ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.33

ОБ ОЦЕНКАХ АНАЛОГОВ НЕПОЛНЫХ СУММ КЛООСТЕРМАНА

П. В. Снурницын (г. Москва)

Аннотация

Получена оценка аналога неполной суммы Клоостермана.

Ключевые слова: неполные суммы Клоостермана, тригонометрические суммы.

NEW BOUNDS FOR INCOMPLETE KLOOSTERMAN SUMS

P. V. Snurnitsyn (Moscow)

Abstract

New bounds for analogs of incomplete Kloosterman sums are given.

Keywords: Kloosterman sums, exponential sums.

Работа посвящается светлой памяти Г. И. Архипова.

В работах [1, 2] получены оценки для аналогов неполных сумм Клоостемана вида

$$S = \sum_{n\in\mathcal{N}} \exp\left(2\pi i \frac{an^* + bn}{m}\right),$$

где m — целое, $m > 1, \mathcal{N}$ — некоторая последовательность целых чисел, взаимно простых с m, число элементов которой меньше m, а запись n^* означает, что $nn^* \equiv 0 \pmod m$.

Приведем результат из [1], где в качестве $\mathcal{N}$ рассматривается последовательность произведений простых чисел из заданных интервалов. Здесь и далее используются следующие обозначения:

$$e(x) = \exp(2\pi i x), \quad e_m(x) = \exp\left(2\pi i \frac{x}{m}\right).$$

Теорема 1. *Пусть k, l — натуральные числа, a — целое, взаимно простое с m, X, X_1, Y, Y_1 — вещественные числа такие, что*

$$k < X < X_1 \leqslant 2X, \quad k(2X)^{2k-1} < m,$$

$$l < Y < Y_1 \leqslant 2Y, \quad l(2Y)^{2l-1} < m.$$

Тогда для тригонометрической суммы

$$S = \sum_{X<p\leqslant X_1} \sum_{Y<q\leqslant Y_1} e_m\left(ap^* q^*\right),$$

где суммирование распространяется по простым числам, не являющимся делителями m, справедлива оценка

$$|S| \leqslant klXYX^{-1/(2l)}Y^{-1/(2k)}m^{-1/(2kl)},$$

С помощью модификации метода работы [1] автором получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть k, l — целые положительные числа, $k < X$, $l < Y$. Тогда справедлива оценка*

$$|S| \leqslant C(k,l)XYX^{\frac{3k-2l-1}{2kl}}Y^{\frac{3l-2k-1}{2kl}}m^{-\frac{1}{2kl}},$$

где C(k,l) зависит только от k и l.

Метод оценки подобных сумм опирается на получение оценок количества решений симметричных сравнений вида

$$x_1 + \cdots + x_k \equiv y_1 + \cdots + y_k \pmod m.$$

В работе [1] используется следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть m, k — натуральные числа, $m > 1$, X, X_1 — действительные числа такие, что*

$$k < X < X_1 \leqslant 2X, \quad k(2X)^{2k-1} < m.$$

Тогда для числа решений сравнения

$$p_1^* + \cdots + p_k^* \equiv q_1^* + \cdots + q_k^* \pmod m,$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ из промежутка $(X, X_1]$ не являющихся делителями m справедлива оценка

$$I_k(X) \leqslant k!X^k.$$

В работе [3] получена оценка числа решений указанного сравнения без ограничения на X:

Теорема 4. *Пусть m, k — натуральные числа, $m > 1$, X, X_1 — действительные числа такие, что $k < X < X_1 \leqslant 2X$. Тогда для числа решений сравнения*

$$p_1^* + \cdots + p_k^* \equiv q_1^* + \cdots + q_k^* \pmod m,$$

в простых числах $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k$ из промежутка $(X, X_1]$ не являющихся делителями m справедлива оценка

$$I_k(X) \leqslant C(k)\frac{1}{m}X^{3k-1},$$

где $C(k) = k!k2^{2k+2}$.

Используя последнее утверждение в схеме доказательства из [1] для теоремы 1 получим теорему 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Аналоги неполных сумм Клоостермана и их приложения // Tatra Mt. Math. Publ. 1997. Vol. 11. P. 89—120.

2. Карацуба А. А. Новые оценки коротких сумм Клоостермана // Мат. заметки. 2010. Т. 88, вып. 3. С. 384—398.

3. Снурницын П. В. Об оценке среднего значения короткой суммы Клоостермана // Ученые записки Орловского гос. ун-та. Сер. Естественные, технические и медицинские науки. 2013. № 6, ч. 2. С. 212—215.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Поступило 28.05.2013