ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 512.772.1 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-381-387

Минимальные морсификации функций двух вещественных переменных[1]

И. А. Проскурнин

Проскурнин Иван Андреевич — аспирант кафедры высшей геометрии и топологии, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: dazai131@yahoo.com

Аннотация

В статье даётся явный метод построения морсификаций с минимально топологически возможным числом вещественных критических точек для функций двух переменных с гладкими ветвями множества уровня, а также для полуквазиоднородных функций двух переменных.

Ключевые слова: особенности кривых, деформации особенностей, вещественные кривые, полуквазиоднородные функции.

Библиография: 7 названий.

Для цитирования:
И. А. Проскурнин. Минимальные морсификации функций двух вещественных переменных // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 381–387.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 512.772.1 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-381-387

Minimal morsifications for functions of two real variables

I. A. Proskurnin

Proskurnin Ivan Andreevich — Ph.D. student of the department of Higher Geometry and Topology, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: dazai131@yahoo.com

Abstract

In this paper we give an explicit construction of morsifications with the smallest topologically possible number of real critical points for functions of two variables with smooth level-set branches, as well as for semiquasihomogenous functions of two real variables.

Keywords: curve singularities, deformations of singularities, real curves, semiquasihomogenous functions.

Bibliography: 7 titles.

For citation:
I. A.Proskurnin, 2020, "Minimal morsifications for functions of two real variables", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 381–387.

[1]Работа выполнена за счет гранта РФФИ-20-01-00579 и гранта Международного Центра фундаментальной и прикладной математики.

1. Введение

Известно (см., например, работу В. И. Арнольда [1]), что если $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток аналитической функции с изолированной критической точкой в начале координат, то индекс критической точки равен $1-r$, где r — число неприводимых компонент ростка вещественного аналитического множества $\{f = 0\}$. В частности, это означает, что если росток $\tilde{f}$ — морсификация f, т. е. деформация, имеющая только невырожденные критические точки, то $\tilde{f}$ имеет не менее $|r-1|$ вещественных критических точек в окрестности нуля.

Определение 1. *Морсификация называется минимальной, если у неё ровно $|r-1|$ вещественных критических точек.*

В работах [2], [3] С. М. Гусейн–Заде было доказано существование минимальных морсификаций в случае $r = 1$. В работе [4] был дан явный метод построения минимальных морсификаций в частном случае $r = 1$ для некоторых конкретных характеристических экспонент. Мы построим явные минимальные морсификации для функций f таких, что все неприводимые компоненты кривой $\{f = 0\}$ — гладкие, а также для полуквазиоднородных f.

2. Предварительные замечания

Неприводимые компоненты ростка аналитической кривой называются ветвями. Известно (см. [5], [6]), что множество уровня ростка аналитической функции состоит из не более чем конечного числа ветвей, любая ветвь может быть параметризована аналитическими функциями, и любая ветвь может быть задана как множество нулей некоторого ростка аналитической функции, определенного однозначно с точностью до умножения на обратимые ростки. Ветвь кривой $\{f = 0\}$ называется кратной, если она совпадает с множеством нулей ростка h, который входит в разложение f на множители с кратностью более 1.

Деформация функции может рассматриваться как деформация ее градиентного отображения, при которой отображение остается градиентным. Докажем вспомогательную лемму о деформациях ростков отображений плоскости в себя.

Лемма 1. *Пусть $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ — росток отображения плоскости с изолированным нулём в начале координат, (f, g) — его компоненты. Рассмотрим деформацию $F_\lambda = (f + \lambda, g)$. Ее нули лежат на кривой $\{g = 0\}$. Тогда при достаточно малых λ те из нулей, которые лежат на некратных ветвях этой кривой — невырожденные.*

Доказательство. Пусть $\varphi : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ — параметризация какой-нибудь некратной ветви множества $\{g = 0\}$. Функция одной переменной $f(\varphi(t))$ не может иметь критических точек в достаточно малой проколотой окрестности нуля, т.к. иначе f было бы постоянно (и равно нулю) на некоторой ветви $\{g = 0\}$, а тогда отображение F имело бы неизолированный нуль. Пусть (v_1, v_2) — касательный вектор к $\{g = 0\}$. Условие отсутствия у $f(\varphi(t))$ критических точек означает, что в некоторой проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^2$ на множестве $\{g = 0\}$ величина $\frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$ не равна нулю. Вектор (v_1, v_2) удовлетворяет равенству $\frac{\partial g}{\partial x} v_1 + \frac{\partial g}{\partial y} v_2 = 0$, причем вектор $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$ (в силу некратности выбранной нами ветви) не зануляется в некоторой проколотой окрестности нуля. Значит, векторы $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ и $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$ в некоторой проколотой окрестности нуля на выбранной ветви линейно независимы. Матрица, составленная из компонент этих векторов — якобиан отображения F (равный якобиану F_λ), поэтому все нули F_λ на некратной кривой невырожденные. □

В частности, если $\{g = 0\}$ — приведенная кривая (или, что то же самое, функция g имеет в нуле конечное число Милнора), то деформация F_λ будет иметь только невырожденные нули.

Если F — градиентное отображение какой-нибудь функции h, то рассмотренной выше деформации F_λ соответствует, конечно, деформация $h - \lambda x$. Практически всегда мы будем пользоваться деформациями именно такого вида.

3. Функции с гладкими ветвями множества уровня.

Пусть $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — аналитическая функция, имеющая в нуле изолированную критическую точку, и $\{f = 0\}$ состоит из объединения r гладких кривых. Без ограничения общности неприводимые компоненты $\{f = 0\}$ можно считать графиками возрастающих аналитических функций: i-тая кривая есть $\{y - g_i(x) = 0\}$, $\frac{dg_i}{dx}(0) > 0$, $g_i(0) = 0$. Тогда f разлагается в произведение $f = u(\prod_{i=1}^r (y - g_i(x)))$, где u — функция, не принимающая в $\mathbb{R}^2$ нулевого значения нигде, кроме, возможно, начала координат (в некоторой окрестности нуля). Также можно считать, что $u(0) \neq 0$ — иначе можно рассмотреть деформацию $f_\lambda = (u + \lambda)(\prod_{i=1}^r (y - g_i(x)))$. Как показано в [2], при таком шевелении не рождается новых вещественных критических точек (при правильном выборе знака λ). Мы будем рассматривать только случай $r > 2$. Если множество уровня функции состоит из двух гладких кривых, то квадратичная часть ряда Тейлора этой функции ненулевая. К такой функции можно применить лемму Морса с параметрами и привести её к виду $\pm x^2 \pm y^k$. В этом случае минимальная морсификация строится очевидным образом. В случае одной гладкой ветви критическая точка просто отсутствует.

Выясним, как устроены множества $\{f_x = 0\}$ и $\{f_y = 0\}$.

Лемма 2. *$\{f_x = 0\}$ — приведенная кривая, являющаяся объединением $r-1$ вещественных гладких ветвей.*

Доказательство. Члены наименьшей степени в разложении f в ряд Тейлора образуют однородный полином f^{hom} степени r. f^{hom} содержит все мономы от двух переменных степени r с ненулевыми коэффициентами: мы условились, что $\{f = 0\}$ состоит из графиков $g_i(x)$, $\frac{dg_i}{dx}(0) > 0$, а коэффициенты мономов f^{hom} суть (с точностью до знака) симметрические функции от $\frac{dg_i}{dx}(0)$. Поэтому члены наименьшей степени у f_x образуют однородный полином степени $r - 1$, что означает, в частности, что у множества $\{f_x = 0\}$ не может быть более $r-1$ ветвей. Однако, ветвей также не может быть менее $r-1$, поскольку вещественный индекс векторного поля (f_x, f_y) в нуле равен $1 - r$. Значит, их ровно $r - 1$. Эти ветви должны быть гладкими, поскольку их $r - 1$, что совпадает со степенью начальных членов ряда Тейлора функции f_x, т.е. уравнение каждой из ветвей обязано иметь ненулевую линейную часть. □

Очевидно, $\{f_y = 0\}$ устроено аналогичным образом. Теперь выясним взаимное расположение множеств $\{f_x = 0\}$ и $\{f_y = 0\}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}^2$ — какая-нибудь ветвь ростка аналитической кривой в окрестности начала координат. Начало координат делит γ на две компоненты связности, называемые полуветвями.

Определение 2. *Будем говорить, что у двух ростков кривых g_1 и g_2 правильное чередование, если множества $\{g_1 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ и $\{g_2 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ имеют одинаковое число неприводимых компонент, и каждая компонента связности дополнения к $\{g_2 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ содержит ровно одну полуветвь множества $\{g_1 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$.*

Например, $y^3 - 5x^4 y$ и $3xy^2 - x^5$ имеют правильное чередование.

Лемма 3. *Если $\{f = 0\}$ состоит из гладких вещественных ветвей, то в подходящей системе координат f_x и f_y имеют правильное чередование.*

Доказательство. Зафиксируем окружность малого радиуса с центром в начале координат. При прохождении по этой окружности вектор (f_x, f_y) обязан повернуться $r - 1$ раз. Рассмотрим дугу этой окружности, начинающуюся на одной из компонент можества $\{f_x = 0\}$, проходящую через соседнюю компоненту того же множества и кончающуюся на следующей. При проходе по такой дуге вектор (f_x, f_y) не может сделать более одного оборота, т.к. на этой дуге знак f_x ровно один раз меняется и возвращается к изначальному. Но вся окружность состоит из $r-1$ таких дуг. Значит, при прохождении каждой такой дуги вектор (f_x, f_y) должен сделать ровно один оборот. Из этого следует, что каждая дуга пересекает ровно две ветви множества $\{f_y = 0\}$. Это означает, что либо между каждыми двумя соседними ветвями $\{f_x = 0\}$ лежит ровно одна кривая $\{f_y = 0\}$ (как нам и надо), либо одно из множеств $\{f_x > 0\} \cap \{f_y = 0\}$, $\{f_x < 0\} \cap \{f_y = 0\}$ пусто. Если выполняется вторая возможность, то (считая без ограничения общности, что пусто $\{f_x > 0\} \cap \{f_y = 0\}$) деформация $f_\lambda = f - \lambda x, \lambda > 0$ не будет иметь вещественных критических точек, чего не может быть. □

В частности, рассмотренные выше ростки $y^3 - 5x^4 y$ и $3xy^2 - x^5$ являются частными производными ростка $xy^3 - yx^5$.

Воспользовавшись этими двумя леммами, можно следующее утверждение.

Теорема 1. *Деформация $f_\lambda = f + \lambda x, \lambda > 0$ будет иметь $r - 1$ невырожденных критических точек в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Невырожденность критических точек следует из леммы 1, поэтому достаточно посчитать их количество. Кривая $\{f_x = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ делит малую окружность с центром в нуле на $2r-2$ сектора. Критические точки рассматриваемой деформации f_λ могут лежать только в половине этих секторов, где $f_x < 0$. Тогда критические точки могут лежать только на $r-1$ (из всего $2r-2$) полуветвей множества $\{f_y = 0\}$. У множества $\{f_x = -\lambda\}$ $r-1$ компонента связности, причем в силу леммы 3, каждая полуветвь множества $\{f_y = 0\}$ может пересекаться только с одной из компонент $\{f_x = -\lambda\}$. Осталось доказать, что пересечение данной полуветви с данной компонентой единственно. Как показано в лемме 1, гессиан функции f не зануляется на множестве $\{f_y = 0\}$ (в заранее выбранной достаточно малой окрестности нуля). Пересечения $\{f_y = 0\}$ и $\{f_x = -\lambda\}$ — трансверсальные пересечения гладких кривых. Это означает, что если пересечений несколько, то при движении по $\{f_y = 0\}$ от одной точки пересечения до другой гессиан обязан менять знак, поскольку соседние точки пересечения обязаны иметь разную ориентацию, что приводит нас к противоречию.

□

4. Квазиоднородные функции.

Определение 3. *Функция f называется квазиоднородной с весами $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ и квазистепенью $d \in \mathbb{N}$, если для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ $f(\lambda^\alpha x, \lambda^\beta y) = \lambda^d f(x, y)$.*

Определение 4. *Квазиоднородная функция невырождена, если её число Милнора в начале координат конечно (или, что то же самое, росток её множества нулей в начале координат не имеет кратных ветвей).*

Мы будем рассматривать только квазиоднородные полиномы с вещественными коэффициентами. Заметим, что, на самом деле, функция не должна быть квазиоднородной, а достаточно только, чтобы вещественные ветви её множества уровня задавались некоторой квазиоднородной функцией: пусть вещественные нули задаются некоторой квазиоднородной функцией, а комплексные произвольны. Тогда функция имеет с точностью до знака вид gu, где g — квазиоднородная функция, а u строго положительно вне начала координат. Как известно, при деформации $f_\lambda = g(u+\lambda), \lambda > 0$ не появляется новых особых точек, а комплексные ветви ростка кривой исчезают. При этом в локальных координатах $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x(u+\lambda)^{\frac{\alpha}{d}}, y(u+\lambda)^{\frac{\beta}{d}})$ имеем

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = g(x(u+\lambda)^{\frac{\alpha}{d}}, y(u+\lambda)^{\frac{\beta}{d}}) = (u+\lambda)g(x, y) = f_\lambda.$$

Поэтому любой росток, вещественные нули которого могут быть заданы квазиоднородным уравнением, с точки зрения нашей задачи считается просто квазиоднородным.

Лемма 4. *Пусть число ветвей множества $\{f = 0\}$ равно $r > 1$. Тогда росток алгебраического многообразия $\{f_x = 0\}$(множества нулей частной производной) имеет самое большее r ветвей.*

Доказательство. Известно, что число неприводимых компонент одинаково у всех невырожденных квазиоднородных функций данной квазистепени (см., например, [1], [7]), а у вырожденных оно может быть только меньше. Но xf_x — функция той же квазистепени, что и f, имеющая не меньше ветвей, чем $\{f_x = 0\}$. □

Аналогично, множество $\{f_y = 0\}$ имеет не более r ветвей.

Лемма 5. *Пусть хотя бы одна из частных производных f_x, f_y является невырожденной функцией. Тогда существует минимальная деформация f.*

Доказательство. Предположим, что частная производная f_y невырожденная. Хотя бы в одном из множеств $\{f_x > 0\}$ и $\{f_x < 0\}$ лежит не более чем r полуветвей множества $\{f_y = 0\}$. Пусть это будет $\{f_x > 0\}$. Рассмотрим деформацию $f_\lambda = f - \lambda x, \lambda > 0$. По первой лемме, эта деформация является морсификацией. Ее критические точки лежат на полуветвях $\{f_y = 0\}$, находящихся в множестве $\{f_x > 0\}$, которых у нас не более r штук. Заметим, что на каждой полуветви не более одной критической точки: поскольку функция f_y квазиоднородна, полуветви $\{f_y = 0\}$ являются орбитами группы гиперболических поворотов $\sigma(x, y) = (e^{\alpha\sigma}x, e^{\beta\sigma}y)$. Поэтому если бы на какой-нибудь полуветви было бы две критические точки, то их можно было бы перевести друг в друга гиперболическим поворотом. Но этот поворот изменил бы значение функции f_x, которая квазиоднородна с теми же весами. Таким образом, все критические точки невырожденные и их не более r и не менее $r-1$. Их суммарный индекс равен $r-1$. Для невырожденных критических точек суммарный индекс по четности обязан совпадать с количеством критических точек (поскольку индекс есть разность числа минимумов и максимумов и числа седел, а количество — сумма), т.е. их $r-1$. $\square$

5. Плохие квазистепени.

Осталось рассмотреть многочлены, у которых обе частные производные вырождены. Заметим, что множество квазиоднородных полиномов, имеющих хоть одну невырожденную частную производную, всегда открыто по Зарисскому в пространстве функций данной квазистепени. Поэтому если есть хотя бы один полином данной квазистепени, у которого хоть одна производная невырождена, то всегда можно перейти к невырожденной производной малым шевелением. Это шевеление не будет менять ни числа Милнора, ни числа ветвей, поскольку, как известно, у квазиоднородных полиномов при малом шевелении эти инварианты не меняются. Таким образом, нужно рассмотреть только случай "плохих квазистепеней", при которых ни одного полинома с невырожденными производными не бывает. Примером может служить семейство многочленов $ax^8+bx^4y^3+cy^6$ — все они имеют вырожденные производные.

Лемма 6. *Невырожденный квазиоднородный многочлен плохой квазистепени всегда имеет вид* $ax^k+x^3y^3g(x,y)+by^l, ab\neq 0, k,l\geq 3$.

Доказательство. Вырожденность производных у всех квазиоднородных многочленов данной квазистепени d равносильна тому, что пространства квазиоднородных многочленов степеней $d-\alpha$ и $d-\beta$ (с теми же весами α,β) состоят исключительно из вырожденных многочленов. Пространство многочленов данной квазистепени от двух переменных содержит только вырожденные полиномы в том и только в том случае, когда все мономы данной квазистепени делятся на x^2, либо на y^2 — иначе в пространстве есть либо мономы x^a, y^b, либо мономы $x^a y, y^b$, либо мономы $x^a y, xy^b$, из которых всегда можно составить невырожденную квазиоднородную функцию. Если все мономы квазистепени $d-\alpha$ делятся на y^2, то тогда и все мономы квазистепени d делятся на y^2, и все полиномы квазистепени d вырождены. Вырожденные полиномы мы не рассматриваем, поэтому можно считать, что все мономы квазистепени $d-\alpha$ делятся на x^2. Аналогично, все полиномы квазистепени $d-\beta$ делятся на y^2.

Если все мономы квазистепени $d-\alpha$ делятся на x^2, то мономы квазистепени d либо не делятся на x совсем, либо делятся на x^3. Точно таким же образом, мономы квазистепени d либо совем не делятся на y, либо делятся на y^3. Это означает, что любой невырожденный квазиоднородный многочлен плохой квазистепени имеет вид $ax^k+x^3y^3g(x,y)+by^l$, где $g(x,y)$ — квазиоднородная функция квазистепени $d-3\alpha-3\beta, ab\neq 0, k=\frac{d}{\alpha}, l=\frac{d}{\beta}$. $\square$

Итак, у множества $\{f_y=0\}$ есть кратная ветвь $\{y=0\}$. Заметим, что всегда можно добиться того, чтобы $\{y=0\}$ было единственной кратной ветвью кривой $\{f_y=0\}$, немного пошевелив f в пространстве квазиоднородных полиномов степени d. Будем считать, что это так и есть, т. е., что на других ветвях множества $\{f_y=0\}$ градиент функции f_y ненулевой в некоторой проколотой окрестности начала координат.

Теорема 2. *У невырожденных квазиоднородных полиномов плохой квазистепени есть минимальные морсификации.*

Доказательство. Построение минимальной морсификации полинома плохой квазистепени совершается в два этапа. На первом этапе мы действуем в точности так же, как в простом случае. Повторю приведенную ранее конструкцию.

Хотя бы в одном из множеств $\{f_x>0\}$ и $\{f_x<0\}$ лежит не более чем r полуветвей множества $\{f_y=0\}$. Пусть это будет $\{f_x>0\}$. Рассмотрим деформацию $f_\lambda=f-\lambda x, \lambda>0$. Ее критические точки лежат на полуветвях $\{f_y=0\}$, находящихся в множестве $\{f_x>0\}$, которых у нас не более r штук. Заметим, что на каждой полуветви не более одной критической точки: поскольку функция f_y квазиоднородна, полуветви $\{f_y=0\}$ являются орбитами группы гиперболических поворотов $\sigma(x,y)=(e^{\alpha\sigma}x, e^{\beta\sigma}y)$. Поэтому если бы на какой-нибудь полуветви было бы две критические точки, то их можно было бы перевести друг в друга гиперболическим поворотом. Но этот поворот изменил бы значение функции f_x, которая также квазиоднородна с теми же весами. Таким образом, у этой деформации не более r критических точек.

В отличие от простого случая мы не можем утверждать, что все эти критические точки невырожденные. Однако, по лемме 1 невырождены все критические точки, лежащие на некратных ветвях $\{f_y = 0\}$. Но мы условились, что у $\{f_y = 0\}$ только одна кратная ветвь, а именно $\{y = 0\}$. По сказанному выше, на этой ветви лежит не более двух критических точек(по одной на каждой полуветви), и они являются единственными вырожденными критическими точками нашей деформации f_λ.

Второй этап построения морсификации заключается в том, чтобы морсифицировать эти критические точки, лежащие на прямой $\{y = 0\}$. Зафиксируем малое $\lambda = \lambda_0$, и пусть

$$\tilde{f} = f_{\lambda_0} = ax^k + x^3y^3g(x, y) + by^l - \lambda_0 x.$$

Вырожденные критические точки имеют координаты $(\pm(\frac{\lambda_0}{ka})^{\frac{1}{k-1}}, 0)$. Вторая производная $\tilde{f}_{xx}$ в этой точке ненулевая, т.е. гессиан $\tilde{f}$ имеет ранг как минимум один. Воспользовавшись леммой Морса с параметрами, можно представить $\tilde{f}$ в окрестности этой точки в виде $\bar{x}^2 \pm \bar{y}^m$, причём координаты $\bar{x}, \bar{y}$ можно выбрать так, чтобы $\bar{y}$ отличалась от y только умножением на константу. Но такая особенность всегда имеет морсификацию с максимум одной критической точкой, а именно $\bar{x}^2 \pm \bar{y}^m + \varepsilon\bar{y}$. Более того, такая деформация морсифицирует сразу обе вырожденные критические точки $\tilde{f}$(если их две), поскольку, как говорилось, $\bar{y}$ отличается от y разве что умножением на константу, т.е. в окрестностях обоих критических точек $\bar{y}$ те же самые. Поскольку все остальные критические точки $\tilde{f}$ были невырожденными, малое шевеление рассматриваемой критической точки не изменит их числа и вида. Таким образом, полученная деформация $\tilde{f}$ имеет не более, чем r вещественных критических точек, причем все они невырожденные. Теперь можно повторить использованный ранее аргумент: критических точек не более r, не менее $r - 1$, они невырождены, их суммарный индекс равен $1 - r$. Следовательно, этих точек $r - 1$. □

6. Полуквазиоднородные функции.

Определение 5. *Функция f полуквазиоднородна, если она представляется в виде суммы $f_0 + f_1$, где f_0 — невырожденная квазиоднородная, а в f_1 все мономы имеют квазистепень строго выше, чем у f_0 (с теми же, что и у f_0 весами). Полином f_0 при этом называется главной частью функции f.*

Теорема 3. *У любой полуквазиоднородной вещественной функции есть минимальная морсификация.*

Доказательство. По доказанному выше, минимальная морсификация может быть построена для любой квазиоднородной функции. Пусть f — полуквазиоднородная функция с главной частью f_0. Построенная ранее морсификация f_0 имеет вид $f_0^\lambda = f_0 + a(\lambda)x + b(\lambda)y$ (для большинства рассматриваемых случаев, как показано выше, минимальной морсификацией будет $f_0^\lambda = f_0 + \lambda x$. В случаях "плохой квазистепени" необходимо также прибавить моном, линейный по y.). Поскольку деформация заключается в прибавлении линейных по x, y членов, гессиан f_0^λ не отличается от гессиана f_0. Заметим, что условие минимальности морсификации равносильно тому, что во всех критических точках этой морсификации гессиан морсификации принимает отрицательные значения. Координаты критических точек f_0^λ могут быть разложены в ряд Пюизо по степеням λ. При подставлении этих рядов в гессиан f_0 получается степенной ряд (вообще говоря, дробно-степенной), принимающий при малых λ строго отрицательные значения, а, значит, имеющий строго отрицательный член наименьшей степени. Теперь рассмотрим деформацию $f_\lambda = f_0^\lambda + f_1$. f отличается от f_0 только членами строго большего порядка, чем f_0, а поэтому гессиан f_λ не зависит от λ и имеет те же члены наименьшей квазистепени, что и гессиан f_0. Аналогично, ряд Пюизо для критических точек f_λ обязан в членах наименьшей степени совпадать с рядом Пюизо для критических точек f_0^λ. Но это означает, что если гессиан f_0 принимает при малых λ строго отрицательные значения в критических точках f_0^λ, то и гессиан f_λ будет при малых λ принимать в критических точках f_λ строго отрицательные значения, т.е. f_λ — минимальная морсификация. □

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского–Олейник и смешанные структуры Ходжа // Функц. анализ и его приложения. 1978. Том 12, № 1. стр.1-14.

2. Гусейн-Заде С. М. On a problem of B.Teissier // Topics in Singularity Theory: V. I. Arnold's 60th Anniversary Collection. Am. Math. Soc. Providence, Rhode Island. 1997. P. 117-141.

3. Гусейн-Заде С. М. О существовании деформаций без критических точек (задача Тесье для функций двух переменных) // Функц. анализ и его приложения. 1997. Том 31, № 1. стр. 74-77.

4. Gonzalez-Ramirez J. A., Luengo I. Deformations of functions without real critical points // Communications in Algebra. 2003. Vol. 31, № 9, P.42-55.

5. Casas-Alvero E. Singularities of plane curves. 2000. Cambridge university press.

6. Milnor J. Singular Points of Complex Hypersurfaces. 1968. Princeton university press.

7. Damon J. On the number of branches for real and complex weighted homogeneous curve singularities // Topology. 1991. Vol.30, № 2. P.223-229.

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, V. I. 1978, "Index of a singular point of a vector field, the Petrovskii–Oleinik inequality, and mixed Hodge structures", *Funct. Anal. Appl.*, vol.12, no.1, pp. 1–12.

2. Gusein-Zade, S. M. 1997, "On a problem of B.Teissier", in A. Khovanskiĭ(ed.), A. Varchenko(ed.),V. Vassiliev(ed.),*Topics in Singularity Theory: V. I. Arnold's 60th Anniversary Collection*, Providence, Rhode Island, Am. Math. Soc., 1997, pp. 117-141.

3. Gusein-Zade, S. M. 1997, "On the Existence of Deformations without Critical Points (the Teissier problem for functions of two variables)", *Funct. Anal. Appl.*, vol. 31, no. 1, pp. 58–60.

4. Gonzalez-Ramirez, J. A., Luengo, I. 2003, "Deformations of functions without real critical points", *Communications in Algebra*, vol. 31, no. 9, pp. 42-55.

5. Casas-Alvero, E. *Singularities of plane curves*, New York, Cambridge university press, 2000.

6. Milnor, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Princeton, New Jersey, Princeton university press, 1968.

7. Damon, J. 1991, "On the number of branches for real and complex weighted homogeneous curve singularities" *Topology*, vol. 30, no. 2, pp. 223-229.

Получено 24.09.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.