ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЛЕКЦИЯХ ПРОФЕССОРА Г. И. АРХИПОВА

Н. Н. Митюшкина (г. Орел), Л. М. Лужина, Ю. Н. Макаров, В. Г. Чирский (г. Москва)

Аннотация

Цель этой заметки — отметить вклад профессора Г. И. Архипова в развитие изложения теории интегрирования по поверхностям в курсе математического анализа.

Ключевые слова: поверхностное интегрирование.

LECTURES OF PROFESSOR G. I. ARCHIPOV ON THE THEORY OF INTEGRATION ON SURFACES

N. N. Mityushkina (Orel), L. M. Luzhina (Moscow), Yu. N. Makarov (Moscow), V. G. Chirskii (Moscow)

Abstract

The paper celebrates the contribution of professor Archipov to the exposition of the theory of integration on surfaces.

Keywords: integration on surfaces.

Цель этой заметки - отметить вклад профессора Г. И. Архипова в развитие изложения теории интегрирования по поверхностям в курсе математического анализа.

Основные понятия и теоремы теории поверхностного интегрирования широко используются в ряде дисциплин. Например, общая формула Стокса является основной формулой дифференциальной геометрии, а следствием формулы Остроградского-Гаусса является одна из формул Грина, имеющая важные приложения при исследовании гармонических функций.

Теория интегрирования по поверхностям является также основным аппаратом общей и теоретической физики, существенно используется в аэродинамике, гидродинамике, механике сплошной среды, электродинамике, радиоэлектронике и т.д.

Однако эта теория является одним из самых сложных разделов в математическом анализе для студентов.

Геннадий Иванович Архипов и, под его руководством, Н. Н. Митюшкина предложили способ построения теории поверхностного интегрирования, при котором ее изложение обладает многими преимуществами с математической и логической точки зрения.

Остановимся на центральной теореме теории криволинейных и поверхностных интегралов, которой является общая формула Стокса. Эта формула может быть записана в следующем виде

$$\int\limits_{\partial D} \omega = \int\limits_{D} d\omega. \qquad (*)$$

Здесь ω обозначает дифференциальную форму размерности $k-1<n$, $d\omega$ – ее дифференциал, являющийся дифференциальной формой размерности $k \leqslant n$. Множество D является кусочно-гладкой ориентированной поверхностью размерности k в n-мерном пространстве, а ∂D - ее кусочно-гладкой границей, ориентация которой согласована с ориентацией поверхности D.

Полное, подробное и максимально доступное доказательство общей формулы Стокса предполагает наличие четких определений всех используемых понятий, а именно:

1) понятия кусочно-гладкой ориентированной поверхности;
2) понятия дифференциальной формы размерности $k-1$;
3) понятия интеграла по поверхности.

В своем изложении Г. И. Архипов и Н. Н. Митюшкина использовали индуктивный подход к определению данных понятий, подразумевающий при фиксированном n переход от меньших значений параметра k к его последующим большим значениям.

Рассмотрим сначала конструкцию понятия кусочно-гладкой поверхности произвольной размерности в многомерном пространстве.

1) $k=1$. Первый шаг состоит в определении понятия ориентированной поверхности размерности один, то есть кривой линии в координатном пространстве нескольких измерений.

   Отметим, что определение понятия кривой в n-мерном пространстве при фиксированном значении $n \geqslant 3$ не несет в себе существенной зависимости от размерности пространства, поэтому при его анализе для большей наглядности можно, вообще говоря, ограничиться случаями $n=2$ и $n=3$.

   Определения гладкой кривой, параметризации кривой, направления или ориентации кривой, а также понятие замкнутой кривой, в основном, совпадают с общепринятыми и соответствуют системе определений, принятой в учебнике по математическому анализу Г. И. Архипова, В. А. Садовничего и В. Н. Чубарикова.

2) $k = 2$. Второй шаг состоит в определении куска гладкой поверхности в трехмерном пространстве. Рассматриваются понятия куска гладкой поверхности, его параметризации и ориентации. Вводится понятие двусторонней кусочно-гладкой поверхности. Принципиальную важность в данной системе определений играет понятие согласования ориентации куска гладкой поверхности с направлением обхода его кусочно-гладкой границы. Именно это понятие обеспечивает возможность "склеивания" кусочно-гладкой поверхности из ее отдельных кусков путем их соприкосновения по общим участкам границ, имеющих противоположную ориентацию.

Важно отметить, что в современной учебной литературе при определении понятия ориентированной поверхности размерности два и выше преимущественно используется другой подход. Здесь можно сослаться на известную монографию А. Картана и учебники В. А. Зорича или Л. И. Камынина. При этом соединение всей гладкой поверхности из ее кусков проводится здесь путем "налегания" одного куска поверхности на другой. При этом предполагается, что обе параметризации общей части кусков, отвечающих каждому из них, порождают одну и ту же параметризацию этой части в том же смысле, что и у нас в параграфе.

Изложенный подход является не только более громоздким, но и существенно ограничивает класс поверхностей в сравнении подходом, основанным на склейке кусков по их границам с учетом согласования ориентаций куска и его границы.

3) Третий шаг — вводится понятие ориентированной k-мерной кусочно-гладкой поверхности при произвольных значениях натуральных параметров k, n с условием $k \leqslant n$. При этом :

   1) Дается определение понятия куска Q гладкой ориентированной поверхности размерности $k \geqslant 3$.
   2) Проводится согласование ориентации данного куска Q с ориентацией его кусочно-гладкой границы при условии, что понятие ориентированной кусочно-гладкой поверхности размерности $k-1$ уже сформулировано.
   3) Дается определение ориентированной кусочно-гладкой поверхности для размерности k путем ее склейки из отдельных кусков по участкам их общих границ при условии, что эти участки являются ориентированной кусочно-гладкой поверхностью и ее ориентация относительно соединяемых кусков имеет противоположное значение.

Данная система определений, охватывающая понятия кривой и поверхности, а также согласование их ориентаций, позволяет перейти к рассмотрению криволинейных и поверхностных интегралов и выводу основных теорем интегрального исчисления.

Далее Г. И. Архипов и Н. Н. Митюшкина переходят к изложению теории дифференциальных форм, снова придерживаясь индуктивного подхода.

На первом этапе вводится определение линейной дифференциальной формы, понятия дифференциала и умножения дифференциальных форм которые приводят нас к понятию дифференциальной формы второго порядка. Дается определение дифференциальной формы второго порядка в трехмерном пространстве, вводится понятие операции индуцирования.

На совокупности гладких дифференциальных форм определяется операция внешнего дифференцирования и доказывается теорема о перестановочности операции индуцирования и дифференцирования в случае, когда замена переменных, порождающая индуцированную форму, осуществляется с помощью функций, имеющих непрерывные частные производные второго порядка. Другими словами, соответствующее отображение является дважды гладким. Эта теорема используется при доказательстве классической формулы Стокса.

Далее весь материал обобщается для случая трехмерного и многомерного пространства для дифференциальных форм произвольной размерности. Здесь доказываются теоремы об обращении в нуль второго дифференциала внешней формы ω, коэффициенты которой дважды гладкие, о перестановочности операций индуцирования и дифференцирования внешних дифференциальных форм, а также теорема и следствие из нее, устанавливающие правила дифференцирования произведения дифференциальных форм.

Построенная выше система определений позволяет перейти к рассмотрению криволинейных и поверхностных интегралов и выводу основных теорем интегрального исчисления по поверхности.

Криволинейный интеграл представляет собой объект, обобщающий понятие обычного определенного интеграла по отрезку $[a, b]$ на случай кривой L в пространстве размерности $n \geqslant 2$.

Аналогично этому поверхностный интеграл обобщает понятие кратного интеграла по области k-мерного пространства на случай k -мерной поверхности в n-мерном пространстве при $n \geqslant k$.

В такой трактовке криволинейный интеграл можно рассматривать как частный случай поверхностного интеграла для размерности $k = 1$. Это значит, что вся теория поверхностных интегралов применима и к криволинейным интегралам. Однако следует сказать, что конкретизация размерности обычно вносит некоторые специфические особенности, что полностью относится к криволинейным интегралам. Отметим так же, что обычный определенный интеграл можно рассматривать как частный случай криволинейного интеграла, а кратный интеграл есть частный случай поверхностного. И заметим, что уже обычный определенный интеграл в своем определении несет два различных подхода.

Первый из них состоит в определении интеграла как площади криволинейной трапеции, порожденной графиком функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Точнее, имеется в виду "альтерированная" площадь. То есть криволинейная трапеция представляется в виде двух фигур, одна из которой расположена над осью абсцисс, а другая под ней, и под интегралом понимается разность площадей первой и второй фигур.

Другой подход к определению интеграла возникает тогда, когда значение интеграла рассматривается в зависимости от расстановки пределов интегрирования. При этом если в качестве нижнего предела интегрирования берется число a, а верхнего - число b, то значение интеграла определяется так же, как и выше, а при перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный.

Целесообразность введения второй трактовки связана с применением формулы Ньютона-Лейбница при вычислении определенных интегралов. Подчеркнем, что формула Ньютона-Лейбница является основной формулой интегрального исчисления. Она утверждает, что разность значений функций в двух точках a и b равна интегралу от ее производной при условии, что эта производная непрерывна.

Введение понятия верхнего и нижнего пределов интегрирования с точки зрения теории криволинейных интегралов соответствует интегрированию вдоль ориентированной кривой, то есть криволинейному интегралу второго рода.

С другой стороны подход к значению интеграла как "альтерированной" площади криволинейной трапеции при его распространении на случай криволинейных интегралов порождает понятие криволинейного интеграла первого рода.

Разница двух указанных подходов в случае обычного определенного интеграла заметна не очень сильно, однако, для криволинейных интегралов указанное отличие носит уже принципиальный характер.

Все то, что сказано относительно отличия в определениях криволинейных интегралов, в полной мере касается поверхностных интегралов первого и второго рода. Только ситуация несколько усложняется из-за того, что у кратного интеграла определение является существенно более громоздким, чем у определенного интеграла по отрезку.

Прежде, чем вводить понятия криволинейных и поверхностных интегралов, рассмотрим некоторые физические задачи, приводящие к необходимости введения криволинейных и поверхностных интегралов.

В этих задачах указанные интегралы возникают в результате применения предельного перехода в методе интегральных сумм. Следует, однако, заметить, что данный подход заключен в основе всего интегрального исчисления в пространстве $\mathbf{R}^n$ произвольной размерности, и поэтому фактическое построение теории криволинейных и поверхностных интегралов может быть выполнено без использования метода интегральных сумм.

Как было отмечено выше, в рамках математического анализа рассматриваются криволинейные и поверхностные интегралы, определяемые двумя существенно разными конструкциями и называемые интегралами первого и второго рода.

Обычно интегралы первого рода рассматриваются для размерности $n \leqslant 3$, хотя такое ограничение не является обязательным.

Определение интеграла первого рода не требует введения понятий ориентаций поверхности и ее границы, и их согласованности. И в этом смысле интеграл первого рода имеет некоторые преимущества по отношению к интегралу второго рода.

С другой стороны, любой интеграл второго рода допускает однозначную запись через интеграл первого рода. В то время как обратная запись возможна далеко не всегда и к тому же неоднозначна.

Ввиду этого в изложении теории интегрирования на поверхностях часто ограничиваются интегралами первого рода. Это, прежде всего, относится к изложению теории векторного поля в трехмерном пространстве.

Однако с вычислительной точки зрения интеграл второго рода представляется гораздо более простым понятием.

Это обстоятельство проявляется как в нахождении численных значений конкретных интегралов, так и в теоретических выкладках. Кроме того, основные теоремы интегрального исчисления на языке интегралов второго рода выглядят единообразно и имеют более простой вид. Да и сама формулировка этих теорем уже предполагает наличие понятия согласованных ориентаций поверхности и ее границы, так что использование интегралов первого рода в этих вопросах вообще не дает никаких преимуществ.

В связи с этим главное внимание уделяется поверхностным и криволинейным интегралам второго рода. Определения поверхностных и криволинейных интегралов второго рода вводится на языке теории дифференциальных форм. Также следует отметить, что в случае $k = n - 1$ дано удобное представление поверхностного интеграла второго рода через поверхностный интеграл первого рода.

Описанный подход использовали профессор Г. И. Архипов в курсе лекций студентам специальности "Математика" механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова и Н. Н. Митюшкина в курсе лекций и практических занятий для студентов специальности "Приборостроение" по математике в Орел ГТУ .

На основе полученного опыта был сделан вывод о том, что обращение к такому пути изложения этого материала является более доступным, и на чтения курса лекций по этой теме хватает всего 16–20 часов, то есть 8–10 лекций. Эффективность, описанного выше метода изложения теории поверхностного интегрирования, проверена экспериментально.

Педагогический эксперимент проводился поэтапно на протяжении четырех лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова и позволил сделать вывод о том, что разработанный под руководством Г. И. Архипова подход к изложению темы "Поверхностное интегрирование" приводит к более высокому результату обучения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И. , Садовничий В. А., Чубариков В. Н. Лекции по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1999.

2. Зорич В. А. Математический анализ. М.: МЦНМО, 2002

3. Камынин Л. И. Курс математического анализа. М.: Изд-во МГУ, 2001

4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

Орловский государственный технический университет
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Поступило 16.05.2013