ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-388-403

О русской научной школе диофантовых приближений[1]

Ю. А. Басалов

Басалов Юрий Александрович — аспирант кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого (г. Тула)
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Аннотация

Теория диофантовых приближений, как раздел математики, начала активно формироваться в XIX веке. Значительный вклад в ее развитие внесли русские и советские математики. В данной работе мы дадим исторический обзор некоторых результатов в области диофантовых приближений, полученных русской и советской научной школой теории чисел.

Одним из первых, задачами теории диофантовых приближений заинтересовался во второй половине XIX века П. Л. Чебышев. Эти исследования были продолжены его учениками А. Н. Коркиным и Е. Н. Золотарёвым. А в 1880 году, ученик А. Н. Коркина, академик А. А. Марков-старший в своей магистерской диссертации блестяще решил задачу описания классов плохоприближаемых неопределенных квадратичных форм. Другой ученик П. Л. Чебышева — Г. Ф. Вороной, наряду с Г. Минковским, заложил основы нового, тесно связанного с диофантовыми приближениями раздела математики — геометрии чисел.

В развитие метрической теории цепных дробей внес значительный вклад А. Я. Хинчин. В 1936 году им была получена *постоянная Хинчина* — значение среднего геометрического элементов разложения в цепную дробь, для почти всех вещественных чисел. Поразительность этого факта отмечается математиками всего мира.

Значительный вклад в развитие метрической теории диофантовых приближений принадлежит белорусским математикам. В 1964 году В. Г. Спринджук получил доказательство гипотезы о мере множества S-чисел. Исследования в этой области были продолжены В. И. Берником.

Интересных результатов в области геометрии чисел и свойств приближения алгебраических чисел были получены во 70–80-ых годах XX века Б. Ф. Скубенко. В частности, в его работах представлена оценка константы наилучших диофантовых приближений для двумерного случая. Исследования в области приближения действительных чисел и теории цепных дробей были продолжены в 1990–2010-ых годах Н. Г. Мощевитиным, О. Н. Германом, А. Д. Брюно, Н. М. Добровольским и Н. Н. Добровольским.

Ключевые слова: история диофантовых приближений, русская школа теории чисел.

Библиография: 45 названия.

Для цитирования:
Ю. А. Басалов. О русской научной школе диофантовых приближений // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 388–403.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ: (грант 16-41-710194_р_центр_а).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 511.9 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-388-403

About the Russian scientific school of diophantine approximations

Yu. A. Basalov

Basalov Yurij Aleksandrovich — Postgraduate Student, Tula State Pedagogical University of Leo Tolstoy, Department of Algebra, Mathematical Analysis and Geometry (Tula).
e-mail: basalov_yurij@mail.ru

Abstract

The theory of diophantine approximations, as a branch of mathematics, began to take shape in the 19th century. A significant contribution to its development was made by Russian and Soviet mathematicians. In this paper, we give a historical review of some results in the field of Diophantine approximations obtained by the Russian scientific school of number theory.

One of the first, P. L. Chebyshev became interested in the problems of the theory of diophantine approximations in the second half of the 19th century. These studies were continued by his students A. N. Korkin and E. N. Zolotarev. In 1880 academician A. A. Markov (the student of A. N. Korkin) in his master thesis brilliantly solved the problem of describing classes of poorly approximating indefinite quadratic forms. Another student of P. L. Chebyshev — G. F. Voronoj, along with G. Minkowski, laid the foundations for a new, closely related to Diophantine approximations section of mathematics — the geometry of numbers.

A. I. Hinchin made a significant contribution to the development of the metric theory of continued fractions. In 1936, he obtained *the Khinchin constant* — the value of the geometric mean of the decomposition into a continued fraction, for almost all real numbers. The awesomeness of this fact is noted by mathematicians around the world.

A significant contribution to the development of the metric theory of diophantine approximations belongs to Belarusian mathematicians. In 1964 V. G. Sprindzhuk obtained a proof of the hypothesis on the measure of the set of S-numbers. Research in this area was continued by V. I. Bernik.

Interesting results in the field of geometry of numbers and the approximation properties of algebraic numbers were obtained in the 70–80s of the XX century by B. F. Skubenko. In particular his work presents an estimate of the constant of the best Diophantine approximations for the two-dimensional case. Research in the field of approximation of real numbers and the theory of continued fractions was continued in the 1990–2010s by N. G. Moshchevitin, O. N. German, A. D. Bruno, N. M. Dobrovol'skii and N. N. Dobrovol'skii.

Keywords: history of diophantine approximations, Russian school of number theory.

Bibliography: 45 titles.

For citation:
Yu. A. Basalov, 2020, "About the Russian scientific school of diophantine approximations", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 388–403.

1. Введение

Теория диофантовых приближением сформировалось как естественное развитие теории цепных дробей, которая активно развивалась в XVII–XIX веках. Исследованию непрерывных дробей посвящали свои работы Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, Ж. Лиувилль, К. Ф. Гаусс. Ключевой особенностью цепных дробей является то, что они обеспечивают наилучшие приближения действительного числа рациональными дробями, обладая при этом простой и изящной алгебраической и геометрической структурой.

Теория диофантовых приближений интересуется более общими вопросами аппроксимации в целых числах. Многие проблемы теории диофантовых приближений исходят из фундаментального утверждения, полученного П. Г. Дирихле в 1842 году [4]

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_{ij}(1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m)$ *и* Q *— произвольные действительные числа, причем* $Q > 1$. *Тогда найдутся целые числа* $q_1,\ q_2, \dots,\ q_m$ *и* $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n$ *такие, что* $1 \le max\,(|q_1|,\ |q_2|, \dots,\ |q_m|) < Q^{\frac{n}{m}}$ *и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \le \frac{1}{Q}, \qquad (1 \le i \le n).$$

В данной работе мы дадим краткий обзор русской школы теории диофантовых приближений. С более частным вопросом истории оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений можно ознакомиться в работе [16].

2. Петербургская школа

Петербургской, а вместе с ней и русской, научной школе в области диофантовых приближений более полутора веков. К первым исследованиям русских ученых в этой области можно отнести работу П. Л. Чебышева 1866 года «Об одном арифметическом вопросе» [63]. В этой работе он получает оценку степени приближения для неоднородной линейной формы. А именно, показывает, что для произвольных чисел a, b существует бесконечное количество пар целых чисел x, y таких, что

$$|x - ay - b| < \frac{2}{y}.$$

Изучение этого вопроса было затем продолжено Ш. Эрмитом [8], а позднее Г. Минковским [11].

В теории бинарных квадратичных форм известно следующее утверждение. Если $\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — бинарная форма с произвольными коэффициентами a, b, c и определителем $\Delta = b^2 - 4ac \ne 0$ (если $\Delta = 0$, то бинарная форма приводится к линейной), то переменным x, y можно дать такие целые, не равные одновременно нулю, значения, что

$$\varphi(x, y) \le \sqrt{\frac{1}{3}\,|\Delta|} \quad \text{для определенных квадратичных форм, где } \Delta < 0 \tag{1}$$

и

$$\varphi(x, y) \le \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|} \quad \text{для неопределенных квадратичных форм, где } \Delta > 0 \tag{2}$$

Указанное утверждение впервые было четко сформулировано учениками П. Л. Чебышева, А. Н. Коркиным и Е. Н. Золотарёвым [9]. При исследовании этого вопроса ими была обнаружена принципиальная разница между случаями $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$. При $\Delta > 0$ равенство $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|}$ достигается на некотором классе эквивалентных квадратичных форм. Если исключить этот класс из рассмотрения, то можно усилить неравенство (2) как

$$\varphi(x, y) \le \sqrt{\frac{1}{8}\,|\Delta|},$$

где равенство также достигается на определенном классе квадратичных форм. Этот процесс можно продолжать далее. В тоже время, для $\Delta < 0$, после исключения из рассмотрения класса эквивалентных форм для которых $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{3}\,|\Delta|}$, для любого $\lambda < \frac{1}{3}$ можно будет найти формы для которых достигается $\varphi(x, y) < \sqrt{\lambda\,|\Delta|}$.

Задача дальнейшего продолжения ряда описанных выше констант $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \dots$ (при $\Delta > 0$) была решена учеником Коркина, академиком А. А. Марковым в 1880 году в магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» [40]. А. А. Марков доказал, что ряд чисел $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{25}{221}, \dots$ бесконечный и стремится к пределу $\frac{4}{9}$. По сути, этот ряд и соответствующие каждому члену квадратичные формы описывает классы плохоприближаемых неопределенных квадратичных

форм. Фундаментальность этой работы отмечает Б. Н. Делоне в работе [35]. В этой же работе он дает интересную геометрическую интерпретацию задачи А. А. Маркова и ее обобщения.

Разрешив полностью проблему Коркина для неопределенных бинарных форм, А. А. Марков в работах «О неопределенных тройничных квадратичных формах» (1901 г.) [41], «О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными» (1902 г.) [42] ставит аналогичную проблему для неопределенных тройничных и четвертичных форм. Позднее исследования в этом направлении продолжил Б. А. Венков в работе [28] от 1945 года.

Значительный вклад в тесно связанный с диофантовыми приближениями разделы геометрии чисел внес другой ученик П. Л. Чебышева — Г. Ф. Вороной. Он подошел к вопросу изучения квадратичных форм с точки зрения геометрии [30]. В своей докторской диссертации «Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей» (1896 г.) [29], удостоенной, премии имени В. Я. Буняковского, он построил и обосновал новые алгоритмы вычисления основных единиц кубического поля алгебраических чисел.

Важным понятием геометрии чисел является

Определение 1. *Пусть $\mathbb{F}$ — точечное тело. Если решетка Λ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то Λ допустима для $\mathbb{F}$. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток Λ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$.

Вычисление критического определителя произвольного тела $\mathbb{F}$ является сложной задачей. Вопросам оценки значений некоторых критических определителей посвящены исследования А. В. Малышева. В своих работах он активно использовал метод Л. Дж. Морделла (1973 г.)[39]. В сочетании с использованием ЭВМ это позволило ему достичь значительных результатов в доказательстве гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ [38, 34].

В работе 1962 года «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами» [38] А. В. Малышевым дается исчерпывающее описание задачи целочисленного представления чисел квадратичными формами $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$ с целыми коэффициентами, в частности определение количества таких представлений. Некоторые асимптотические формулы количества представлений целого числа квадратичными формами можно найти в работе 1979 года Е. В. Подсыпанина «Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева)» [49].

В работе [47] Е. В. Подсыпанин проводит подробное исследование одного из вариантов обобщения цепных дробей — алгоритма Вигго Бруна — исследует его сходимость, получает выражение знаменателя n-ых подходящих дробей как функции неполных частных $a_1, \ldots, a_n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. В работе [48] Е. В. Подсыпанин получает оценку для длины периода квадратичной иррациональности, сформулированную в следующей теореме

Теорема 2. *Пусть*

$$D = \begin{cases} f^2 d, & \text{если } d \equiv 1 (\mathrm{mod} 4), \\ 4f^2 d, & \text{если } d \equiv 2, 3 (\mathrm{mod} 4), \end{cases}$$

где $d > 1$ — бесквадратное число, $L(1, \chi)$ — L-функция Дирихле, h — число классов вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Тогда длина l периода квадратичной иррациональности дискриминанта D удовлетворяет следующему неравенству

$$l < \frac{C\sqrt{D} L(1, \chi)}{h},$$

где

$$D = \begin{cases} 1/\left(2 \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), & \text{если } f = 1, \\ 1/\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}, & \text{если } f > 1. \end{cases}$$

Нельзя не отметить вклад в развитие теории диофантовых приближений и цепных дробей в нашей стране А. Я. Хинчина. В 1936 году в работе «Метрические задачи теории иррациональных чисел» [60]

им было доказано существование постоянной Хинчина. Пусть

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

разложение в цепную дробь, a_0 целое, а остальные a_i натуральные, тогда для почти всех вещественных чисел x выполняется, что среднее геометрическое элементов этого разложения равно

$$\lim_{n\to\infty} (a_1 a_2 ... a_n)^{1/n} = K_0 = 2,6854520010\ldots$$

При этом постоянную Хинчина K_0 можно выразить в виде бесконечного произведения

$$K_0 = \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r}.$$

Значимость этого результата сложно переоценить. Если каким-либо образом случайно выбирать элементы последовательности натуральных чисел, то среднее геометрическое элементов, вообще говоря, совершенно не обязательно будет одним и тем же для всех или почти всех получаемых последовательностей. Поэтому существование постоянной Хинчина — то обстоятельство, что среднее геометрическое элементов разложения в цепную дробь оказывается одним и тем же для почти всех вещественных чисел — это один из самых поразительных фактов в математике (по мнению профессора MIT С. Финча в книге [6]).

Также, нельзя не отметить монографию А. Я. Хинчина «Цепные дроби» [62], где дается исчерпывающего описание теории непрерывных дробей. В частности, в этой работе подробно показывается связь цепных дробей и диофантовых приближений одного действительного числа. В работе «Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений» [61] излагается ряд методических вопросов, связанных с применением принципа Дирихле.

С течением времени, исследования в области диофантовых приближений и в области цепных дробей стали развиваться в различных направлениях. Далее мы рассмотрим результаты в области диофантовых приближений и геометрии чисел, а затем вернемся к вопросам связанным с исследованием цепных дробей.

Известна следующая гипотеза Минковского: в R^n для любой решетки Λ и любой точки L в множестве $\Lambda + L$ содержится точка $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, для которой будет выполнено

$$M = \prod_{i=1}^{n} |y_i| \le 2^{-n} |\det \Lambda|.$$

Вопросу ее доказательства посвящено множество работ. Первый значительный результат был получен в 1934 году Н. Г. Чеботаревым в работе «Заметки по алгебре и теории чисел» [64]. Он получил оценку

$$M \le 2^{-n/2} |\det \Lambda|.$$

Исследованиям связанными с гипотезой Минковского посвящены работы Б. Ф. Скубенко. В 1972–1976 годах в работах [50, 51, 52] он излагает доказательства гипотезы Минковского для $n \le 5$. В частности он вводит и использует понятие «парус» — границу замкнутой выпуклой оболочки множества $(\Lambda \backslash 0)^f$, которое строится как отображение f множества $\Lambda \backslash 0$, полученного из Λ путем отбрасывания точки 0. Отображение f переводит точку $X = (x_1, \ldots, x_n)$ в точку $X^f = (x_1^2, \ldots, x_n^2)$. Парус состоит из $(n-1)$-мерных граней, соприкасающихся по $(n-2)$-мерным граням. Грани являются выпуклыми конечными многогранниками. В работе «К гипотезе Минковского при больших n» [53] он дает оценку

$$M < 2^{n/2} e^2 \left(\frac{\log^2 n}{n}\right)^{1/3},$$

для достаточно больших n.

В работе 1982 года «К совместным приближениям алгебраических иррациональностей» [54] Б. Ф. Скубенко дает ряд интересных результатов для совместных приближений чисел чисто вещественных алгебраических, и в частности кубических полей. Пусть расстояние до ближайшего целого определяется как

$$||q\theta|| = \min_{a\in\mathbb{Z}} |q\theta - a|,$$

а константой наилучших диофантовых приближений называют наименьшее C_n для которого существует $\theta_1, \ldots, \theta_n$, что для бесконечного количества q выполняется

$$\max_{i=1,n} ||q\theta_i|| \le C_n q^{-1/n}.$$

В этой работе Б. Ф. Скубенко во-первых повторяет полученную в 1955 году Дж. В. С. Касселсом [3] оценку для константы наилучших диофантовых приближений для чисел из чисто вещественного кубического поля

$$\max\left(||q\theta_1||, ||q\theta_2||\right) \le \frac{2}{7} q^{-1/2},$$

где θ_1, θ_2 принадлежит полю $\mathbb{Q}(2\cos\frac{2\pi}{7})$. Во-вторых, Б. Ф. Скубенко дает оценку

$$||q\theta_i|| \cdot ||q\theta_j|| < \alpha_{ij}(q\log q)^{-1}$$

для произвольного целого q, θ_i, θ_j из чисто вещественного кубического поля, и числа α_{ij}, зависящего только от θ_i, θ_j.

Известна следующая обобщенная теорема Рота–Шмидта [14].

Теорема 3. *Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вещественные алгебраические числа, такие что $1, \theta_1, \ldots, \theta_n$ линейно независимы над полем рациональных чисел. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует только конечное количество натуральных чисел q таких, что*

$$||q\theta_1|| \cdot \ldots \cdot ||q\theta_n|| < q^{-1-\varepsilon}.$$

В работе «К обобщенной теореме Рота–Шмидта» [55] Б. Ф. Скубенко дает следующее дополнение описанной выше теоремы.

Теорема 4. *Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_n$ вещественные алгебраические числа из чисто вещественного алгебраического поля степени n. Тогда существует $C > 0$, что*

$$||q\theta_1|| \cdot \ldots \cdot ||q\theta_n|| \le C(q\log q)^{-1}.$$

для бесконечного числа натуральных чисел q.

3. Белорусская школа

Значительных результатов в теории диофантовых приближений достигли белорусские ученые. В. Г. Спринджуком в 1964 году [56] было получено доказательство гипотеза Малера о мере множества S-чисел. Суть этого утверждения в следующем. Пусть ω – трансцендентное число. Для данного натурального n определим $w_n(\omega)$ – точную верхнюю грань тех чисел w, для которых существует бесконечное количество целочисленных полиномов P степени не более n, удовлетворяющих неравенству

$$|P(\omega)| < h^{-w}, \quad (h \to \infty)$$

где h – высота полинома P. Положим

$$\frac{1}{n} w_n(\omega) = \begin{cases} \theta_n(\omega), & \text{если } \omega \text{ вещественно,} \\ \nu_n(\omega), & \text{если } \omega \text{ комплексно.} \end{cases}$$

Известно, что

$$\theta_n(\omega) \ge 1, \quad \nu_n(\omega) \ge \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \quad n \ge 1.$$

Гипотеза Малера утверждает, что для почти всех (в смысле меры Лебега) вещественных и комплексных чисел

$$\sup_n \theta_n(\omega) = 1, \quad \sup_n \nu_n(\omega) = \frac{1}{2}.$$

В работах [57, 58] В. Г. Спринджуком проводится исследование значений в алгебраических точках для расширения класса E функций Зигеля. В. Г. Спринджук вводит класс E^* функций

$$\varphi(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cdot \frac{z^v}{v!}$$

обладающих следующими свойствами

- число c_v – алгебраические и принадлежат полю конечной степени над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$;
- существует число $\alpha, 0 < \alpha < 1$, для которого $|c_v| < c(\varepsilon)(v!)^{\alpha+\varepsilon}$;
- для фиксированного n пусть q_{nm} – наименьшее натуральное число q, для которого все числа $q\, c_{v_1} c_{v_2} \ldots c_{v_n}$, $v_1 + v_2 + \ldots + v_n \leq m$ – целые; существует последовательность чисел $\beta_n, 0 \leq \beta_n = o(\sqrt{n})$ при $n \to \infty$ для которых $q_{nm} < c(n, \varepsilon)(m!)^{\beta_n+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$.

Исследования в области метрической теории диофантовых приближений были продолжены В. И. Берником [17]. В работе «Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов» в 1980 году им было доказано предложенное В. Г. Спринджуком обобщение гипотезы Малера.

Теорема 5. *Пусть $w_n(\overline{\omega})$ – точная верхняя грань тех $w > 0$, для которых неравенство*

$$\prod_{i=1}^{k} |P(\omega_i)| < h^{-w}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$. Тогда для почти, всех со $\overline{\omega}$

$$w_n(\overline{\omega}) = n - k + 1.$$

Продолжением этих исследований стало доказательство в 1984 году гипотезы А. Бэйкера [18] и доказательство В. И. Берником [19] и В. И. Бересневичем [2] аналога метрической теоремы Хинчина для многочленов произвольной степени. Дальнейшие исследования в этой области были направлены на переход от степенной функции в правой части оценки к логарифмической. Это позволяет получить многие тонкие характеристики классических множеств, возникающих в теории трансцендентных чисел. В работе 1997 года «Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов» [20] В. И. Берником и В. Н. Борбатом была получена двумерная оценка следующего вида:

Теорема 6. *Пусть $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, h – его высота, функция $\Psi(x)$ монотонно убывает при $x > 0$ и $\sum_{t=1}^{\infty} \Psi(t) < \infty$. Тогда система неравенств*

$$\begin{cases} |P(\omega_1)| < h^{-w_1} \Psi^{v1}(h), \\ |P(\omega_2)| < h^{-w_2} \Psi^{v2}(h), \end{cases}$$

где $w_1 + w_2 = n - 2$, $v_1 + v_2 = 1$, имеет для почти всех $(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ лишь конечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

4. Современная школа

В 1992 году Н. Г. Мощевитин в работе «О совместных приближениях алгебраических чисел» [43], основываясь на работах Б. Ф. Скубенко, вместо оценки совместного произведения получил оценку для отдельных сомножителей, сформулированную в следующей теореме

Теорема 7. *Пусть натуральное q задает совместные приближения к числам $\theta_1, \ldots, \theta_n$:*

$$||q\theta_i|| < cq^{-1/s}, \quad i = \overline{1,n}$$

где $c > 0$ — некоторая константа. Тогда

$$||q\theta_i|| > Cq^{-1/s} \log^{-\beta} q, \quad i = \overline{1,n}$$

с константами $C, \beta > 0$, зависящими от $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и c.

В работе 2002 года «К теореме Блихфельдта — Мюллендера — Спона о совместных приближениях» [45] развивает, полученную В. Споном [15] (1968 г.) и В. Г. Новаком [13] (1993 г.), оценку сверху константы наилучших диофантовых приближений

$$C_n \leq \frac{1}{\beta_n}, \quad \beta_n \geq n \cdot 2^{n+1} \left(\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1} du}{(1+u)^n + (1+u^n)} + \varepsilon_n \right), \quad \varepsilon_n > 0.$$

Н. Г. Мощевитин получил оценку для остаточного члена

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2(\log 2\pi)^3 e n^2 \cdot 2^{2n+7}} \left(1 - \frac{2^{1/m}}{2}\right)^{n+2} > 0, \quad n \geq 2.$$

При ее доказательстве он использовал следующее свойство совместных диофантовых приближений, полученное Дж. К. Лагариасом [10] в 1982 году.

Лемма 1. *Пусть знаменатели q n-мерных наилучших совместных приближений образуют бесконечную последовательность $q_1 < \ldots < q_\mu < q_{\mu+1} < \ldots$. Тогда $q_{\mu+2^{n+1}} > 2q_\mu$.*

В 1982 году Дж. К. Лагариас ввел величину, показывающую скорость роста знаменателей совместных приближений

$$g(\alpha) = \lim_{\alpha \in \mathbb{R}^n} \inf_{\nu \to \infty} q_\nu^{1/\nu},$$

где $q_1 < \ldots < q_i < q_{i+1} < \ldots$ последовательные знаменатели совместных диофантовых приближений и получил оценку

$$g(\alpha) \geq \theta \left(\frac{8 + 13\theta}{\theta^{13}} \right)^{1/11} \approx 1.28040\ldots$$

В работе 2005 года «О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме» [46] Н. Г. Мощевитин улучшил оценку $g(\alpha)$ для двух чисел

$$g(\alpha) \geq \theta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.2720\ldots,$$

Несколько иной подход к задачам теории диофантовых приближений состоит в рассмотрении понятия диофантовых экспонент. О. Н. Герман излагает это понятие следующим образом [31]. Пусть дана вещественная матрица

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1m} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{n1} & \theta_{n2} & \ldots & \theta_{nm} \end{pmatrix},$$

тогда

Определение 2. *Точная вещественных чисел γ, для которых существует бесконечно много таких $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ одновременно не равных 0 и $, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}$ что*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{1 \leq j \leq m} \theta_{ij} x_j - y_i \right| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)^{-\gamma}$$

называется (регулярной) диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\beta(\Theta)$.

Определение 3. *Точная вещественных чисел γ, для которых существует бесконечно много таких $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Z}$ одновременно не равных 0 и $, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}$ что*

$$\prod_{1\le i\le n}\left|\sum_{1\le j\le m}\theta_{ij}x_j - y_i\right| \le \left(\prod_{1\le i\le m}\max(1,|x_i|)\right)^{-\gamma}$$

называется (регулярной) мультипликативной диофантовой экспонентой матрицы Θ и обозначается $\beta_M(\Theta)$.

В работе [31] О. Н. Герман указывает на тесную связь этого понятия с теоремами переноса. Например, известный принцип переноса Хинчина изящно выражается в описанных выше терминах

Теорема 8. *Если $n = 1$, то*

$$\frac{\beta(\Theta)}{(m-1)\beta(\Theta)+m} \le \beta\left(\Theta^T\right) \le \frac{\beta(\Theta)-m+1}{m},$$

где Θ^T — транспонированная матрица Θ.

В работе «Усиление теоремы переноса Малера» [7] (2012 год) О. Н. Германом получены следующие теоремы переноса

Теорема 9. *Пусть пространство целочисленных решений системы*

$$\Theta\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$$

не одномерно. Тогда для всех натуральных n, m, не равных одновременно 1, справедливы три неравенства

$$\beta\left(\Theta^T\right) \ge \frac{n\beta(\Theta)+n-1}{(m-1)\beta(\Theta)+m},$$

$$\beta\left(\Theta^T\right) \ge \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta))-(1-\alpha(\Theta))}{(m-1)(1+\beta(\Theta))+(1-\alpha(\Theta))},$$

$$\beta\left(\Theta^T\right) \ge \frac{(n-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})-(1-\alpha(\Theta)v)}{(m-1)(1+\beta(\Theta)^{-1})+(1-\alpha(\Theta)^{-1})},$$

где $\alpha(\Theta)$ это равномерная диофантова экспонента матрицы Θ — точная верхняя грянь вещественных чисел γ, для которых при любом достаточно большом t система неравенств

$$\max_{1\le i\le n}\left|\sum_{1\le j\le m}\theta_{ij}x_j - y_i\right| \le t^{-\gamma}, \quad \max_{1\le i\le m}|x_i| \le t$$

имеет ненулевое решение $\overrightarrow{x} \in \mathbb{Z}^m$, $\overrightarrow{y} \in \mathbb{Z}^n$.

Дальнейшее развитие этих исследований можно найти в работе О. Н. Германа Диофантовы экспоненты решеток» [32].

Как уже ранее отмечалось, теория диофантовых приближений тесно связана с теорией непрерывных дробей. В последнее время активные исследования в области цепных дробей велись В. И. Парусниковым и А. Д. Брюно. Ими в серии работ был дано обобщение алгоритма цепных дробей в начале на трехмерный [21, 22] (1994–1997 гг.), а потом и на многомерный случай [23, 24, 25, 26] (2004–2015 гг.).

Изложим суть этого обобщения. Пусть в n-мерном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ с координатами $X = (x_1, \ldots, x_n)$ заданы m однородных вещественных форм (т. е. многочленов от переменных) $f_1(X), \ldots, f_m(X)$. Модули $g_i(X) = |f_i(X)|$ форм $f_i(X), i = \overline{1,m}$, задают отображение $G(X) = (g_1(X), \ldots, g_m(X))$ пространства R^n в положительный ортант $S = R^m_+$ в m-мерном пространстве $\mathbb{R}^m$ с координатами

$$S = (s_1, \ldots, s_m) : s_i = g_i(X) = |f_i(X)|, i = \overline{1, \ldots, m}$$

При этом целочисленная решётка $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ отображается в некоторое множество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{S}$. Замыкание выпуклой оболочки $\mathbb{H}$ множества $\mathbb{Z}\backslash 0$ является выпуклым множеством. Все целочисленные точки $X \in \mathbb{Z}^n\backslash 0$, отображающиеся на границу $\delta\mathbb{H}$ множества $\mathbb{H}$, назовём граничными. Ограничимся случаями, когда выпуклое множество $\mathbb{H}$ является многогранным, т.е. его граница $\delta\mathbb{H}$ состоит из вершин, рёбер, граней различных размерностей и не содержит непрерывных «кривых» частей. В этих случаях граница $\delta\mathbb{H}$ вычисляется с помощью стандартных программ для вычисления выпуклых многогранных оболочек [1]. Это и даёт алгоритмическое обобщение цепной дроби на любую размерность.

В работе «Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби» [27] А. Д. Брюно сводит вычисление основных единиц кольца $\mathbb{Z}[\lambda]$ для целого неприводимого в $\mathbb{Q}$ вещественного многочлена и к вычислению куска границы $\delta\mathbb{H}$, содержащий $(m-1)$-мерную грань.

Исследованиями, связанными с разложением алгебраических чисел в цепные дроби, в настоящее время занимаются Н. М. Добровольский и Н. Н. Добровольский. В работах [5, 36, 37] ими было проведено исследование, поведения остаточных дробей и их сопряжённых чисел для разложения алгебраических чисел в цепные дроби, например, что начиная с некоторого места все остаточные дроби являются приведёнными алгебраическими числами. В этих работах излагаются свойства минимальных многочленов остаточных дробей. В частности установлена связь значений минимальных многочленов и неполных частных разложений алгебраических чисел, сформулированная в следующей теореме

Теорема 10. *Пусть $\alpha = \alpha_0$ — вещественный корень неприводимого целочисленного многочлена*

$$f_0(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x], a_n > 0,$$

и число α имеет разложение в цепную дробь

$$\alpha = \alpha_0 = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{q_k + \frac{1}{\cdots}}}}.$$

Пусть последовательность минимальных многочленов $f_m(x)$ для остаточных дробей α_m задана формулами и номер $m_0 = m_0(\alpha, \varepsilon)$ определен из неравенства

$$\frac{2(n-1)}{Q_{m_0-1}\delta(\alpha)} < \varepsilon,$$

тогда для любого $m > m_0$ справедливы равенства

$$q_m = \begin{cases} q_m^*, & \text{если } f_m(q_{m+1}^*) > 0 \text{ и } f_m(q_m^*) < 0 \\ q_{m+1}^*, & \text{если } f_m(q_{m+1}^*) < 0 \\ q_{m-1}^*, & \text{если } f_m(q_m^*) > 0 \end{cases}$$

где

$$q_m^* = \left[-\frac{f'_{m-1}(q_{m-1})}{f_{m-1}(q_{m-1})} + \frac{(n-1)Q_{m-2}}{Q_{m-1}} \right].$$

В работе [37] была предложена классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей с точки зрения разложения их в цепные дроби.

5. Заключение

Русская научная школа внесла значительный вклад в развитие теории диофантовых приближений. Фундаментальные результаты А. А. Маркова [40], А. Я. Хинчина [60], В. Г. Спринджука [56] дали мощный толчок к развитию теории чисел во всем мире. Значительный вклад в исследование свойств приближения алгебраических и действительных чисел внес во второй половине XX века Б. Ф. Скубенко [50, 51, 52, 53, 54, 55], а в развитие метрической теории диофантовых приближений белорусские ученые [17, 18, 20, 56, 57, 58, 59].

Активные исследования в этой области продолжают проводиться российскими учеными и в настоящее время [26, 27, 31, 7, 32, 36, 5, 37].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T., The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Trans. on Mathematical Software. 1996. Vol. 22. No. 4. P. 469–483.
2. Beresnevich V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers // Acta Arithmetica. 1999. Vol. 90. P. 97–112.
3. Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.
4. Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.
5. Dobrovol'skii N. M., Balaba I. N., Rebrova I. Yu., Dobrovol'skii N. N. On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2016, No. 2. pp. 27–39.
6. Finch S. R. Mathematical Constants. Cambridge University Press, 2003 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).
7. German O. N. On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2012. Vol. 2. No. 2. pp. 22–51.
8. Hermite C. Sur une extension donnee a la theorie des fractions continues par M. Tchebychev // J. reine angew. Math. 1879. Vol. 88 P. 10-15.
9. Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques // Mathematische Annalen. 1873. Vol. 6. P. 366–389.
10. Lagarias J. S. Best simultaneous Diophantine approximation I. Growth rates of best approximation denominators // Trans. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 272. P. 545–554.
11. Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.
12. Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773–781, 782–792.
13. Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.
14. Schmidt W. M. Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals // Acta Math. 1970. Vol. 125. P. 189–201.
15. Spohn W. G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 885–894.
16. Ю. А. Басалов. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, Т. 19, Вып. 2, 2018, С. 388-405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411
17. Берник В. И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Том 44. Вып. 1. С. 24–45.
18. Берник В. И. Доказательство гипотезы А. Бэйкера в метрической теории трансцендентных чисел // Докл. АН СССР. 1984. Том 277. Номер 5. С. 1036–1039.
19. Берник В. И. О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов // Acta Arithmetica. 1989. Том 53. С. 17–28.
20. Берник В. И., Борбат В. Н. Совместная аппроксимация нуля значениями целочисленных полиномов // Тр. МИАН. 1997. Том 218. С. 58–73.
21. Брюно А. Д., Парусников В. И. Многогранники Клейна для двух кубических форм Давенпорта // Матем. заметки. 1994. Том 56. С. 9–27.
22. Брюно А. Д., Парусников В. И. Сравнение разных обобщений цепных дробей // Матем. заметки. 1997. Том 61. С. 339–348.

23. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N45. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 2004.

24. Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Том 402. Номер 4.

25. Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Том 402. Номер 6.

26. Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник. 2015. Том 16. С. 35–65.

27. Брюно А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби / Программирование. 2019. Номер 2. С. 17–31.

28. Венков Б. А. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Изв. АН СССР. 1945. Сер. матем., Том 9, вып. 6. С. 429–494.

29. Вороной Г. Ф. Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей // Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 1. — Киев.: Изд-во АН Укр. ССР. 1952. С. 200–394.

30. Вороной Г. Ф. О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм // Вороной Г. Ф. Собрание сочинений. Т. 2. — Киев.: Изд-во АН Укр. ССР. 1952. С. 174–241.

31. Герман О. Н. Плохо приближаемые матрицы и диофантовы экспоненты // Чебышевский сб. 2013. Том 14. Вып. 4. С. 38–79.

32. Герман О. Н. Диофантовы экспоненты решеток // Совр. пробл. матем. 2016. Вып. 23. С. 35–42.

33. Глазунов Н. М, Голованов А. С., Малышев А. В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1986. вып. 151. С. 40–53.

34. Гришмановская К. И., Малышев А. В., Пачев У. М., Фидарова А. М. Доказательство гипотезы минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ в случае $5 < p < 6$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. вып. 67. С. 95–107.

35. Делоне Б. Н. О работе А. А. Маркова "О бинарных квадратичных формах положительного определители"// УМН. 1948. Том 3. Вып. 5. С. 3–5.

36. Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Том 16. Вып. 3. С. 147–182.

37. Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Соболев Д. К., Соболева В. Н. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2017. Том 18. Вып. 2. С. 98–128.

38. Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Том 65. С. 3–212.

39. Малышев А. В. Метод Морделла взаимных решеток в геометрии чисел // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. вып. 33. С. 97–115.

40. Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя // Марков А. А. Избранные труды. — М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 9–85.

41. Марков А. А. О неопределенных тройничных квадратичных формах // Известия Императорской Академии Наук. 1901. Т. 14. вып. 5. С. 509–523.

42. Марков А. А. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными // Известия Императорской Академии Наук. 1902. Т. 16. вып. 3. С. 97–108.

43. Мощевитин. Н. Г. О совместных приближениях алгебраических чисел // Матем. заметки. 1992. Том 51. С. 72–80.

44. Мощевитин. Н. Г. О совместных диофантовых приближениях. Векторы заданного диофантова типа // Матем. заметки. 1997. Том 61. С. 706–716.

45. Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН. 2002. Том 239. С. 268–274.

46. Мощевитин. Н. Г. О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005. Том 6. С. 50–53.

47. Подсыпанин Е. В. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Том 67. С. 184–194.

48. Подсыпанин Е. В. О длине периода квадратичной иррациональности // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Том 82. С. 95–99.

49. Подсыпанин Е. В. Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева) // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Том 82. С. 100–102.

50. Скубенко Б. Ф. К гипотезе Минковского для $n = 5$ // Докл. АН СССР. 1972. Том 205. С. 1304–1305.

51. Скубенко Б. Ф. Доказательство гипотезы Минковского о произведении n линейных неоднородных форм от n переменных для $n \leq 5$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. Том 33. С. 6–36.

52. Скубенко Б. Ф. Новый вариант доказательства неоднородной гипотезы Минковского для $n = 5$ // Тр. МИАН СССР. 1976. Том 142. С. 240–253.

53. Скубенко Б. Ф., К гипотезе Минковского при больших n // Тр. МИАН СССР. 1978. Том 148. С. 218–224.

54. Скубенко Б. Ф. К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Том 116. С. 142–154.

55. Скубенко Б. Ф. К обобщенной теореме Рота–Шмидта // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1984. Том 134. С. 226–231.

56. Спринджук В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Том 29. Вып. 2. С. 379–436.

57. Спринджук В. Г. Конечность числа рациональных и алгебраических точек на некоторых трансцендентных кривых // Докл. АН СССР. 1967. Том 177. Номер 3. С. 524–527.

58. Спринджук В. Г. Иррациональность значений некоторых трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Том 32. Вып. 1. С. 93–107.

59. Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // УМН. 1980. Том 35. Вып. 4. С. 3–68.

60. Хинчин А. Я. Метрические задачи теории иррациональных чисел // УМН. 1936. Вып. 1. С. 7–32.

61. Хинчин А. Я. Принцип Дирихле в теории диофантовых приближений // УМН. 1948. Т. 3. Вып. 3. С. 3–28.

62. Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Физматгиз, 1961.

63. Чебышев П. Л. Об одном арифметическом вопросе.– СПб., 1866 // Чебышев П. Л. Избранные труды. — М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 55–105.

64. Чеботарев Н. Г. Заметки по алгебре и теории чисел. — Уч. зап. КГУ, 1934, // Чеботарев Н. Г. Собрание сочинений. Том 1. — М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949. С. 208–221.

REFERENCES

1. Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. T., 1996, “The Quickhull algorithm for convex hulls“, *ACM Trans. on Mathematical Software*, vol. 22, no. 4, pp. 469–483.

2. Beresnevich V. V. 1999, “On approximation of real numbers by real algebraic numbers“, *Acta Arithmetica*, vol. 90, pp. 97–112.

3. Cassels J. W. S. 1955, “Simultaneous Diophantine approximation“, *J. London Math. Soc.*, vol. 30, pp. 119-121.

4. Dirichlet L. G. P. 1842, “Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen“, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* , pp. 93-95.

5. Dobrovol'skii N. M., Balaba I. N., Rebrova I. Yu., Dobrovol'skii N. N. 2016, “On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities“, *Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat*, no. 2, pp. 27–39.

6. Finch S. R. 2003, *Mathematical Constants*, Cambridge University Press (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Book 94).

7. German O. N. 2012, “On Diophantine exponents and Khintchine's transference principle“, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, vol. 2, no. 2, pp. 22–51.

8. Hermite C. 1879, “Sur une extension donnee a la theorie des fractions continues par M. Tchebychev“, *J. reine angew. Math.* Vol. 88, pp. 10-15.

9. Korkine A., Zolotareff G. 1873, “Sur les formes quadratiques“ *Mathematische Annalen*, vol. 6, pp. 366–389.

10. Lagarias J. S. 1982, “Best simultaneous Diophantine approximation I. Growth rates of best approximation denominators“, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 272, pp. 545–554.

11. Minkovski H. 1896, *Geometrie der Zahlen* Berlin, Teubner.

12. Mordell L. 1946, “Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II “, *Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci.*, vol. 49, pp. 773–781, 782–792.

13. Nowak W. G. 1993, “A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants“, *Graz. Math. Ber.*, vol. 318. pp. 105-110.

14. Schmidt W. M. 1970, “Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals“, *Acta Math.*, vol. 125, pp. 189–201.

15. Spohn W. G. 1968, “Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation“, *Amer. J. Math.*, vol. 90, pp. 885–894.

16. Basalov Yu. A. 2018, “On the history of estimates of the constant of the best joint diophantine approximations“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, issue 2, pp. 388–405. `https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411`

17. Bernik V. I. 1980, “Metric theorem on the joint approximation of zero by values of integer polynomials“, *Izv. USSR Academy of Sciences*, Ser. math., vol. 44, issue 1, pp. 24–45.

18. Bernik V. I. 1984, “Proof of A. Baker's conjecture in the metric theory of transcendental numbers“, *Dokl. USSR Academy of Sciences*, Volume 277, no. 5, pp. 1036–1039.

19. Bernik V. I. 1989, “On the exact order of approximation of zero by the values of integer polynomials“, *Acta Arithmetica*, vol. 53, pp. 17–28.

20. Bernik V. I., Borbat V. N. 1997, “Joint approximation of zero by the values of integer polynomials“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, vol. 218, pp. 58–73.

21. Bruno A. D., Parusnikov V. I., 1994, “Klein polyhedra for two cubic forms of Davenport“, *Math. notes*, vol. 56, pp. 9–27.

22. Bruno A. D., Parusnikov V. I., 1997, “Comparison of different generalizations of continued fractions// “, *Math. notes*, vol. 61, pp. 339–348.

23. Bruno A. D. 2004, “Generalized continued fraction algorithm“, *Preprint No. 45 Keldysh IAM.*

24. Bruno A. D. 2005, “The structure of the best diophantine approximations“, *Proceedings FAS*, vol. 402, no. 4.

25. Bruno A. D. 2005, “Generalized continued fraction algorithm“, *Proceedings FAS*, vol. 402, no. 6.

26. Bruno A. D. 2015, “Universal generalization of the continued fraction algorithm“ *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, pp. 35–65.

27. Bruno A. D. 2019, “Calculation of the basic units of number rings using a generalized continued fraction“, textitProgramming, No 2, pp. 17–31.

28. Venkov B. A. 1945, “On the Markov extremal problem for indefinite trigeminal quadratic forms“, *Izv. USSR Academy of Sciences*, Ser. math., vol. 9, issue 6, pp. 429–494.

29. Voronoj G. F. 1952, “On a generalization of the algorithm for continued fractions“, *Collected Works*, vol. 1, Kiev, Publishing house of the Academy of Sciences of Ukraine SSR. pp. 200–394.

30. Voronoj G. F. 1952, “On some properties of positive perfect quadratic forms“, *Collected Works*, vol. 2, Kiev, Publishing house of the Academy of Sciences of Ukraine SSR. pp. 174–241.

31. German O. N. 2013, “Poorly approximate matrices and Diophantine exponents“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 14, issue 4, pp. 38–79.

32. German O. N. 2016, “Diophantine exponents of lattices“ *Modern problem of math.*, issue 23, pp. 35–42.

33. Glazunov N. M, Golovanov A. S., Malyshev A. V. 1986, “Proof of the Minkowski conjecture on the critical determinant of a domain $|x|^p + |y|^p < 1$“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, issue 151, pp. 40–53.

34. Grishmanovskaya K. I., Malyshev A. V., Pachev U. M., Fidarova A. M. 1977, “Proof of the Minkowski conjecture on the critical determinant of the domain $|x|^p + |y|^p < 1$ in the case $5 < p < 6$“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, issue 67. pp. 95–107.

35. Delone B. N. 1948, “On the work of A. A. Markov “On binary quadratic forms of positive determinants““, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 3, issue 5, pp. 3–5.

36. Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skii N. N. 2015, “On minimal polynomials of residual fractions for algebraic irrationalities“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 16, issue 3, pp. 147–182.

37. Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skii N. N., Sobolev D. K., Soboleva V. N. 2017, “Classification of purely real algebraic irrationalities“, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 18, issue 2, pp. 98–128.

38. Malyshev A. V. 1962, “On the representation of integers by positive quadratic forms“, *Transactions of Steklov Mathematical Institute of the USSR*, vol. 65, pp. 3–212.

39. Malyshev A. V. 1973, “Mordell method of reciprocal lattices in the geometry of numbers“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, issue 33. pp. 97–115.

40. Markov A. A. 1880, “On binary quadratic forms positive determinant“, *Selected Works*, Publishing USSR Academy of Sciences, pp. 9–85.

41. Markov A. A. 1901, “On indefinite trigeminal quadratic forms“, *Proceedings of the Imperial Academy of Sciences*, vol. 14, issue 5, pp. 509–523.

42. Markov A. A. 1902, “On indefinite quadratic forms with four variables“ *Proceedings of the Imperial Academy of Sciences*, vol. 16, issue 3, pp. 97–108.

43. Moshchevitin N. G. 1992, “On joint approximations of algebraic numbers“, *Mat. notes*, vol. 51, pp. 72–80.

44. Moshchevitin N. G. 1997, “On joint diophantine approximations. Vectors of a given Diophantine type“, *Mat. notes*, vol. 61. pp. 706–716.

45. Moshchevitin N. G. 2002, “To the Blichfeldt-Mullender-Spohn theorem on simultaneous approximations“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*, vol. 239, pp. 268–274.

46. Moshchevitin N. G. 2005, “On the best two-dimensional joint Diophantine approximations in the sup-norm“, *Bulletin of the Moscow University*, Ser. 1. Vol. 6, pp. 50–53.

47. Podsypanin E. V. 1977, “On a generalization of the continued fraction algorithm associated with the Wiggo Brun algorithm“ *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, Volume 67, pp. 184–194.

48. Podsypanin E. V. 1979, “On the length of the period of quadratic irrationality“ *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, 1Vol. 82, pp. 95–99.

49. Podsypanin E. V. 1979, “The number of integer points in an elliptic region (remark on a theorem of A. V. Malyshev)“ *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, vol. 82, pp. 100–102.

50. Skubenko B. F. 1972, “To the Minkowski conjecture for $n = 5$“, *Dokl. USSR Academy of Sciences*, vol. 205, pp. 1304–1305.

51. Skubenko B. F. 1973, “Proof of the Minkowski hypothesis on the product of n linear inhomogeneous forms of n variables for $n \leq 5$“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, vol. 33. pp. 6–36.

52. Skubenko B. F. 1976, “A new version of the proof of the heterogeneous Minkowski hypothesis for $n = 5$“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, vol. 142, pp. 240–253.

53. Skubenko B. F. 1978, “To the Minkowski conjecture for large n“, *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR*, vol. 148. pp. 218–224.

54. Skubenko B. F. 1982, “To joint approximations of algebraic irrationalities“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, vol. 116. pp. 142–154.

55. Skubenko B. F. 1984, “To the generalized Roth-Schmidt theorem“, *Notes of the LOMI Scientific Seminar*, vol. 134. pp. 226–231.

56. Sprindzhuk V. G. 1965, “Proof of Mahler’s conjecture on the measure of the set of S-numbers“, *Izv. USSR Academy of Sciences*, Ser. math., vol. 29, issue 2, pp. 379–436.

57. Sprindzhuk V. G. 1967, “Finiteness of the number of rational and algebraic points on some transcendental curves“, *Dokl. USSR Academy of Sciences*, vol. 177, no. 3, pp. 524-527.

58. Sprindzhuk V. G. 1968, “Irrationality of values some transcendental functions“, *Izv. USSR Academy of Sciences*, Ser. math., vol. 32, issue 1, pp. 93–107.

59. Sprindzhuk V. G. 1980, “Achievements and problems of theory Diophantine approximations“, *Advances in Mathematical Sciences*, vol. 35, issue 4, pp. 3–68.

60. Hinchin A. I. 1936, “Metric problems of the theory of irrational numbers“, *Advances in Mathematical Sciences*, issue 1, pp. 7–32.

61. Hinchin A. I. 1948, “Dirichlet principle in the theory of diophantine approximations“, *Advances in Mathematical Sciences*, vol. 3. Issue 3, pp. 3–28.

62. Hinchin A. I. 1961, *Continued fractions*, Mir.

63. Chebyshev P. L. 1866, “On an arithmetic question“, *Selected Works*, Publishing USSR Academy of Sciences, pp. 55–105.

64. Chebotarev N. G. 1934, “Notes on algebra and number theory“, *Collected Works*, vol. 1, Publishing USSR Academy of Sciences, pp. 208–221.

Получено 28.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.