ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.36

ОЦЕНКА МЕРЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЧИСЛА $\ln\frac{7}{4}$

М. Ю. Лучин (г. Брянск)

Аннотация

В работе получена новая оценка меры иррациональности числа $\tau = \ln\frac{7}{4}$.

Ключевые слова: диофантовы приближения, мера иррациональности, метод перевала.

THE ESTIMATE OF THE IRRATIONALITY OF NUMBER $\ln\frac{7}{4}$

M. Yu. Luchin (Bryansk)

Abstract

In this paper we obtain a new estimate of the irrationality measure of number $\tau = \ln\frac{7}{4}$.

Keywords: diophantine approximations, irrationality measure, saddle point method.

Введение

Напомним, что мерой иррациональности $\mu(\tau)$ вещественного числа τ называется нижняя грань множества чисел λ, для которых, начиная с некоторого положительного $q \geq q_0(\lambda)$, выполняется неравенство

$$\left|\tau - \frac{p}{q}\right| \geq q^{-\lambda}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Первоначально, результат о мере иррациональности

$$\tau = \ln\frac{7}{4} \quad (\mu(\tau) \le 257.865...)$$

был получен в 2002 году К. Ву. Данная оценка является частным следствием теоремы 4 в его работе [1]. В дальнейшем, эта оценка была значительно улучшена Е.С. Золотухиной в 2009 году [2]: $\mu(\tau) \le 8.3224...$. В ее работе был использован интеграл, подынтегральная функция которого обладала свойством симметрии. Впервые данный метод был введен В.Х. Салиховым в работе [3].

В данной работе получена новая оценка: $\mu(\tau) < 8.1004$. В приведенном ниже доказательстве также используется симметризованный вещественный интеграл, однако он существенно отличается от интеграла, применяемого Е.С. Золотухиной.

Теорема 1. *Пусть $p,\ q \in \mathbb{N}$, $q \ge q_0$, где q_0 – достаточно большое число. Тогда:*

$$\left|\ln\frac{7}{4} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^{8.1004}}.$$

Доказательство теоремы 1.

Для доказательства теоремы рассмотрим следующий интеграл:

$$J \equiv \int_{15}^{20} R(x)dx, \qquad R(x) =$$

$$= \frac{(x-15)^{a_3 n}(x-16)^{a_2 n}(x-18)^{a_1 n}(x-20)^{a_2 n}(x-21)^{a_3 n}(13x^2-468x+4200)^{a_4 n}}{x^{n+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(41x^2-1476x+13230)^{a_5 n}(47x^2-1692x+15120)^{a_6 n}(67x^2-2412x+21600)^{a_7 n}}{(36-x)^{n+1}}, \tag{1}$$

где n – таково, что все $a_i n \in \mathbb{N}$, $n \longrightarrow +\infty$, $a_1 = 0.9751$, $a_2 = 0.7963$, $a_3 = 0.9059$, $a_4 = 0.0292$, $a_5 = 0.0412$, $a_6 = 0.0237$, $a_7 = 0.0047$.
Подынтегральная функция $R(x)$ в (1) обладает свойством симметрии, а именно

$$R(36-x) = R(x).$$

Разложение рациональной функции $R(x)$ в сумму простейших дробей имеет вид

$$R(x) = P_{(a_1+2a_2+2a_3+2a_4+2a_5+2a_6+2a_7)n-2n-2}(x) + \sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{c_j}{x^j} + \frac{c_j}{(36-x)^j}\right), \tag{2}$$

[1]Результаты получены при частичной поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, грант №12-01-00171

где все $c_j \in \mathbb{Q}$, $j = 1, 2, ..., n+1$,

$$P(x) \equiv P_{(a_1+2(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7))n-2n-2}(x) = \sum_{\nu=0}^{(a_1+2(a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7))n-2n-2)} d_\nu x^\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2.5771n-2} d_\nu x^\nu,\ d_\nu \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие представления для коэффициентов разложения c_j из (2):*

$$c_j = 7^{j-1} \cdot 5^{0.801n+j-1} \cdot 3^{2j-4} \cdot 2^{4j-6} \cdot A_j, \tag{4}$$

где $A_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, 2, ..., n+1$.

Доказательство. Обозначим $D_k\left(f(x)\right) = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Согласно формуле дифференцирования Лейбница для любых функций u_1, u_2, ..., u_r, аналитичных в точке x=0,

$$D_k(u_1 \cdot u_2 \cdot ... \cdot u_r) = \sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_r=k,\\ k_r \geq 0}} D_{k_1}(u_1) \cdot D_{k_2}(u_2) \cdot ... \cdot D_{k_r}(u_r).$$

Следовательно из (1) имеем

$$c_j = D_{n+1-j}\left(R(x) \cdot x^{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{\overline{k}} D_{k_1}(x-15)^{a_3 n} \cdot D_{k_2}(x-16)^{a_2 n} \cdot D_{k_3}(x-18)^{a_1 n} \cdot$$

$$\cdot D_{k_4}(x-20)^{a_2 n} \cdot D_{k_5}(x-21)^{a_3 n} \cdot D_{k_6}(13x^2 - 468x + 4200)^{a_4 n} \cdot$$

$$D_{k_7}(41x^2 - 1476x + 13230)^{a_5 n} \cdot D_{k_8}(47x^2 - 1692x + 15120)^{a_6 n} \cdot$$

$$\cdot D_{k_9}(67x^2 - 2412x + 21600)^{a_7 n} \cdot D_{k_{10}}(36-x)^{-n-1},$$

где $\overline{k} = (k_1, k_2, ..., k_{10})$, $k_1, k_5 \leq a_3 n$, $k_2, k_4 \leq a_2 n$, $k_3 \leq a_1 n$, $k_6 \leq 2a_4 n$, $k_7 \leq 2a_5 n$, $k_8 \leq 2a_6 n$, $k_9 \leq 2a_7 n$, $k_1 + k_2 + ... + k_{10} = n + 1 - j$.

Далее докажем, что

$$D_{k_6}(13x^2 - 468x + 4200)^{a_4 n} = 7^{a_4 n - k_6} \cdot 5^{a_4 n - k_6} \cdot 3^{a_4 n - \frac{1}{2}k_6} \cdot 2^{3a_4 n - \frac{3}{2}k_6} \cdot V_1, \text{ где } V_1 \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Согласно формуле бинома Ньютона:

$$(13x^2 - 468x + 4200)^{a_4 n} =$$

$$= \sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4 n\\ s_i \geq 0}} \frac{(a_4 n)!}{s_1! s_2! s_3!} \cdot (13x^2)^{s_1} \cdot (-468x)^{s_2} \cdot (4200)^{s_3} \equiv$$

$$\equiv \sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4 n\\ s_i \geq 0}} V_1(s_1, s_2, s_3) \cdot x^{2s_1+s_2} \cdot 7^{s_3} \cdot 5^{s_3} \cdot 3^{s_2+s_3} \cdot 2^{2s_2+3s_3}, \tag{6}$$

где $V_1(s_1,s_2,s_3)=\dfrac{(a_4n)!}{s_1!s_2!s_3!}\cdot 13^{s_1+s_2}\cdot(-1)^{s_2}\cdot 5^{s_3}\cdot 3^{s_2}\in\mathbb{Z}$. Имеем

$$\begin{cases} 2s_1+s_2=k_6 \\ s_1+s_2+s_3=a_4n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_1=\dfrac{1}{2}k_6-\dfrac{1}{2}s_2 \\ s_3=a_4n-\dfrac{1}{2}k_6-\dfrac{1}{2}s_2\geq a_4n-k_6. \end{cases}$$

Из (6) получим

$$D_{k_6}(13x^2-468x+4200)^{a_4n}=\sum_{\substack{s_1+s_2+s_3=a_4n\\ s_i\geq 0}} V_1(s_1,s_2,s_3)\cdot 7^{s_3}\cdot 5^{s_3}\cdot 3^{s_2+s_3}\cdot 2^{2s_2+3s_3} \quad (7)$$

Далее:

$$s_2+s_3=a_4n-\frac{1}{2}k_6+\frac{1}{2}s_2\geq a_4n-\frac{1}{2}k_6. \quad (8)$$

$$2s_2+3s_3=2s_2+3a_4n-\frac{3}{2}k_6-\frac{3}{2}s_2\geq 3a_4n-\frac{3}{2}k_6. \quad (9)$$

Таким образом из (7), (8) и (9) следует утверждение (5).

Аналогично докажем, что

$$D_{k_7}(41x^2-1476x+13230)^{a_5n}=7^{a_5n-k_7}\cdot 5^{a_5n-k_7}\cdot 3^{3a_5n-\frac{3}{2}k_7}\cdot 2^{a_5n-k_7}\cdot V_2,$$
$$\text{где } V_2\in\mathbb{Z}. \quad (10)$$

$$D_{k_8}(47x^2-1692x+15120)^{a_6n}=7^{a_6n-k_8}\cdot 5^{a_6n-k_8}\cdot 3^{3a_6n-\frac{3}{2}k_8}\cdot 2^{4a_6n-2k_8}\cdot V_3,$$
$$\text{где } V_3\in\mathbb{Z}. \quad (11)$$

$$D_{k_9}(67x^2-2412x+21600)^{a_7n}=5^{a_7n-k_9}\cdot 3^{3a_7n-\frac{3}{2}k_9}\cdot 2^{5a_7n-3k_9}\cdot V_4,$$
$$\text{где } V_4\in\mathbb{Z}. \quad (12)$$

Аналогично равенству (7) имеем

$$D_{k_7}(41x^2-1476x+13230)^{a_5n}=\sum_{\substack{u_1+u_2+u_3=a_5n\\ u_i\geq 0}} V_2(u_1,u_2,u_3)\cdot 7^{u_3}\cdot 5^{u_3}\cdot 3^{2u_2+3u_3}\cdot 2^{u_3}, \quad (13)$$

где $V_2(u_1,u_2,u_3)=\dfrac{(a_5n)!}{u_1!u_2!u_3!}\cdot 41^{u_1+u_2}\cdot(-1)^{u_2}\cdot 7^{u_3}\cdot 2^{2u_2}\in\mathbb{Z}$.

$$D_{k_8}(47x^2-1692x+15120)^{a_6n}=\sum_{\substack{g_1+g_2+g_3=a_6n\\ g_i\geq 0}} V_3(g_1,g_2,g_3)\cdot 7^{g_3}\cdot 5^{g_3}\cdot 3^{2g_2+3g_3}\cdot 2^{2g_2+4g_3}, \quad (14)$$

где $V_3(g_1,g_2,g_3)=\dfrac{(a_6n)!}{g_1!g_2!g_3!}\cdot 47^{g_1+g_2}\cdot(-1)^{g_2}\in\mathbb{Z}$.

$$D_{k_9}(67x^2-2412x+21600)^{a_7n}=\sum_{\substack{z_1+z_2+z_3=a_7n\\ z_i\geq 0}} V_4(z_1,z_2,z_3)\cdot 5^{z_3}\cdot 3^{2z_2+3z_3}\cdot 2^{2z_2+5z_3}, \quad (15)$$

где $V_4(z_1, z_2, z_3) = \dfrac{(a_7n)!}{z_1!z_2!z_3!} \cdot 67^{z_1+z_2} \cdot (-1)^{z_2} \cdot 5^{z_3} \in \mathbb{Z}$. И из (13), (14), (15) следует соответственно (10), (11) и (12) (см. доказательство представления (5)).

С учетом (5), (10), (11) и (12) получим

$$c_j = \sum_{\overline{k}} \lambda_{\overline{k}} \cdot 15^{a_3n-k_1} \cdot 16^{a_2n-k_2} \cdot 18^{a_1n-k_3} \cdot 20^{a_2n-k_4} \cdot 21^{a_3n-k_5} \cdot 7^{a_4n-k_6} \cdot 5^{a_4n-k_6} \cdot$$
$$\cdot 3^{a_4n-\frac{1}{2}k_6} \cdot 2^{3a_4n-\frac{3}{2}k_6} \cdot 7^{a_5n-k_7} \cdot 5^{a_5n-k_7} \cdot 3^{3a_5n-\frac{3}{2}k_7} \cdot 2^{a_5n-k_7} \cdot 7^{a_6n-k_8} \cdot 5^{a_6n-k_8} \cdot$$
$$\cdot 3^{3a_6n-\frac{3}{2}k_8} \cdot 2^{4a_6n-2k_8} \cdot 5^{a_7n-k_9} \cdot 3^{3a_7n-\frac{3}{2}k_9} \cdot 2^{5a_7n-3k_9} \cdot 36^{-n-1-k_{10}} \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4,$$

где

$$\lambda_{\overline{k}} = (-1)^{k_1+k_2+\ldots+k_5} \cdot$$
$$\cdot \prod_{i=1}^{5} \left(\frac{a_in(a_in-1) \cdot \ldots \cdot (a_in-k_i-1)}{k_i!} \right) \cdot \frac{(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (n+k_{10})}{k_{10}!},$$

$\lambda_{\overline{k}} \in \mathbb{Z}$. В итоге получим

$$c_j = \sum_{\overline{k}} \lambda_{\overline{k}} \cdot 7^{N_1} \cdot 5^{N_2} \cdot 3^{N_3} \cdot 2^{N_4} \cdot V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4\ . \tag{16}$$

Причем:

$$N_1 = a_3n - k_5 + a_4n - k_6 + a_5n - k_7 + a_6n - k_8 = n - (k_5 + k_6 + k_7 + k_8) \geq$$
$$\geq n - (n + 1 - j) = j - 1.$$
$$N_2 = a_3n - k_1 + a_2n - k_4 + a_4n - k_6 + a_5n - k_7 + a_6n - k_8 + a_7n - k_9 =$$
$$= 1.801n - (k_1 + k_4 + k_6 + k_7 + k_8 + k_9) \geq 1.801n - (n + 1 - j) = 0.801n + j - 1.$$
$$N_3 = a_3n - k_1 + 2a_1n - 2k_3 + a_3n - k_5 + a_4n - \frac{1}{2}k_6 + 3a_5n - \frac{3}{2}k_7 + 3a_6n -$$
$$- \frac{3}{2}k_8 + 3a_7n - \frac{3}{2}k_9 - 2n - 2 - 2k_{10} =$$
$$= 2n - 2 - (k_1 + 2k_3 + k_5 + \frac{1}{2}k_6 + \frac{3}{2}k_7 + \frac{3}{2}k_8 + \frac{3}{2}k_9 + 2k_{10}) \geq$$
$$\geq 2n - 2 - 2(n + 1 - j) = 2j - 4.$$
$$N_4 = 4a_2n - 4k_2 + a_1n - k_3 + 2a_2n - 2k_4 + 3a_4n - \frac{3}{2}k_6 + a_5n - k_7 + 4a_6n -$$
$$-2k_8 + 5a_7n - 3k_9 - 2n - 2 - 2k_{10} =$$
$$= 4n - 2 - (4k_2 + k_3 + 2k_4 + \frac{3}{2}k_6 + k_7 + 2k_8 + 3k_9 + 2k_{10}) \geq$$
$$\geq 4n - 2 - 4(n + 1 - j) = 4j - 6.$$

Но тогда из (16) следует (4), и лемма доказана.

Далее установим некоторые арифметические свойства коэффициентов b_ν в разложении

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{2.5771n-2} b_\nu (x-15)^\nu, \text{ все } b_\nu \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Следующая лемма аналогична лемме 2.10, доказанной Е.С. Золотухиной [2]. Отметим также, что подобная конструкция была применена В.Х. Салиховым при улучшении оценки меры иррациональности числа π [4].

Лемма 2. *Для коэффициентов b_ν из (17) справедливо представление вида:*

$$b_\nu = 5^{0.801n-\nu-1} M_\nu, \text{ где } M_\nu \in \mathbb{Z}, \ \nu \le 0.801n - 1.$$

Доказательство. Очевидно, что для подынтегральной функции $R(x)$ справедливо разложение вида:

$$R(x) = \sum_{\nu=a_3 n}^{\infty} B_\nu (x-15)^\nu, B_\nu \in \mathbb{Q}, \tag{18}$$

где x принадлежит некоторой окрестности с центром в точке 15.

Далее при $j = 1, ..., n+1$ имеем

$$\frac{1}{x^j} = 15^{-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot d_{\nu,j}}{15^\nu} \cdot (x-15)^\nu,$$

$$\frac{1}{(36-x)^j} = 21^{-j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot d_{\nu,j}}{21^\nu} \cdot (x-15)^\nu,$$

где $d_{\nu,j} = \dfrac{j(j+1)...(j+\nu-1)}{\nu!} \in \mathbb{Z}$.

Значит, согласно (2), (17) и (18) получим

$$R(x) = \sum_{\nu=0}^{2.5771n-2} b_\nu (x-15)^\nu + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{15^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \cdot d_{\nu,j}}{15^\nu} (x-15)^\nu +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n+1} \frac{c_j}{21^j} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{d_{\nu,j}}{21^\nu} (x-15)^\nu. \tag{19}$$

Из (18) и (19) для $\nu = 0, ..., 0.801n - 1$ следует, что

$$b_\nu = -\sum_{j=1}^{n+1} c_j d_{\nu,j} \left(\frac{(-1)^\nu}{15^{\nu+j}} + \frac{1}{21^{\nu+j}} \right). \tag{20}$$

Согласно (4) имеем

$$c_j = 5^{0.801n+j-1} \cdot \frac{M_j}{N_j}, \text{ где } M_j \in \mathbb{Z}, N_j \in \mathbb{N}, (N_j, 5) = 1. \tag{21}$$

Таким образом, учитывая, что $b_\nu \in \mathbb{Z}$, имеем из (20) и (21) требуемое в лемме 2 представление для коэффициентов b_ν.

Лемма 3. *Справедливо следующее представление интеграла (1) в виде линейной формы:*

$$I = J \cdot 5^{-0.801n} \cdot q_{2.5771n} = A \cdot \ln\frac{7}{4} + B,$$

где $q_m = НОК(1,2,...,m)$ *для* $m \in \mathbb{N}, A = q_n \cdot c_1 \cdot 5^{-0.801n}, A, B \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Из (3) и (17) получим

$$\Lambda_0 = \int\limits_{15}^{20} P(x)dx = \int\limits_{15}^{20} \left(\sum_{\nu=0}^{2.5771n-2} b_\nu (x-15)^\nu \right) dx =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{0.801n-1} b_\nu \cdot \frac{5^{\nu+1}}{\nu+1} + \sum_{\nu=0.801n}^{2.5771n-2} b_\nu \cdot \frac{5^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Из леммы 2 следует, что $5^{-0.801n} \cdot b_\nu \cdot 5^{\nu+1} \in \mathbb{Z}, \nu = 0, ..., 0.801n-1$. При $\nu \geq 0.801n$:

$$5^{-0.801n} \cdot b_\nu \cdot 5^{\nu+1} \in \mathbb{Z}, \text{ так как } b_\nu \in \mathbb{Z}.$$

Далее $q_{2.5771n} \cdot \dfrac{1}{\nu+1} \in \mathbb{N}$, так как $\nu+1 < 2.5771n$. Поэтому $5^{-0.801n} \cdot q_{2.5771n} \cdot \Lambda_0 \in \mathbb{Z}$.

При $j = 1$

$$\Lambda_1 = c_1 \int\limits_{15}^{20} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{(36-x)} \right) = c_1 \ln\left(\frac{x}{36-x} \right) \Big|_{15}^{20} = c_1 \ln\frac{7}{4}.$$

Из (4) имеем, что $c_1 \cdot 5^{-0.801n} \in \mathbb{Z}$.

При $j \geq 2$

$$\Lambda_j = c_j \int\limits_{15}^{20} \left(\frac{1}{x^j} + \frac{1}{(36-x)^j} \right) = -\frac{c_j}{j-1} \left(\frac{1}{x^{j-1}} - \frac{1}{(36-x)^{j-1}} \right) \Big|_{15}^{20} =$$
$$= -\frac{c_j}{j-1} \left(\frac{1}{2^{2j-2} \cdot 5^{j-1}} - \frac{1}{2^{4j-4}} - \frac{1}{3^{j-1} \cdot 5^{j-1}} + \frac{1}{3^{j-1} \cdot 7^{j-1}} \right).$$

Поскольку $\dfrac{q_{2.5771n}}{j-1} \in \mathbb{N}$, так как $j-1 \in \{1,2,...,n\}$, то используя (4) получим, что $\Lambda_j \cdot 5^{-0.801n} \cdot$
$\cdot\, q_{2.5771n} \in \mathbb{Z}$.

В итоге из (1) и (2) окончательно получим

$$J = 5^{-0.801n} \cdot q_{2.5771n} \cdot \Lambda_0 + 5^{-0.801n} \cdot q_{2.5771n} \cdot \sum_{j=2}^{n+1} \Lambda_j + 5^{-0.801n} \cdot q_{2.5771n} \cdot c_1 \cdot \ln\frac{7}{4},$$

где $j \in \mathbb{Z}$, и лемма 3 доказана.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующая лемма, доказанная М.Хата [5].

Лемма 4. *Пусть* $\Theta \in \mathbb{R}$, Θ — *иррационально*, $\varepsilon_n = q_n\Theta - p_n$, q_n, $p_n \in \mathbb{Z}$;

$$\lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |\varepsilon_n| \leq -\tau, \ \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{n} \ln |q_n| = \sigma.$$

Тогда $\mu(\Theta) \leq 1 + \dfrac{\sigma}{\tau}$.

Применим лемму 4 для чисел: $\Theta = \ln \dfrac{7}{4}$, $\varepsilon_n = J$, $q_n = A$, $p_n = B$. Асимптотику интеграла $\displaystyle\int_{15}^{20} R(x)dx$ несложно вычислить с помощью теоремы Лапласа, а асимптотику q_n с помощью метода перевала.

Рассмотрим следующую функцию (см. (1)):

$$f(x) = \frac{(x-15)^{a_3}(x-16)^{a_2}(x-18)^{a_1}(x-20)^{a_2}(x-21)^{a_3}(13x^2-468x+4200)^{a_4}}{x} \cdot$$
$$\cdot \frac{(41x^2-1476x+13230)^{a_5}(47x^2-1692x+15120)^{a_6}(67x^2-2412x+21600)^{a_7}}{(36-x)}.$$

Пусть $t = (x-18)^2$. Тогда:

$$f(x) \equiv g(t) =$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{2}a_1}(t-4)^{a_2}(t-9)^{a_3}(13t-12)^{a_4}(41t-54)^{a_5}(47t-108)^{a_6}(67t-108)^{a_7}}{324-t}.$$

Найдем нули $g'(t)$, отличные от нулей $g(t)$. В результате получим, что $t_1 \approx 0.766729$, $t_2 \approx 1.101423$, $t_3 \approx 1.544485$, $t_4 \approx 1.685366$, $t_5 \approx 2.365805$, $t_6 \approx 6.686397$, $t_7 \approx 571.534735$. Тогда:
$\tau = -2.5771 + 0.801 \cdot \ln 5 - \ln(\max(|g(t_1)|, |g(t_2)|, |g(t_3)|, |g(t_4)|, |g(t_5)|, |g(t_6)|)) \approx 1.496203$.
$\sigma = 2.5771 - 0.801 \cdot \ln 5 + \ln(|g(t_7)|) \approx 10.623533$.
По лемме 4 $\mu(\Theta) \leq 1 + \dfrac{\sigma}{\tau} \approx 8.1003$. Следовательно $\mu\left(\ln \dfrac{7}{4}\right) < 8.1004$ и теорема 1 доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю В.Х. Салихову за интересную тему, многочисленные советы и помощь в работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wu, Q. On the linear independence measure of logarithms of rational numbers // Math. Comput. 2002. Vol. 72, № 242. P. 901—911.

2. Золотухина Е. С. Диофантовы приближения некоторых логарифмов: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. Брянск, 2009. 100 с.

3. Салихов В. Х. О мере иррациональности $\log 3$ // Доклады РАН. 2007. Т. 417, № 6. С. 753—755.

4. Салихов В. Х. О мере иррациональности числа π // Математические заметки. 2010. Т. 88, № 4. С. 583—593.

5. Hata M. Rational approximations to π and some other numbers // Acta Arith. 1993. Vol. 63, №. 4 P. 335—349.

Брянский государственный технический университет
Поступило 31.05.2013