выбору k. Значит достаточно доказывать это для $l < k$.

Пусть $b^l c^{n-l} = \sum\limits_{j=-\infty}^{+\infty} s_j t^j$. Покажем, что $s_j = 0$ для любого $s < M'$. Ясно, что этого будет достаточно по выбору M'.

Нетрудно видеть, что минимальная степень, при которой коэффициент не равен 0, будет не меньше, чем $-ml + i(n-l)$. Оценим это число снизу:

$$-ml + i(n-l) = in - l(i+m) > iM - k(i+m) > k(i+m) + M' - k(i+m) = M'.$$

Значит действительно $s_j = 0$ для любого $j < M'$.

Отсюда действительно следует, что x^n лежит в базовой окрестности 0 для любого $n \geq M$. Значит по определению предела $x^n \to 0$ при $n \to +\infty$ при $\nu(x) > 0$. Первое утверждение леммы для случая $K = E\{\{t\}\}$ доказано.

Докажем второе утверждение:

Пусть последовательность рядов $a_n = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_{n,i} t^i$ сходится к 0. Также рассмотрим U_{V_i} — окрестность 0, где $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq m_i\}$. Понятно, что для достаточно больших n $a_{n,i} \in \{x : \nu_E(x) \geq m_i - c\}$, где c такое целое число, что $\nu_E(b_n) \geq c$. Тогда $\nu_E(a_{n,i} b_n) \geq m_i$ для больших n. Отсюда сразу следует, что $a_n b_n$ попало в базовую окрестность, а значит есть сходимость к 0.

Докажем утверждение 3. Поскольку ряд сходится, то существует последовательность $b_i \in E$, такая, что $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} b_k t^k$.

Покажем, что $b_k = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k}$ для любого целого k.

Заметим, что из сходимости ряда следует, что для любой окрестности нуля U в поле E элемент $b_k - \sum\limits_{i=0}^{n} a_{i,k}$ лежит в U для достаточно больших n и любого k. Это значит, что b_k —

предел частичных сумм ряда $a_{i,k}$ по i. Тогда по определению суммы ряда получаем требуемое, что и доказывает утверждение 3.

Наконец, докажем 4-е утверждение.

Поскольку K — полное топологическое пространство (см. предложение 1), достаточно проверить сходимость ряда в себе.

Фиксируем окрестность U_{V_i}. Поскольку $a_n \to 0$ сразу получаем, что $a_n \in U_{V_i}$. Тогда из замкнутости базовых окрестностей относительно сложения тоже верно и для конечных сумм, то есть сходимость в себе есть, а, следовательно, и сходимость ряда.

Таким образом в случае $K = E\{\{t\}\}$ лемма полностью доказана.

Теперь второй случай: $K = E((t))$.

Докажем утверждение 1.

Фиксируем базовую окрестность нуля U_{V_i}.

1. Пусть $\nu_1(x) > 0$. Тогда $x = t^m \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$, где $m > 0$, тогда ясно, что для любого натурального n первые $n-1$ коэффициентов ряда от t для x^n равны 0 (и, следовательно, лежат в U_j), тогда для больших n будет верна импликация: $b_i \neq 0 => U_i = E$ (где $x^n = \sum b_i t^i$). Значит x^n лежит в выбранной окрестности, начиная с некоторого n.

2. Пусть $\nu_1(x) = 0$. Значит $x = a_0 + t^m \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a'_k t^k$, где $m > 0$ и $\nu_E(a_0) > 0$.

Дальнейшие рассуждения проводятся как в первом случае.

Пункты $2-4$ утверждения доказываются абсолютно аналогично. □

3.2. Равномерная сходимость и ее свойства

Еще два естественных аналитических понятия пригодятся для осуществления предельных переходов в доказательстве теоремы Коши:

Определение 2. *Будем говорить, что последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится к $f(X)$ на множестве S, если для любой U — окрестности 0 существует число $M \in \mathbb{N}$ такое, что для любого элемента $x \in S$ $(f_m - f)(x) \in U$ для любого целого $m \geq M$.*

Определение 3. *Будем говорить, что последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится в себе на множестве S, если для любой U — окрестности 0 существует число $M \in \mathbb{N}$ такое, что для любого элемента $x \in S$ $(f_m - f_n)(x) \in U$ и для любых целых чисел $m, n \geq M$.*

Если последовательность функций $f_m(X)$ равномерно сходится к $f(X)$, будем писать $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$.

Замечание 1. *Равномерную сходимость достаточно проверять на базовых окрестностях.*

Сформулируем еще одно несложное, но полезное утверждение, которое будет использоваться в доказательстве основной теоремы:

Утверждение 1. *Пусть дана последовательность функций $f_m(X)$ и функция $f(X)$, такие, что $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$,*

и функция $g(x)$ такая, что $g(x) \in E$ для любого x и $\nu(g(x))$ — конечное число, не зависящее от x, для всех x из $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$. Тогда $f_m(X)g(X) \rightrightarrows f(X)g(X)$ на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$.

Доказательство. Не умаляя общности можем считать, что $\nu(g(x)) = 0$ для всех x (иначе поделим на константу, которая никак не влияет на сходимость). Кроме того, для удобства будем считать, что $x_0 = 0$ и $f(X) = 0$.

Первый случай: $K = E\{\{t\}\}$.

Нужно показать, что для любой окрестности нуля U_{V_i} существует целое M, что $f_m(X)g(X) \in U_{V_i}$ для любого $m \geq M$. Такое свойство верно для последовательности $f_m(X)$. Если $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$, где a_i — какое-то целое число, а ν_E — нормирование в E, то тогда умножение на любой элемент $g(x)$ не выводит $f_m(X)g(X)$ за пределы окрестности (поскольку для любого x — это элемент из E с нормированием, равным 0). Отсюда получается, что требуемое свойство выполнены и для последовательности $f_m(X)g(X)$.

Случай, когда $K = E((t))$ разбирается точно так же.

Значит домножение на функции такого вида сохраняют равномерную сходимость. □

Замечание 2. *Условие утверждения можно ослабить, предполагая равномерную ограниченность $g(x)$ на множестве $\{x|\nu(x-x_0) = \nu(x)\}$ и требуя по-прежнему, чтобы $g(x) \in E$ для всех x.*

Сформулируем еще одно интересное и важное свойство равномерной сходимости рядов.

Предложение 2. *Пусть последовательность функций $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ на множестве $r\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$ (все элементы домножаются на r), где элементы r, $a \in K$, причем $\nu(a) \neq \nu(r)$.*

Тогда
$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} \rightrightarrows \frac{f(X)}{(X-a)}.$$

Доказательство. Пусть $K = E\{\{t\}\}$.

Во-первых можно считать, что $r = 1$ (иначе поделим на r). Тогда $x \in E$ и $\nu(x) = 0$.

Первый случай: $\nu(a) > 0$.

Рассмотрим базовую окрестность нуля U_{V_i}. Не умаляя общности можно считать, что V_i — возрастающая последовательность.

Перепишем разность последовательностей:

$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X}\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X))$$

Первый множитель, очевидно, не влияет на равномерную сходимость, можно его дальше не рассматривать.

Нетрудно понять, что
$$\frac{1}{(1-\frac{a}{X})} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{X}\right)^j.$$

Действительно, $\sum\limits_{j=0}^{m}(\frac{a}{X})^j(1-\frac{a}{X}) = 1-(\frac{a}{X})^{m+1}$. Тогда из свойства 3 предложения 1 и утверждения 1 леммы 1 следует нужное равенство.

Покажем, что $\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X)-f(X))$ стремится к 0 равномерно.

Пусть
$$f_m(X) - f(X) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(X)t^k, \text{ а } a^n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k}t^k.$$

Пусть $x \in E$, $\nu_E(x) = 0$.

Перепишем $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}((f_m - f)(x))$ следующим образом:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^j\right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j,k}}{x^j}\cdot t^k\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{k} f_{m,i}(x)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j,k-i}}{x^j}\right)t^k.$$

Здесь мы воспользовались утверждением 3 из леммы 1.

Поскольку $f_m(X) \rightrightarrows f(X)$ существует такое натуральное M, что для любого $m \geq M$, любого целого k и любого x (из рассматриваемого множества) $f_{m,k}(x) \in V_k$.

Докажем, что $\frac{f_m(x)}{(x-a)} - \frac{f(x)}{(x-a)} \in U_{V_i}$ для любого x и целого $m \geq M$. Для этого достаточно показать, что для любого x и целого k выполнено

$$\sum_{i=-\infty}^{k} f_{m,i}(x)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_{j,k-i}}{x^j} \in V_k.$$

Ясно, что достаточно показать, что $f_{m,i}(x)\frac{a_{j,k-i}}{x^j} \in V_k$, но это очевидно, поскольку $\nu_E(\frac{a_{j,k-i}}{x^j}) \geq 0$.

Второй случай: $\nu(a) < 0$.

Действуем так же, как и в первом случае:

$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = -\frac{1}{a}\frac{1}{\left(1-\frac{X}{a}\right)}(f_m(X) - f(X)).$$

Далее, проводя рассуждения как в первом случае, можно доказать равномерную сходимость.

Пусть $K = E((t))$, $\nu(a) > 0$.

Тогда $a = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$.

Как и в первом случае распишем разность:

$$\frac{f_m(X)}{(X-a)} - \frac{f(X)}{(X-a)} = \frac{1}{(X-a)}(f_m(X) - f(X)) = \frac{1}{X}\frac{1}{(1-\frac{a}{X})}(f_m(X) - f(X)).$$

Опять же первый множитель не влияет на равномерную сходимость.

Разность $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$ можно переписать в виде

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^j\right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^j\right) =$$
$$= \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{m,k}(x)t^k\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i t^i)^j x^{-j}\right).$$

Заметим, что существует целое n и целое M, что для любого $m \geq M$ любого x из рассматриваемого множества и любого $N < n$ выполнено $f_{m,N}(x) = 0$. Действительно, пусть не так. Тогда диагональным методом можно построить базовую окрестность, в которую не попадет никакой элемент из последовательности (для некоторых элементов), что будет противоречить равномерной сходимости.

Таким образом можно было с самого начала считать, что для всех $m, k < n$ и x имеет место $f_{m,k}(x) = 0$.

Тогда ясно из равномерной сходимости, что для наперед заданного числа k существует M, что при $m > M$ в разложении ряда $\frac{1}{(1-\frac{a}{x})}(f_m(x) - f(x))$ все коэффициенты при всех степенях, меньших k равны 0, и тогда несложно отсюда вывести утверждение предложения.

Случай $\nu(a) < 0$ разбирается аналогично.

Утверждение полностью доказано. □

Важным частным случаем равномерной сходимости, который нам пригодится в дальнейшем будет являться равномерная сходимость степенного ряда на множестве. В следующем подпункте будет доказано 2 важных результата, которые будут ключевыми в доказательстве интегральной теоремы Коши.

3.3. Равномерная сходимость рядов

Предложение 3. *Пусть ряд* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_i$, *где* $a_i \in K$ *сходится. Тогда степенной ряд* $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится равномерно на множестве* $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$.

Доказательство. Будем, как обычно, считать, что $K = E\{\{t\}\}$ (случай $K = E((t))$ разбирается аналогично)

Заметим, что такой степенной ряд сходится поточечно.

Пусть $a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k$.

Согласно утверждению 1 предложения 1 K — полное топологическое пространство, значит достаточно проверять сходимость последовательности частичных сумм в себе. Как обычно, зафиксируем окрестность U_{V_i}. Заметим, что последовательность частичных сумм изначального ряда также сходится в себе, а значит $a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. Таким образом, существует M, такое, что $a_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n,k} t^k$ лежит в U_{V_i} для любого $n \geq M$, то есть $a_{n,k} \in V_i$. Пусть теперь $n \geq m \geq M$. Тогда имеем:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j x^j = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (\sum_{j=m}^{n} a_{j,i} x^j) t^i.$$

Поскольку $a_{n,j} \in V_j$ для любого j и $i \geq M$, и, кроме того, $x^j \in E$ и $\nu_E(x) = 0$ для любого $j \in \mathbb{Z}$, получаем, что $\sum\limits_{j=m}^{n} a_j x^j \in V_j$.

Значит ряд сходится в себе, и следовательно сходится поточечно.

Проверим равномерную сходимость ряда на рассматриваемом множестве (с теми же U_{V_i}) и M.

По утверждению 3 леммы 1 имеем:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i) t^k.$$

Докажем, что $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_{i,k} x^i \in V_k$ для любого целого k и любого натурального $n \geq M$. Это сразу видно для $a_{i,k} x^i$. Раз это верно для каждого слагаемого, то, разумеется, и для суммы ряда.

Значит по определению равномерной сходимости наш ряд сходится равномерно на множестве $\{x : x \in E, \nu_E(x) = 0\}$. □

Следствие 1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится для какого-то* x_0 *вида* rq_0*, где* $r \in K$ *и не равен* 0*, а* $q_0 \in E$*, причем* $\nu_E(q_0) = 0$*. Тогда* $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ *сходится равномерно на множестве* $\{x : x = rq, q \in E\}$ *(на множестве представимых в таком виде элементов).*

Доказательство. Пусть $b_i = a_i x_0^i$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i$ сходится. Следовательно, по предложению 3 ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} b_i x^i$ равномерно сходится на множестве $\{x \in E : \nu_E(x) = 0\}$. Перепишем ряд $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ через b_i:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x_0^i \left(\frac{x}{x_0}\right)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} b_i \left(\frac{q}{q_0}\right)^i.$$

Отсюда ясно, что $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ сходится равномерно на рассматриваемом множестве, что и требовалось доказать. □

4. Определение интеграла Шнирельмана

Определение 4. *Последовательность многочленов* $g_1(X), ..., g_n(X), ... \in \mathbb{Z}[X]$ *называется допустимой, если*

1. *Для любого* j *многочлен* $g_j(X)$ *не имеет кратных корней в* $\mathbb{Q}_p^{alg}$.
2. $g_j(X) = X^{n_j} + c_{j,1}X^{n_{j,1}} + ... + c_{j,\mu}X^{n_{j,\mu}} + c_0$*, где* $c_{j,i}$ *и* $c_0 \in \mathbb{Z}$.
3. $|n_j|_p = 1$.
4. $\nu(c_0) = 0$.
5. $n_j - n_{j,1} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$.
6. $n_{j,\mu} \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$.

Определение 5. *Интеграл Шнирельмана функции* $f(X) : U \to \overline{K^{alg}}$ *(*U *— какое-то подмножество* $\overline{K^{alg}}$*) с центром в* $x_0 \in \overline{K^{alg}}$ *и радиусом* $r \in \overline{K^{alg}}$ *по определению равен*

$$\int_{x_0,r,g} f(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i),$$

где сходимость понимается в смысле топологии двумерного локального поля,

а α_i *— корни многочлена* g_j *(их ровно* n_j *в силу того, что многочлен рассматривается в алгебраическом замыкании и у него нет кратных корней), лежат в* $\mathbb{Q}_p^{alg}$ *(т.е. не зависят от* t*).*

Определение 6. *При тех же обозначениях будем говорить, что функция* f *интегрируема на множестве* $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$*, если интеграл в круге с центром в* x_0 *и радиуса* r *корректно задан. Из теоремы Коши будет следовать, что интегрируемость не зависит от выбора подходящей последовательности многочленов* $g_j(X)$.

Замечания 1. *1. Это определение действительно обобщает интеграл Шнирельмана для одномерного случая (определение для одномерных локальных полей см. в [8]).*

2. Мы рассматриваем такой интеграл только при условии, что многочлен $f(X)$ задан в соответствующих точках и предел определен.

3. В этих определениях нигде, по существу, не использовался вид двумерного локального поля, поэтому определение годится для произвольного двумерного локального поля. Более того, дословно так же можно определить интеграл Шнирельмана для произвольного n-мерного локального поля и таким образом предполагается дальнейшее обобщение полученных ниже результатов для произвольных многомерных полей.

4. Из определения допустимой последовательности многочленов сразу следует, что $\nu(\alpha_i)=0$ для всех i.

Действительно, если $\nu(\alpha_i) > 0$, то $\nu(g_j(\alpha_i)) = \nu(c_0) = 0$ что не верно.

Если же $\nu(\alpha_i) < 0$, то нетрудная проверка показывает, что $\nu(g_j(\alpha_i)) = n_j\nu(\alpha_i) < 0$. Снова приходим к противоречию.

Таким образом, единственный вариант это $\nu(\alpha_i) = 0$.

5. Простейшие свойства интеграла

Перед доказательством основной теоремы этой работы сформулируем и докажем несколько простых, но важных свойств интеграла.

Будем использовать те же обозначения, что и в предыдущем пункте.

Будем считать, что $K = E\{\{t\}\}$ или $K = E((t))$.

Свойство 1. *Интеграл линеен, то есть для любых функций $f(x)$, $g(x)$ и элемента поля c*

1. $\int_{x_0,r,g}(f(x)+g(x)) = \int_{x_0,r,g} f(x) + \int_{x_0,r,g} g(x)$.
2. $\int_{x_0,r,g} cf(x)=c\int_{x_0,r,g} f(x)$.

Доказательство. Следует из линейности предела. □

Свойство 2. *Пусть $f_m(X)$ — последовательность интегрируемых на множестве $\{x : \nu(x-x_0) = \nu(r)\}$ функций, и последовательность $f_m(X)$ сходится равномерно на $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$ к функции $f(X)$, которая тоже интегрируема на этом множестве. Тогда*

$$\int_{x_0,r,g} f_m(x) \to \int_{x_0,r,g} f(x).$$

Доказательство. Прежде всего можно считать $f(X) = 0$ (линейность интеграла), а точку $x_0 = 0$.

Пусть U_{V_i} — базовая окрестность нуля. Нужно показать, что существует целое M такое, что $\int_{0,r,g} f_m(x) \in U_{V_i}$ для любого $m > M$.

$$\int_{0,r,g} f_m(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i).$$

Множитель r не зависит от j и m и не влияет на сходимость к 0, поэтому его можно не учитывать. Пусть $V_i = \{x \in E : \nu_E(x) \geq a_i\}$, где a_i — какое-то целое число, а ν_E — нормирование в E. Ясно, что $\nu(\frac{\alpha_i}{n_j}) = 0$ и если $f_m(x) \in U_{V_i}$ для любого $x \in \{x : \nu(x) = \nu(r)\}$ (здесь пользуемся равномерной сходимостью функций), то $\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{\alpha_i}{n_j} f_m(r\alpha_i) \in U_{V_i}$. Тогда и интеграл $\int_{0,r,g} f_m(x)$ тоже лежит в этой окрестности. Значит последовательность интегралов действительно сходится к нулю, свойство доказано. $\square$

Замечание 3. *На самом деле в формулировке свойства 2 интегрируемость f необязательно требовать. Она следует из равномерной сходимости интегрируемых функций автоматически.*

Доказательство. Считаем, как обычно, $x_0 = 0$. Заметим, что последовательность интегралов $\int_{0,r,g} f_m(x)$ сходится. Действительно, фиксируем базовую окрестность нуля U и воспользуемся тем, что последовательность f_m равномерно сходится в себе. Тогда ясно, что домножение на $\frac{\alpha_i}{n_j}$ и взятие суммы не нарушает это свойство. Отсюда несложно вывести, что последовательность интегралов равномерно сходится в себе. Тогда из полноты рассматриваемой топологии последовательность интегралов сходится.

Используя равномерную сходимость функций к f легко получить, что

$$\lim_{j\to+\infty} \sum_{g(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \lim_{n\to+\infty} \int_{0,r,g} f_m(X),$$

что и означает интегрируемость f. $\square$

Далее в работе будут сформулированы и доказаны 2 результата — аналог интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей и связь между интегралом Шнирельмана и символом Гильберта.

6. Интегральная теорема Коши для двумерных локальных полей

Зафиксируем элементы $x_0, r \in K$.

Теорема 2. *Пусть $P(X) \in K[[X]]$ сходится на множестве $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$, а многочлен $Q(X) \in K[X]$ не имеет корней на множестве $\{x : \nu(x - x_0) = \nu(r)\}$.*

Тогда:

1. *$\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ корректен не зависит от последовательности допустимых многочленов g_j.*
2. *$\int_{x_0,r,g} \frac{P(x)}{Q(x)}$ равен сумме вычетов функции $\frac{P(X)}{Q(X)}$ по всем полюсам внутри множества $\{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$*
3. *Пусть $P(X)$ как и выше, а $Q(X) = X^m(1 - R(X))$, где $R(X) \in K[[X]]$, такой, что $\nu(R(x)) > 0$ для любого $x \in \{x : \nu(x - x_0) \geq \nu(r)\}$. Кроме того, предположим, что $\nu(r) > 0$.*

Тогда для дроби $f(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$ верны утверждения $1 - 2$ этой теоремы.

Таким образом из этих трех предложений получаем корректность определения и даже метод подсчета интеграла.

Следствие 2. *Можно опускать индексы и считать последовательность многочленов ("контур") такой:*

$g_j = X^{n_j} - 1$, $(n_j, p) = 1$, $n_j \to +\infty$ *при* $j \to +\infty$

Доказательство. Простая проверка $\square$

Теперь будем доказывать теорему 2:

Доказательство. Сперва заметим, что можно считать, что $x_0 = 0$ (т.е. предполагая, что из этого случая легко выводится общий случай). Для удобства обозначим $\widetilde{f}(y) := f(x_0 + y)$.

Действительно, по определению

$$\int_{x_0,r,g} f(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(x_0 + r\alpha_i) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} \widetilde{f}(r\alpha_i) = \int_{0,r,g} \widetilde{f}(x).$$

Далее, интеграл $\int_{0,r,g} \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$ равен сумме вычетов $\frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}$ по всем полюсам внутри множества $\{x : \nu(x) > \nu(r)\}$. Заметим, что

$$\operatorname{res}_a \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a)^{n-1} \widetilde{f}(z) =$$

$$= \lim_{z\to a+x_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (z-a-x_0)^{n-1} f(z+x_0-x_0) = \operatorname{res}_{x_0+a} \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Поэтому можно с самого начала считать, что $x_0 = 0$.

Дальнейшее доказательство мы будем проводить в несколько этапов (случаев).

1. Пусть $f(X) = X^k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int_{0,r,g} f(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i).$$

   Заметим, что $\sum_{g_j(\alpha_i)=0} \frac{r\alpha_i}{n_j} f(r\alpha_i) = \frac{1}{n_j} \sum_{g_j(\alpha_i)=0} (r\alpha_i)^{k+1}$.

   Разберем 3 случая:

   (a) $k \geq 0$.

   По теореме Виета коэффициенты многочлена g_j при степенях $1, ..., k+1$ равны 0 при достаточно больших j (так как $n_{j,\mu} \to +\infty$). Тогда ясно, что и сумма стремится к 0.

   Из линейности сразу получаем, что интеграл от любого многочлена равен 0.

   (b) $k = -1$. Поскольку корней у g_j ровно n_j получаем, что $\int_{0,r,g} \frac{1}{x} = 1$.

   (c) $k < -1$. Пусть $\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}$. Тогда нетрудно понять, что рассматриваемая сумма — это многочлен от сумм $\beta_1 + ... + \beta_n$, $\beta_1\beta_2 + ... + \beta_{n-1}\beta_n$ и так далее от $\beta_1\beta_2...\beta_k + ... + \beta_{n-k+1}...\beta_n$ — из условия $n_j - n_{j,1} \to +\infty$ при $j \to +\infty$ следуют, что рано или поздно все эти симметрические функции станут равны 0.

   Таким образом при $k < -1$ $\int_{0,r,g} \frac{1}{x^k} = 0$.

2. Пусть $f(X) = \frac{P(X)}{X-a}, P(X) \in K[X]$, $\nu(a) > \nu(r)$. Из теоремы Безу и первого пункта доказательства получаем, что достаточно доказывать для $P(X) = 1$.

$$\frac{1}{X-a} = \frac{1}{X} \frac{1}{1-\frac{a}{X}} = \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{X}\right)^k = \frac{1}{X} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r\frac{X}{r}}\right)^k.$$

   Поскольку в определении интеграла подставляются только точки вида $r\alpha_i$, то по утверждению 4 леммы 1 ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{r(\frac{X}{r})}\right)^k$ сходится поточечно для $x = r\alpha_i$, следовательно по предложению 3 этот ряд сходится на множестве $\{x : x = r\alpha_i$, где α_i — корень многочлена g_j для некоторого $j\}$ равномерно. Здесь стоит отметить, что корни α_i вообще говоря не обязаны лежать в E, но утверждения, на которые здесь идут отсылки в данным случае остаются верными, поскольку α_i берутся из конечных алгебраических расширений одномерного локального поля $\mathbb{Q}_p$.

По предложению 2 получаем, что последовательность частичных сумм $\frac{1}{X}\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{X}\right)^k$ сходится равномерно к бесконечной сумме и тогда по свойству 2 интегралов получаем,

$$\int_{0,r,g}\frac{1}{X}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{X}\right)^k=\lim_{n\to+\infty}\int_{0,r,g}\frac{1}{X}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{a}{X}\right)^k.$$

Тогда из случаев 1b и 1c получаем, что этот предел равен 1.

Аналогично, используя случаи 1a-1c разбираются случаи:

3. $f(X)=\frac{P(X)}{X-a}, P(X)\in K[X]$, $\nu(a)<\nu(r)$.

4. Случай $Q(X)=(X-a)^n$, $\nu(a)\neq\nu(r)$.

5. Теперь разберем случай, когда $P(X)\in K[[X]]$, а $Q(X)=(X-a)^n$ и $\nu(a)>\nu(r)$.

   $P(X)$ сходится на множестве $\{x:\nu(x)\geq\nu(r)\}$, значит последовательность многочленов $P_m(X)$ сходится $P(X)$, где P_m — сумма первых m членов ряда $P(X)$. По предложению 3 получаем, что $P_m(X)$ сходится равномерно к $P(X)$ на множестве $\{x:x=r\alpha_i,\ \alpha_i$ — корень g_j для некоторого $j\}$ и по предложению 2 получаем, что $\frac{P_m(X)}{(X-a)}\rightrightarrows\frac{P(X)}{(X-a)}$. По свойству 2 интегралов Шнирельмана получаем, что $\int_{0,r,g}\frac{P_m(X)}{(X-a)^n}\to\int_{0,r,g}\frac{P(X)}{(X-a)^n}$.

   Примечание: строго говоря α_i могут не лежать в E, но от перехода к алгебраическим расширениям поля E утверждения, на которые идут отсылки остаются по-прежнему верными.

   Заметим, что отсюда немедленно последует требуемое:

   $$\int_{0,r,g}\frac{P_m(X)}{(x-a)^n}=\frac{1}{(n-1)!}P_m^{(n-1)}(a)\to\frac{1}{(n-1)!}P^{(n-1)}(a)=\mathrm{res}_a f(X)$$

   (при $m\to+\infty$). Тогда ясно, что и $\int_{0,r,g}\frac{P(X)}{(x-a)^n}=\mathrm{res}_a f(X)$.

   Из всего сказанного выше следует нужная сходимость.

   Доказательство случая, когда $\nu(a)<\nu(r)$ принципиально ничем не отличается. Важно, только, что $\nu(a)\neq\nu(r)$.

6. Общий случай. Пусть знаменатель $Q(X)=(X-a_1)^{\alpha_1}(X-a_2)^{\alpha_2}...(X-a_n)^{\alpha_n}$ (возможно, придется перейти к конечному расширению поля K, в котором $Q(X)$ раскладывается на линейные множители, для дальнейших рассуждений это непринципиально), тогда по линейному разложению НОД существуют многочлены $A(X)(X-a_1)^{\alpha_1}+B(X)(X-a_2)^{\alpha_2}...(X-a_n)^{\alpha_n}=1$. Пользуясь этим можно свести подсчет исходного интеграла к подсчету интегралов от функций, у знаменателей которых количество различных корней на 1 меньше, чем было многочленов. В итоге получим интегралы из предыдущего случая и нетрудная аккуратная проверка показывает, что искомое равенство верно.

   Утверждения 1-2 проверены.

Осталось утверждение 3.

Ряд $\frac{1}{1-R(X)}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}R(X)^k$ (поскольку $\nu(R(X))>0$).

Тогда по секвенциальной непрерывности произведения получаем, что

$$\frac{P(X)}{X^m(1-R(X))} = \frac{1}{X^m}\sum_{k=0}^{+\infty} P(X)R(X)^k.$$

Применяя случай 1 получаем, что после раскрытия скобок и приведения подобных все слагаемые ряда $P(X)R(X)^k$ обнулятся (когда от них возьмем интеграл), кроме слагаемого при степени -1. Из курса анализа мы знаем, что коэффициент при степени -1 будет соответствовать вычету в 0. Кроме того, ясно, что на множестве $\{x : \nu(x) \geq \nu(r)\}$ у функции $f(X)$ особенность есть только в 0.

Таким образом, в этом случае действительно имеет место утверждение теоремы Коши.

Утверждение 3 проверено. □

Замечания 2. *1. Таким образом можно опускать индекс g под интегралом.*

2. Результат теоремы 2 является дискретным аналогом интегральной теоремы Коши для двумерных локальных полей.

7. Связь интеграла Шнирельмана с символом Гильберта

Из интегральной теоремы Коши получаем следствия, которые связывают интеграл Шнирельмана с символом Гильберта для двумерных локальных полей.

Будем здесь считать, что поле K имеет вид $E\{\{t\}\}$, где E — конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$.

Следствие 3.

$$\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{s} = \mathrm{res}_X\left(\frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}{s}\right).$$

Доказательство. Ряд $\Phi(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ сходится на множестве $\{x : \nu(x) \geq 0\}$ (см. [1]).

Чтобы применить утверждение 3 теоремы 2 нужно убедиться, что $Q(X)$ имеет вид, как в теореме (возможно, с ненулевым константным множителем).

Рассмотрим знаменатель $s(X) = z(X)^q - 1$. Пусть $z(X) = z_0(X) + 1$.

Тогда $s(X) = (z_0(X)+1)^q - 1 = z_0(X)(z_0(X)^{q-1} + ... + q)$ (Бином Ньютона).

Пусть $\zeta = 1 + \zeta_0$. Тогда имеем $(1+\zeta_0)^q = 1$ и, очевидно, $\zeta_0 \neq 0$.

Раскроем по Биному Ньютона: $(1+\zeta_0)^q = 1 + \binom{q}{1}\zeta_0 + \binom{q}{2}\zeta_0^2 + ... + \zeta_0^q = 1$. Учитывая, что $\zeta_0 \neq 0$ получаем, что $\binom{q}{1} + \binom{q}{2}\zeta_0^1 + ... + \zeta_0^{q-1} = 0$. Отсюда сразу следует, что $\nu(\zeta_0) > 0$ и, учитывая неархимедовость нормирования ν имеем равенство:

$n\nu(p) = (p^n - 1)\nu(\zeta_0) > 0$.

Тогда ясно, что $z_0(X)$ имеет нужный вид. Осталось это проверить для второго множителя (в знаменателе дроби).

Поскольку $\nu(p) > 1$ получаем, что $\nu(z_0^{q-1} + ... + z_0\binom{q}{2}) > \nu(q)$.

Тогда можно отсюда вывести, что $Q(X) = aX^m(1 - R(X))$, где a — ненулевой множитель, а $R(X)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Применяя утверждение 3 теоремы 3, получаем в точности требуемое, следствие доказано. □

В силу явной формулы для символа Гильберта (см.[6]), получаем нужную связь:

Следствие 4. $(\{\alpha_1,\alpha_2\}, y)_q = \zeta^{\mathrm{tr}(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,y)}{s})}$.

Доказательство.

$$(\{\alpha_1,\alpha_2\}, y)_q = \zeta^{\mathrm{tr}(\frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,y)}{s})} = \zeta^{\mathrm{tr}(\int_{0,p} \frac{\Phi(\alpha_1,\alpha_2,y)}{s})}.$$

□

8. Заключение

Доказанный в работе аналог хорошо известной в анализе интегральной теоремы Коши явно выражает связь между теорией алгебраических чисел и теорией алгебраических функций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhukov, I., Geometry & Topology Monographs Volume 3: Invitation to higher local fields Part I, section 1, pages 5–18

2. Hasse H., Bericht uber i euere U t rsuchungen und Frobleme aus der Theorie der algebraische I Zahlkorper, II, Rezipro/itats; setz, Lip/ig¯Berlin, 1930.

3. Kato K., A generalition of local class field theory by using K-groups.1 J.Fac.Sci.Univ.Tokio, Sect 1 Math.26(1979), No2, 303-376

4. Kato K., A generalization of local class field theory by using K-groups. II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 3, 603–683. 4

5. Востоков С. В. Явная форма закона взаимности.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, № 6, с. 1288—1321.

6. Востоков С. В., Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1985, том 49, выпуск 2, 283–308

7. Востоков С. В., Жуков И. Б., Фесенко И. Б., К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции, Алгебра и анализ, 1990, том 2, выпуск 4, 91–118

8. Востоков С. В., Иванов М. А., Интегральная теорема Коши и классический закон взаимности, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, том 154, книга 2, 73–82

9. Иванов М. А., Произведение символов p^n-х степенных вычетов как абелев интеграл, Алгебра и анализ, 2012, том 24, выпуск 2, 120–129

10. Ломадзе В. Г., К теории ветвления двумерных локальных полей, Матем. сб., 1979, т. 109 (151), номер 3(7), 378–394

11. Милнор Дж. Введение в алгебраическую K-теорию. М.: Мир, 1974, 196 с.

12. Паршин А. Н. Поля классов и алгебраическая K-теория.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 1, с. 253—254.

13. Паршин А. Н. Локальная теория полей классов.— Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1984, т. 165, с. 143—170.

14. Фесенко И. Б., Теория локальных полей. Локальная теория полей классов. Многомерная локальная теория полей классов, Алгебра и анализ, 1992, том 4, выпуск 3, 1–41

15. Шафаревич И. Р., Общий закон взаимности, Матем. сб., 1950, том 26(68), номер 1, 113–146

REFERENCES

1. Fesenko I.B. 1993, "Theory of local fields. Local class field theory. Multidimensional local class field theory St. Petersburg Math. J. 4 (1993), no. 3, pp. 403–438.

2. Fesenko, I.B. Vostokov, S.V. & Zhukov, I.B. 1990, "On the theory of multidimensional local fields. Methods and constructions Algebra i Analiz 2 (1990), no. 4, 91–118; English transl. in Leningrad Math. J. 2 (1991).

3. Hasse, H. 1930, "Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper Teil II: Reziprozitätsgesetz., vol.6 of Jahresber. DMV, Ergänzungsband. B. G. Teubner. IV + 204 pp.

4. Ivanov, M.A. 2013, "The product of symbols of p^nth power residues as an Abelian integral St. Petersburg Mathematical Journal, vol. 24:2, pp. 275–281. doi/10.1090/S1061-0022-2013-01238-6

5. Kato, K. 1979, "A generalization of local class field theory by using K-groups. I Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics 26, no. 2, pp. 303-376. doi/10.15083/00077072

6. Kato, K. 1980, "A generalization of local class field theory by using K-groups. II Journal of the Faculty of Science, the University of Tokyo. Sect. 1 A, Mathematics 27, no. 3, pp. 603–683. doi/10.15083/00077073

7. Lomadze, V.G. 1980, "On the ramification theory of two-dimensional local fields Mathematics of the USSR-Sbornik, vol. 37:3, pp. 349–365. doi/10.1070/SM1980v037n03ABEH001957

8. Milnor J. 1971, "Introduction to algebraic K-theory Ann. Math. Stud., no. 72, XIV, 184 pp.

9. Parshin A.N. 1975, "Class fields and algebraic K-theory Uspekhi Mat. Nauk, vol. 30, no. 1, pp.253–254.

10. Parshin A.N. 1985, "Local class field theory Proc. Steklov Inst. Math., 1985, no. 3.

11. Shafarevich I.R. 1950, “A general reciprocity law”, Mat. Sb. (N.S.), 26(68):1 (1950), pp. 113–146

12. Vostokov, S.V. 1979, "Explicit form of the law of reciprocity Mathematics of the USSR-Izvestiya, vol. 13, no. 3, pp. 557–588. doi/10.1070/IM1979v013n03ABEH002077

13. Vostokov, S.V. 1986, "Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field Mathematics of the USSR-Izvestiya, vol.26(2):263. doi/10.1070/IM1986v026n02ABEH001141

14. Vostokov, S.V. & Ivanov, M.A. 2012, “Cauchy's integral theorem and classical reciprocity law”, Uch. Zap. Kazan. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki 154 (2), pp. 73–82

15. Zhukov, I. 2000, "Higher dimensional local fields Geometry & Topology Monographs, vol. 3, pp. 5–18. doi: 10.2140/gtm.2000.3.5

Получено 25.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.