ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 3.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-18-28

О тригонометрической сумме по модулю разбиения вещественной оси

А. А. Артемов, В. Н. Чубариков

Александр Андреевич Артемов — студент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: alexartemov21@gmail.com
Владимир Николаевич Чубариков — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

Найдена оценка тригонометрической суммы вида

$$S=\sum_{a<t_s\le b} e^{2\pi i f(t_s)},$$

где $a\ge 0, a\le b$ — вещественные числа, t_s — возрастающая к бесконечности последовательность неотрицательных чисел, $f(t)$ — гладкая вещественная функция.

Здесь также доказываются аналоги формул Эйлера, Сонина, Пуассона и ван дер Корпута для рассматриваемой суммы.

Пусть задана последовательность Δ точек

$$0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_s<\dots, \lim_{n\to\infty} t_n=+\infty,$$

на положительной полуоси вещественной прямой.

Для неотрицательного числа x определим аналог целой части $[x]_\Delta$, отвечающий последовательности $\Delta : [x]_\Delta = t_s$, если $t_s\le x<t_{s+1}, s\ge 0$. Дробная часть $\{x\}_\Delta$ определяется равенством

$$\{x\}_\Delta=\frac{x-t_s}{t_{s+1}-t_s},$$

если $t_s\le x<t_{s+1}, s\ge 0$, причём $0\le\{x\}_\Delta<1$.

Определим аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5-\{x\}_\Delta$

Тогда справедлив следующий аналог теоремы ван дер Корпута для разбиений. *Пусть $\Delta=\{t_s\}, 0=t_0<t_1<\dots<t_s<\dots,$ — разбиение полуоси $t\ge 0$ вещественной прямой, $\delta_s=t_{s+1}-t_s\ge 1, \delta(a,b)=\max\limits_{a\le x\le b}\rho'_\Delta(x)$ и пусть задана последовательность $\Delta_0=\{\mu_s\},\quad \mu_s=0,5(t_s+t_{s+1}), s\ge 0$, и точки $a,b\in\Delta_0$, пусть, также, $f'(x)$ является непрерывной, монотонной и знакопостоянной функцией в промежутке $a<x\le b$, причём найдётся постоянная δ такая, что $0<2\delta\delta^{-1}(a,b)<1$ и что для всех x из этого промежутка справедливо неравенство $|f'(x)|\le\delta$. Тогда имеем*

$$\sum_{a<t_s\le b} e^{2\pi i f(t_s)}=\int\limits_a^b \rho'_\Delta(x)e^{2\pi i f(x)}\,dx+10\theta\frac{\delta}{1-\delta\delta^{-1}(a,b)}, |\theta|\le 1.$$

Ключевые слова: разбиение вещественной оси; тригонометрические суммы по модулю разбиения; теорема Ван дер Корпута о замене тригонометрической суммы по модулю разбиения на интеграл; формулы Эйлера, Сонина, Пуассона суммирования по точкам разбиения.

Библиография: 16 названий.

Для цитирования:
А. А. Артемов, В. Н. Чубариков. О тригонометрической сумме по модулю разбиения вещественной оси // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 3, с. 18–28.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 3.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-3-18-28

On the trigonometric sum modulo subdivision of the real axis

A. A. Artemov, V. N. Chubarikov

Alexander Andreevich Artemov — student, Faculty of Mechanics and Mathematics, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: alexartemov21@gmail.com
Vladimir Nikolaevich Chubarikov — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

The estimate of the trigonometric sum of the kind

$$S = \sum_{a<t_s\leq b} e^{2\pi i f(t_s)},$$

where $a \geq 0, a \leq b$ are real numbers, t_s is increasing to infinity of non-negative numbers, $f(t)$ is a smooth real function, is found.

Here also there are proved the analogues of Euler's, Sonin's, Poisson's and van der Corput's formulas for considering sum.

Let be given the sequence of Δ points

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < \ldots, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty,$$

on the positive half-axis of the real line.

For non-negative number x we define the analogue of the integer part $[x]_\Delta$, meeting to the sequence $\Delta : [x]_\Delta = t_s$, if $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$. The fractional part $\{x\}_\Delta$ is defined by the equality

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

if $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$, moreover $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$.

We define the analogue of the Bernoulli function meeting to the sequence $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5-$ $-\{x\}_\Delta$.

Then is valid the following analogue of the van der Corput's theorem for subdivisions.

Let $\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < \dots$, be a subdivision of the half-axis $t \geq 0$ of the real line, $\delta_s = t_{s+1} - t_s \geq 1, \delta(a,b) = \max_{a\leq x\leq b} \rho'_\Delta(x)$, and let be given the sequence $\Delta_0 = \{\mu_s\}, \quad \mu_s = 0,5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$, and points $a, b \in \Delta_0$, let, also, $f'(x)$ be continuous, monotonic sign-constant in the interval $a < x \leq b$, moreover there exists the constant δ such that $0 < 2\delta\delta^{-1}(a,b) < 1$ and that for all x from this interval is valid inequality $|f'(x)| \leq \delta$. Then we have

$$\sum_{a<t_s\leq b} e^{2\pi i f(t_s)} = \int\limits_a^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i f(x)}\, dx + 10\theta \frac{\delta}{1 - \delta\delta^{-1}(a,b)}, |\theta| \leq 1.$$

Keywords: subdivision of the real axis; the trigonometric sum modulo subdivision; Van der Corput's theorem on replacing a trigonometric sum modulo subdivision to an integral; the Euler's, Sonin's, Poisson's summation formulas on points of subdivision.

Bibliography: 16 titles.

For citation:
A. A. Artemov, V. N. Chubarikov, 2020, "On the trigonometric sum modulo subdivision of the real axis", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 3, pp. 18–28.

1. Введение

Настоящую статью авторы посвящают светлой памяти Г. И. Архипова.

В работе [8] (см. [9], с. 355-357, [5], [1], с. 25) была доказана следующая теорема, уточняющая остаточный член в формуле ван дер Корпута [3], [4] о замене тригонометрической суммы на интеграл.

Теорема 1. *Пусть a и b — полуцелые числа, $f(x)$ — вещественная функция на (a,b), причём $f'(x)$ непрерывна и монотонна на (a,b) и $|f'(x)| \leq \delta < 1$. Тогда справедлива формула*

$$\sum_{a<n<b} e^{2\pi i f(n)} = \int\limits_a^b e^{2\pi i f(x)}\, dx + R_0,$$

где

$$|R_0| \leq \frac{4\delta}{1-\delta}.$$

Целью настоящей работы является оценка тригонометрической суммы S по модулю разбиения положительной полуоси вещественной прямой,

$$S = \sum_{s\leq P} e^{2\pi i f(t_s)},$$

где t_s — возрастающая последовательность неотрицательных чисел, $f(t)$ — гладкая вещественная функция.

Это предполагает изучение тригонометрических сумм для гладких функций или функций ограниченной вариации на "временной" последовательности, что может привести к решению задач математической физики.

Здесь доказываются аналоги формул Эйлера, Сонина, Пуассона и ван дер Корпута для разбиения Δ.

Рассмотрим последовательность Δ точек

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s < \dots, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty,$$

на полуоси вещественной прямой.

Для неотрицательного числа x определим аналог целой части $[x]_\Delta$, отвечающий последовательности $\Delta : [x]_\Delta = t_s$, если $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$. Дробная часть $\{x\}_\Delta$ определяется равенством

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

если $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$, причём $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$.

Определим также аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta$

Теорема 2. (Теорема ван дер Корпута для разбиений). *Пусть*

$$\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s < \ldots,$$

— разбиение полуоси $t \geq 0$ вещественной прямой, $\delta_s = t_{s+1} - t_s \geq 1, \delta(a, b) = \max\limits_{a \leq x \leq b} \rho'_\Delta(x)$ и пусть задана последовательность $\Delta_0 = \{\mu_s\}, \quad \mu_s = 0,5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$, и точки $a, b \in \Delta_0$, пусть, также, $f'(x)$ является непрерывной, монотонной и знакопостоянной функцией в промежутке $a < x \leq b$, причём найдётся постоянная δ такая, что $0 < 2\delta\delta^{-1}(a, b) < 1$ и что для всех x из этого промежутка справедливо неравенство $|f'(x)| \leq \delta$. Тогда имеем

$$\sum_{a < t_s \leq b} e^{2\pi i f(t_s)} = \int\limits_a^b \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i f(x)}\, dx + 10\theta \frac{\delta}{1 - \delta\delta^{-1}(a, b)}, |\theta| \leq 1.$$

2. Вспомогательные утверждения

Для неотрицательного числа x определим аналог целой части $[x]_\Delta$, отвечающий последовательности $\Delta : [x]_\Delta = t_s$, если $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$. Дробная часть $\{x\}_\Delta$ определяется равенством

$$\{x\}_\Delta = \frac{x - t_s}{t_{s+1} - t_s},$$

если $t_s \leq x < t_{s+1}, s \geq 0$, причём $0 \leq \{x\}_\Delta < 1$.

Определим также аналог функции Бернулли, отвечающий последовательности $\Delta : \rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta$

Лемма 1. (Формула Л. Эйлера для разбиений.) *Пусть $f(x)$ — гладкая функция при $x \geq 0$. Тогда*

$$\sum_{a < t_s \leq x} f(t_s) - \rho_\Delta(x) f(x) = -\int\limits_a^x \left(\rho'_\Delta(u) f(u) + \rho_\Delta(u) f'(u)\right)\, du - \rho_\Delta(a) f(a).$$

Доказательство. Правая часть равенства равенства представляет функцию $F(x)$, а левая часть — функцию $G(x)$ на отрезке $[a, b]$. На этом отрезке обе функции — непрерывны, поскольку в точке $x \in \Delta$ “скачок суммы гасится скачком функции $-\rho_\Delta(x) f(x)$”, функция $G(x)$ непрерывна по свойству интеграла Римана как функции верхнего предела интегрирования. В остальных точках функции $F(x)$ и $G(x)$ дифференцируемы и их производные равны $-\left(\rho'_\Delta(u) f(u) + \rho_\Delta(u) f'(u)\right)$. Кроме того, $F(a) = G(a) = -\rho_\Delta(a) f(a)$. Тогда, как первообразные $F(x) = G(x)$ для любого $x \in [a, b]$. Лемма доказана. $\square$

Далее определим функцию $\sigma_\Delta(x) = \int\limits_0^x \rho_\Delta(u)\, du$. Из формулы Л. Эйлера суммирования значений гладкой функции по целым точкам, отвечающим последовательности Δ, имеем интегрированием по частям аналог формулы Н. Я. Сонина.

Лемма 2. (Формула Н. Я. Сонина для разбиений). *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на полуоси $x \geq 0$. Тогда*

$$\sum_{a<t_s\leq x} f(t_s) = -\int\limits_a^x \rho'_\Delta(x)f(x)\,dx + \rho_\Delta(x)f(x) - \rho_\Delta(a)f(a) -$$

$$-\sigma_\Delta(x)f'(x) + \sigma_\Delta(a)f'(a) + \int\limits_a^x \sigma_\Delta(x)f''(x)\,dx.$$

Лемма 3. (Остаток ряда Фурье периодизированной первой функции Бернулли). *Пусть*

$$\rho(x) = 0,5 - \{x\}, s_n(x) = \sum_{m=1}^n \frac{\sin(2\pi mx)}{\pi m}, n \geq 1.$$

Тогда при любом натуральном n справедлива формула

$$\rho(x) = s_n(x) + \sigma_n(x),$$

где

$$|\sigma_(x)| \leq r_n(x) = \frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2\pi x}}$$

Доказательство. См. [10], с. 440, теорема 1. □

Пусть, как и раньше, $\Delta = \{t_s\}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s < \dots, \delta_s = t_{s+1} - t_s, s \geq 0$. Зададим последовательность $\Delta_0 = \{\mu_s\}, \mu_s = 0,5(t_s + t_{s+1}), s \geq 0$.

Лемма 4. (Формула Пуассона для разбиений). *Пусть $a \leq b \in \Delta_0$, и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, причём найдётся число $M > 0$ такое, что $|f'(x)| \leq M$ на $[a,b]$.*

Тогда для любого натурального числа n справедлива формула

$$\sum_{a<t_s\leq b} f(t_s) = \sum_{m=-n}^n \int\limits_a^b \rho'_\Delta(x)f(x)e^{2\pi im\{x\}_\Delta}dx + R_n,$$

где

$$|R_n| \leq \frac{4M(b-a)(1+\ln n)}{n}.$$

Доказательство. Далее воспользуемся формулой Л. Эйлера (лемма 1). Имеем $\rho_\Delta(a) = \rho_\Delta(b) = 0$,

$$S = -\int\limits_a^b (\rho'_\Delta(x)f(x) + \rho_\Delta(x)f'(x))\,dx.$$

Заметим, что отсюда при $s \geq 1$ следует равенство

$$f(t_s) = -\int\limits_{\mu_{s-1}}^{\mu_s} (\rho'_\Delta(x)f(x) + \rho_\Delta(x)f'(x))\,dx.$$

При $t_s < x \leq t_{s+1}, n \geq 1$, находим

$$\rho_\Delta(x) = 0,5 - \{x\}_\Delta = 0,5 - \left\{\frac{x-t_s}{\delta_s}\right\} = \rho\left(\frac{x-t_s}{\delta}\right) = s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta}\right) + \sigma_n\left(\frac{x-t_s}{\delta}\right),$$

где для любого вещественного y

$$s_n(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2\pi ky)}{\pi k}, |\sigma_n(y)|\le r_n(y)=\frac{4}{\sqrt{1+n^2\sin^2(\pi y)}}$$

Далее представим S в виде $S=T_n+R_n$, где

$$T_n=-\sum_{a<t_s\le b}\left(\int\limits_{\mu_{s-1}}^{t_s}\left(s_n\left(\frac{x-t_{s-1}}{\delta_{s-1}}\right)f'(x)+\frac{f(x)}{\delta_{s-1}}\right)dx+\int\limits_{t_s}^{\mu_s}\left(s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)+\frac{f(x)}{\delta_s}\right)dx\right),$$

$$|R_n|\le\sum_{a<t_s\le b}\left(\int\limits_{\mu_{s-1}}^{t_s}r_n\left(\frac{x-t_{s-1}}{\delta_{s-1}}\right)f'(x)\,dx+\int\limits_{t_s}^{\mu_s}r_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)\,dx\right).$$

Интегрируя по частям, преобразуем T_n. Сначала при $a<t_s<t_{s+1}<b$ находим

$$-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)\,dx=-f(x)s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)\Big|_{t_s}^{t_{s+1}}+\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}s_n'\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\frac{2f(x)}{\delta_s}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{2\pi k(x-\mu_s)}{\delta_s}\right)dx.$$

Таким образом

$$-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\rho_\Delta'(x)f(x)\,dx-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)\,dx=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\delta_s}\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}f(x)e^{\frac{2\pi ik(x-t_s)}{\delta_s}}\,dx.$$

Аналогично, получим

$$-\int\limits_{\mu_s}^{t_{s+1}}\rho_\Delta'(x)f(x)\,dx-\int\limits_{\mu_s}^{t_{s+1}}s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)\,dx=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\delta_s}\int\limits_{\mu_s}^{t_{s+1}}f(x)e^{\frac{2\pi ik(x-t_s)}{\delta_s}}\,dx,$$

$$-\int\limits_{t_s}^{\mu_s}\rho_\Delta'(x)f(x)\,dx-\int\limits_{t_s}^{\mu_s}s_n\left(\frac{x-t_s}{\delta_s}\right)f'(x)\,dx=\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\delta_s}\int\limits_{t_s}^{\mu_s}f(x)e^{\frac{2\pi ik(x-t_s)}{\delta_s}}\,dx.$$

Следовательно,

$$T_n=\int\limits_a^b\rho_\Delta'(x)f(x)e^{2\pi im\{x\}_\Delta}dx$$

Оценим $|R_n|$. Имеем

$$|R_n|=|\int\limits_a^b\sigma_n(\{x\}_\Delta)f'(x)\,dx|\le 4M\int\limits_a^b r_n(\{x\}_\Delta)\,dx.$$

Поскольку при $t_s\le x<t_{s+1}$ справедлива цепочка соотношений

$$\int\limits_a^b r_n(\{x\}_\Delta)\,dx=8\int\limits_0^{0{,}5\delta_s}\frac{dx}{\sqrt{1+n^2\sin^2(\pi x/\delta_s)}}\le$$

$$\leq 8 \int\limits_{0}^{0{,}5\delta_s n^{-1}} dx + 8 \int\limits_{0{,}5\delta_s n^{-1}}^{0{,}5\delta_s} \frac{\delta_s dx}{2n} = 4\delta_s \frac{1+\ln n}{n}$$

получим

$$|R_n| \leq \frac{4M(b-a)(1+\ln n)}{n}.$$

Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы 2

Сначала будем предполагать, что на интервале (a,b) находится не менее двух точек последовательности Δ. Без ограничения общности можно предполагать, что $f'(x) > 0$. Воспользуемся формулой Пуассона суммирования значений функции по последовательности Δ. Имеем $a < b, a, b \in \Delta_0$. Положим $n = [8(b-a)\ln(b-a+1)] + 1$. Из леммы 4 следует, что

$$\sum_{a<t_s\leq b} f(t_s) = \sum_{m=-n}^{n} U(m) + R_n,$$

где

$$U(m) = \int\limits_{a}^{b} \rho'_\Delta(x) f(x) e^{2\pi i m\{x\}_\Delta} dx, R_n \ll \delta.$$

Заметим, что

$$U(0) = \int\limits_{a}^{b} \rho'_\Delta(x) f(x) dx.$$

Оценим $U(m)$ при $m \geq 1$. Имеем

$$U(m) = \sum_{a<t_s\leq b} (U(m,s) + U_a(m) + U_b(m),$$

где

$$U(m,s) = \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m\{x\}_\Delta)}\, dx,$$

$$U_a(m) = \int\limits_{a}^{a'} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m\{x\}_\Delta)}\, dx,$$

$$U_b(m) = \int\limits_{b'}^{b} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i (f(x) + m\{x\}_\Delta)}\, dx,$$

причём a' — ближайший к точке a член последовательности Δ, превосходящий a, и b' — ближайший к точке b член последовательности Δ, не превосходящий b.

Произведём в интеграле $U(m,s)$ замену переменной интегрирования вида

$$y = y(x) = f(x) + \frac{m(x-t_s)}{\delta_s}, y(t_s) = f(t_s), y(t_{s+1}) = f(t_{s+1}) + m.$$

Поскольку
$$|y'| = \left| f'(x) + \frac{m}{\delta_s} \right| \geq \frac{|m|}{\delta_s} - \delta \geq \frac{1}{\delta_s} - \delta > 0,$$
функция $y = y(x)$ является монотонной, существует гладкая обратная функция $x = x(y)$.

Далее, интегрируя по частям, находим
$$U(m,s) = \frac{1}{2\pi i \delta_s} \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} \frac{1}{f'(x) + \frac{m}{\delta_s}} \, de^{2\pi i y} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i \delta_s} e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \Bigg|_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} - \frac{1}{2\pi i \delta_s} \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} e^{2\pi i y} \, d\left(\frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right).$$
Следовательно,
$$2\pi i \delta_s (U(m,s) + U(-m,s)) =$$
$$= e^{2\pi i f(t_{s+1})} \left(\frac{1}{f'(x(f(t_{s+1}) + m)) + \frac{m}{\delta_s}} + \frac{1}{f'(x(f(t_{s+1}) - m)) - \frac{m}{\delta_s}} \right) -$$
$$- e^{2\pi i f(t_s)} \left(\frac{1}{f'(x(f(t_s))) + \frac{m}{\delta_s}} + \frac{1}{f'(x(f(t_s))) - \frac{m}{\delta_s}} \right) -$$
$$- \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} e^{2\pi i y} \, d\left(\frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right) - \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})-m} e^{2\pi i y} \, d\left(\frac{1}{f'(x(y)) - \frac{m}{\delta_s}} \right).$$
Отсюда получим
$$2\pi \delta_s |U(m,s) + U(-m,s)| \leq \frac{4\delta}{\frac{m^2}{\delta_s^2} - \delta^2} +$$
$$+ \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})+m} \left| d\left(\frac{1}{f'(x(y)) + \frac{m}{\delta_s}} \right) \right| + \left| \int\limits_{f(t_s)}^{f(t_{s+1})-m} d\left(\frac{1}{f'(x(y)) - \frac{m}{\delta_s}} \right) \right| \leq$$
$$\leq \frac{6\delta\delta_s^2}{m^2 - \delta^2\delta_s^2} + \frac{2\delta\delta_s^2}{m^2} \leq \frac{8\delta\delta_s^2}{m^2 - \delta^2\delta_s^2}.$$
Интегралы $U_a(m)$ и $U_b(m)$ оцениваются аналогично. Имеем
$$U_m(a) = \frac{1}{2\pi i} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + m\rho'_\Delta(x)} \Bigg|_{f(a')-0{,}5m}^{f(a')} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(a')-0{,}5m}^{f(a')} e^{2\pi i y} \, d\left(\frac{\rho'_\Delta(x)}{f'(x(y)) + m\rho'_\Delta(x)} \right),$$
$$U_m(b) = \frac{1}{2\pi i} \rho'_\Delta(x) e^{2\pi i y} \frac{1}{f'(x(y)) + m\rho_\Delta(x)} \Bigg|_{f(b')}^{f(b')+0{,}5m} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(b')}^{f(b')+0{,}5m} e^{2\pi i y} \, d\left(\frac{\rho'_\Delta(x)}{f'(x(y)) + m\rho'_\Delta(x)} \right).$$
Далее находим
$$2\pi i (\rho'_\Delta(a))^{-1} (U_a(m) + U_a(-m)) =$$
$$= e^{2\pi i f(a')} \left(\frac{1}{f'(x(f(a'))) + 0{,}5m\rho'_\Delta(a)} + \frac{1}{f'(x(f(a'))) - 0{,}5m\rho'_\Delta(a)} \right) -$$

$$-e^{2\pi i f(a)}\left(\frac{1}{f'(x(a)))+0,5m\rho'_\Delta(a)}+\frac{1}{f'(x(f(a)))-0,5m\rho'_\Delta(a)}\right)-$$

$$-\int\limits_{f(a)}^{f(a')+0,5m} e^{2\pi i y}\,d\left(\frac{1}{f'(x(y))+0,5m\rho'_\Delta(a)}\right)-\int\limits_{f(a)}^{f(a')-0,5m} e^{2\pi i y}\,d\left(\frac{1}{f'(x(y))-0,5m\rho'_\Delta(a)}\right).$$

Отсюда приходим к оценке

$$|(U_a(m)+U_a(-m))|\le\frac{\rho'_\Delta(a)}{2\pi}\frac{8\delta}{0,5m^2(\rho'_\Delta(a))^2-\delta^2}\le\frac{4\delta(\rho'_\Delta(a))^{-1}}{\pi(0,25m^2-\delta^2(\rho'_\Delta(a))^{-2})}.$$

Подобным образом такая же оценка с заменой a на b получается для $|(U_b(m)+U_b(-m))|$.

Заметим, что

$$(\rho'_\Delta(a))^{-1}+\sum_{a<t_s<b}\delta_s+(\rho'_\Delta(b))^{-1}=b-a.$$

Так как $\delta(a,b)=\max\limits_{a\le x\le b}(\rho'_\Delta(x))^{-1}$, то

$$\sum_{m\ge1}(|U(m)+U(-m)|)=\sum_{m\ge1}\left(|U_a(m)+U_a(-m)|+|U_b(m)+U_b(-m)|+\right.$$

$$\left.+\sum_{a<t_s\le b}(|U(m,s)+U(-m,s)|)\right)\le$$

$$\le\sum_{m\ge1}\left(\frac{4\delta(\rho'_\Delta(a))^{-1}}{\pi(0,25m^2-\delta^2(\rho'_\Delta(b))^{-2})}+\sum_{a<t_s\le b}\frac{4\delta\delta_s}{\pi(m^2-\delta^2\delta_s^2)}\right)\le$$

$$\le\frac{4\delta}{\pi(0,25-\delta^2(\delta(a,b))^{-2})}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{16\delta}{\pi m(m-1)}\le\frac{10\delta}{1-\delta}.$$

4. Заключение

Основным результатом работы является обобщение формулы ван дер Корпута на тригонометрические суммы по разбиению неотрицательной полуоси вещественной прямой на последовательности, стремящейся к бесконечности. Следующим шагом исследования является формула Корпута — Виноградова, позволяющая заменить эту сумму более короткой. Последняя формула может найти приложения в математической физике.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.

2. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических. — М.: Физматлит. 1976, 120 с.

3. van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen // Math. Ann., 1921, **84**, S. 53-79.

4. van der Corput J. G. Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem // Math. Ann., 1922, **87**, S. 39-65.

5. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. — М.: Физматлит. 1983, 240 с. 1966, **30,** № 1.

6. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. — М.-Л.: Изд-во ин.лит. 1953, 408 с.

7. Montgomery H. L. Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis — Providence, Rhode Island: 1994, 220 p.

8. Архипов Г. И., Чубариков В. Н. Три теоремы из анализа о тригонометрических суммах // Докл. РАН, 1994, **335,** № 4, 407.

9. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.

10. Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. 4-е изд., испр. — М.: Дрофа. 2004, 640 с.

11. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред.физ.-мат. лит. 1987, 368 с.

12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.

13. LeVeque W.J. On uniform distribution modulo a subdivision // Pacific J. Math., 1953,**1**, 757–771.

14. Erdös P., Davenport H. A theorem on uniform distribution // Magyar Tud.Akad.Kutató Int.Kózl., 1963, **8**:2, 3–11.

15. Gallagher P.X. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$ // Invent. Math., 1974, **1**, 757–771.

16. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. — М.: Наука,2001, 418 с.

REFERENCES

1. Vinogradov I. M. 1980. “The method of trigonometric sums in the theory of numbers”. 2nd Edition., correct.and supplement. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 144.

2. Vinogradov I. M. 1976. “The special version of the method of trigonometric sums”. — Moscow.: Fizmatlit. pp. 120.

3. van der Corput J. G. 1921. “Zahlentheoretische Abschätzungen”. Math. Ann., **84**, S. 53-79.

4. van der Corput J. G. 1922. “Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproblem”. Math. Ann., **87**, S. 39-65.

5. Karatsuba A. A. 1983. “Foundations of the analytic number theory”. 2-nd ed. — M.: Fizmatlit. pp.240. 1966, **30,** № 1.

6. Titchmarsh E. C. 1951. “The theory of the Riemann zeta-function”. — Oxford: pp. 408.

7. Montgomery H. L. 1994. “Ten Lectures on the Interface Between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis” — Providence, Rhode Island: 220 p.

8. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N. 1994. "Three Theorems from Analysis on Trigonometric Sums". Dokl. RAS, **335,** № 4, 407.

9. Arkhipov G. I. 2013, "Selected Works". — Orel: Publishing house of Oryol University, 464 c.

10. Arkhipov G.I., Sadovnichy V.A., Chubarikov V.N. 2004. "Lectures on mathematical analysis". 4th ed., Rev. — M.: Drofa. 640 c.

11. Arkhipov G.I., Karatsuba A.A., Chubarikov V.N. 1987. "Theory of multiple trigonometric sums". — M.: Science. Ch. ed.phys.-mat. lit. 368 c.

12. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. 2004. "Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics"; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, pp. 554.

13. LeVeque W. J. 1953. "On uniform distribution modulo a subdivision". Pacific J. Math., **1**, 757–771.

14. Erdös P., Davenport H. 1963. "A theorem on uniform distribution". Magyar Tud.Akad.Kutató Int.Kózl., **8**:2, 3–11.

15. Gallagher P. X. 1974. "A large sieve density estimate near $\sigma = 1$". Invent. Math., **1**, 757–771.

16. Kuipers L., Niederreiter H. 1974. "Uniform Distribution of Sequences". — N.Y.,London, Sydney, Toronto: John Wiley & Sons. M.: Наука,(2001), 418 c.

Получено 23.06.2020 г.
Принято в печать 22.10.2020 г.