ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 517.5+511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-374-380

Обобщение определения среднего

Р. В. Почеревин

Почеревин Роман Владимирович — аспирант кафедры математических и компьютерных методов анализа, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: pocherevin-roman@rambler.ru

Аннотация

В статье приводится решение задачи нахождения общего вида среднего в случае отсутствия симметричности по всем переменным. В 1930 году А. Н. Колмогоров дал общий вид среднего значения. Он сформулировал четыре аксиомы среднего: непрерывность и монотонность по каждой переменной, симметричность по каждой переменной, равенство среднего от одинаковых значений этому значению и возможность замены некоторой группы значений их собственным средним без изменения общего среднего. Все переменные в теореме Колмогорова равноправны, это предполагает, что среднее является сииммет-рической функцией по всем переменным. В. Н. Чубариковым была поставлена задача обобщения результата А. Н. Колмогорова на случай отсутствия симметричности по всем аргументам. Теперь переменные разбиваются на группы, и среднее будет симметрично отдельно по каждой из групп переменных. Если такая группа единственна, то исследуемое среднего удовлетворяет аксиомам А. Н. Колмогорова, поэтому результат статьи является обощением теоремы Колмогорова. В статье найден общий вид функции среднего в этой задаче, отмечена связь с равномерным распределением по модулю единица.

Ключевые слова: Теорема Колмогорова о понятии среднего, равномерное распределение по модулю единица

Библиография: 2 названия.

Для цитирования:
Р. В. Почеревин. Обощение определения среднего // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 374–380.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 517.5+511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-374-380

On generalization of mean value

R. V. Pocherevin

Pocherevin Roman Vladimirovich — Ph.D. student of the department of Mathematical and Computer Methods of Analysis, M. V. Lomonosov Moscow State University (Moscow).
e-mail: pocherevin-roman@rambler.ru

Abstract

In paper we discuss the solution of mean value general form problem in case of all variables symmetry absence. In 1930 A. N. Kolmogorov proved the formula for general form of mean value. He formulated four axioms: continuity and monotony on each variable, symmetry on each variable, mean value of equal variables is equal to these variables, any substitution of any group of variables with their mean value does not change the mean value. In Kolmogorov's theorem all arguments are equitable, this means that the mean value is symmetric on each variable. V. N. Chubarikov set the task of generalization to this result in case of all variables symmetry absence. We divide all the variables on groups and the mean value is a symmetric function for variables in each group separately. For example, if we have only one group the mean value will be Kolmogorov's mean value, so we have a generalization of Kolmogorov's theorem. In paper we show the general form of mean value in our case and we note the connection with uniform distribution modulo 1.

Keywords: Kolmogorov's mean value theorem, uniform distribution modulo 1

Bibliography: 2 titles.

For citation:
R. V. Pocherevin, 2020, "On generalization of mean value" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 374–380.

1. Введение

В 1930 году А. Н. Колмогоров дал общий вид среднего значения n величин [1]. В его работе "Об определении среднего" было доказано, что каждый тип среднего, если он удовлетворяет нескольким естественным условиям, имеет определенный вид. А. Н. Колмогоров представил эти аксиомы в следующем виде:

I. $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывна и монотонна по каждому переменному. Для определенности будет считать, что M возрастает по каждому переменному.

II. $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ — симметрическая функция.

III. Среднее от одинаковых чисел равно их общему значению:

$$\forall x\ M(x, x, ..., x) = x.$$

IV. Можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего:

$$M(x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_n) = M_{n+m}(x, ..., x, y_1, y_2, ..., y_n),$$

где $x = M(x_1, x_2, ..., x_m)$

Из них он вывел общую формулу, которая имеет вид:

$$M(x_1, x_2, ..., x_n) = \psi\left(\frac{\phi(x_1) + \phi(x_2) + ... + \phi(x_n)}{n}\right),$$

где ϕ — непрерывная строго монотонная функция, а ψ - обратная к ней.

Все переменные в теореме Колмогорова равноправны, это предполагает, что среднее является симметрической функцией по всем переменным.

Применением теоремы А. Н. Колмогорова является критерий равномерного распределения последовательности по модулю единица [2].

В настоящей статье мы решаем более общую задачу, постановка которой принадлежит В. Н. Чубарикову. В общих словах она состоит в том, чтобы дать общий вид среднего значения величин, объединенных в некоторые группы, по которым происходит осреднение. Переменные разбиваются на группы, и среднее будет симметрично отдельно по каждой из групп переменных. В данной работе приводится общий вид среднего в этой задаче.

2. Формулировка теоремы

Переходим к формулировке основного результата работы. Следуя А. Н. Колмогорову приведем аксиомы I'-IV'

I'. $M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m})$ непрерывна и монотонна по каждому переменному. Для определенности будет считать, что M возрастает по каждому переменному.

II'. $M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m})$ — симметрическая функция отдельно по каждой группе переменных $x_1, x_2, ..., x_{n_1}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}$.

III'. Среднее от одинаковых чисел равно их общему значению:

$$\forall x \in [a, b] \;\; M(x, ..., x; x, ..., x; x, ..., x) = x.$$

IV'. Можно заменить некоторую группу значений их собственным средним, не меняя общего среднего:

$$M(x_1, x_2, ..., x_{k_1}, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{k_2}, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{k_m}, ..., z_{n_m}) =$$

$$= M_{n_1,...,n_m}(t, ..., t, x_{k_1+1}, ..., x_{n_1}; t, ..., t, y_{k_2+1}, ..., y_{n_2}; ...; t, ..., t, z_{k_m+1}, ..., z_{n_m})$$

где $t = M(x_1, x_2, ..., x_{k_1}; y_1, y_2, ..., y_{k_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{k_m})$

Теорема 1. *При $x_1, ...x_{n_1}, y_1, ..., z_{n_m} \in [a, b]$ и выполнении условий I' - IV' среднее $M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m})$ имеет вид*

$$M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) =$$

$$= g(f_1(x_1) + ... + f_1(x_{n_1}) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_{n_m})),$$

где g — функция, обратная к функции $n_1 f_1 + n_2 f_2 + ... + n_m f_m$.

3. Вспомогательные утверждения

В основе доказательства лежат следующие леммы:

Лемма 1. *Обозначим через $q \cdot x$ набор из q повторений переменной x: $x, ..., x$. В данных обозначениях имеет место следующее утверждение:*

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) =$$

$$= M(q \cdot x_1, q \cdot x_2, ..., q \cdot x_{n_1}; q \cdot y_1, q \cdot y_2, ..., q \cdot y_{n_2}; ...; q \cdot z_1, q \cdot z_2, ..., q \cdot z_{n_m})$$

Доказательство. Разобьем переменные в правой части равенства леммы на q наборов $x_1, x_2, ..., x_{n_1}$; $y_1, y_2, ..., y_{n_2}$; ...; $z_1, z_2, ..., z_{n_m}$. Тогда, используя свойства I' - IV', приходим к следующей цепочке равенств:

$$M(q \cdot x_1, q \cdot x_2, ..., q \cdot x_{n_1}; q \cdot y_1, q \cdot y_2, ..., q \cdot y_{n_2}; ...; q \cdot z_1, q \cdot z_2, ..., q \cdot z_{n_m}) =$$

$$= M_{qn_1,...,qn_m}(t, t, ..., t; t, t, ..., t; ...; t, t, ..., t) = t,$$

где $t = M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m})$

Лемма 1 доказана. □

Теперь определим для каждого рационального r, $0 \leq r = \frac{p}{q} \leq 1$, функцию $\psi(r)$ следующим образом:

$$\psi(r) = M(p \cdot b, (q - p) \cdot a; p \cdot b, (q - p) \cdot a; ...; p \cdot b, (q - p) \cdot a)$$

Это определение корректно, поскольку для любого представления рационального числа имеем: $r = \frac{p}{q} = \frac{p_0}{q_0}$, где $(p_0, q_0) = 1$. Введем обозначение: $d = (p, q)$, тогда по лемме 1:

$$\psi(\frac{p_0}{q_0}) = M(p_0 \cdot b, (q_0 - p_0) \cdot a; p_0 \cdot b, (q_0 - p_0) \cdot a; ...; p_0 \cdot b, (q_0 - p_0) \cdot a) =$$

$$= M(dp_0 \cdot b, d(q_0 - p_0) \cdot a; dp_0 \cdot b, d(q_0 - p_0) \cdot a; ...; dp_0 \cdot b, d(q_0 - p_0) \cdot a) =$$

$$= M(p \cdot b, (q - p) \cdot a; p \cdot b, (q - p) \cdot a; ...; p \cdot b, (q - p) \cdot a) = \psi(\frac{p}{q})$$

Лемма 2. *Функция $\psi(r)$, как функция рационального числа r, является возрастающей.*

Доказательство. Действительно, пусть $r' > r$. Представим r' и r как дроби с одинаковым знаменателем $r' = \frac{p'}{q}$, $r = \frac{p}{q}$, $p' > p$, и тогда в силу свойства монотонности Г' получим неравенство

$$\psi(r') = M(p' \cdot b, (q - p') \cdot a; p' \cdot b, (q - p') \cdot a; ...; p' \cdot b, (q - p') \cdot a) >$$

$$> M(p \cdot b, (q - p) \cdot a; p \cdot b, (q - p) \cdot a; ...; p \cdot b, (q - p) \cdot a) = \psi(r)$$

.

Лемма 2 доказана. □

Лемма 3. *Функцию $\psi(r)$ можно доопределить до непрерывной возрастающей функции на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим случай $r_* \notin \{0, 1\}$. Для точек $r \in \{0, 1\}$ заключение аналогично.

Пусть $r_* \notin \mathbb{Q}$ и пусть $\forall n \in \mathbb{N}\ r_n, r'_n \in \mathbb{Q},\ r_n \to r_* - 0,\ r'_n \to r_* + 0$, причем $\frac{r_n + r'_n}{2} < r_*$

Допустим противное: $\lim_{r_n \to r_* - 0} \psi(r_n) = A < B = \lim_{r'_n \to r_* + 0} \psi(r'_n)$. Тогда

$$\psi\left(\frac{r_n + r'_n}{2}\right) = \psi\left(\frac{\frac{p_n}{q_n} + \frac{p'_n}{q_n}}{2}\right) = \psi\left(\frac{p_n + p'_n}{2q_n}\right) =$$

$$= M((p_n + p'_n) \cdot b, (2q_n - (p_n + p'_n)) \cdot a; ...; (p_n + p'_n) \cdot b, (2q_n - (p_n + p'_n)) \cdot a) =$$

$$= M(p_n \cdot b, (q_n - p_n) \cdot a, p'_n \cdot b, (q_n - p'_n) \cdot a; ...; p_n \cdot b, (q_n - p_n) \cdot a, p'_n \cdot b, (q_n - p'_n) \cdot a) =$$

$$= M_{2q_n, ..., 2q_n}(t_1, ..., t_1, t_2, ..., t_2; ...; t_1, ..., t_1, t_2, ..., t_2) =$$

$$= M_{2q_n, ..., 2q_n}(t, ..., t; ...; t, ..., t) = t,$$

$$t_1 = M_{q_n, ..., q_n}(p_n \cdot b, (q_n - p_n) \cdot a; ...; p_n \cdot b, (q_n - p_n) \cdot a) = \psi\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \psi(r_n) \to A$$

$$t_2 = M_{q_n, ..., q_n}(p'_n \cdot b, (q_n - p'_n) \cdot a; ...; p'_n \cdot b, (q_n - p'_n) \cdot a) = \psi\left(\frac{p'_n}{q_n}\right) = \psi(r'_n) \to B$$

$$t = M(t_1, t_2; ...; t_1, t_2) \to M(A, B; ...; A, B) > M(A, A; ...; A, A) = A$$

Таким образом, $\lim_{n \to +\infty} \psi\left(\frac{r_n + r'_n}{2}\right) > A$. С другой стороны, $\frac{r_n + r'_n}{2} < r_*$ и поэтому

$$\lim_{n \to +\infty} \psi\left(\frac{r_n + r'_n}{2}\right) = A.$$

Противоречие, следовательно функцию $\psi(r)$ можно доопределить до непрерывной возрастающей функции на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 3 доказана. □

Таким образом, используя результат леммы 3, можно однозначно определить обратную к ψ функцию ϕ, и при этом ϕ будет возрастающей непрерывной функцией.

Лемма 4. *Пусть*

$$t = M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}).$$

Тогда

$$M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}, t; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) =$$

$$= M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}, t; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) = ...$$

$$= M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}, t) = t$$

Доказательство. Действительно, докажем для первой группы (по свойству IV'):

$$M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}, t; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) =$$

$$M_{n_1+1, n_2, ..., n_m}(t, t, ..., t, t; t, t, ..., t; ...; t, t, ..., t) = t$$

Для остальных групп доказательство аналогично. Лемма 4 доказана. □

4. Доказательство теоремы 1 при равном количестве переменных в группах

Пусть $n_1 = n_2 = ... = n_m = n$, в этом случае можно сгруппировать переменные с одинаковыми номерами и, воспользовавшись свойствами II' и IV', получить

$$M(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n; ...; z_1, z_2, ..., z_n) =$$

$$= M(t_1, t_2, ..., t_n; t_1, t_2, ..., t_n; ...; t_1, t_2, ..., t_n),$$

где $t_i = M(x_i; y_i; ...; z_i)$.

Теперь рассмотрим такие $t_i = \psi(r_i)$, где $r_i \in \mathbb{Q}$. Представим r_i как дроби с одинаковым знаменателем: $r_i = \frac{p_i}{q}$, тогда

$$t_i = \psi(r_i) = M(p_i \cdot b, (q - p_i) \cdot a; p_i \cdot b, (q - p_i) \cdot a; ...; p_i \cdot b, (q - p_i) \cdot a)$$

и

$$M(t_1, t_2, ..., t_n; t_1, t_2, ..., t_n; ...; t_1, t_2, ..., t_n) =$$

$$= M(q \cdot \psi(r_1), q \cdot \psi(r_2), ..., q \cdot \psi(r_n); ...; q \cdot \psi(r_1), q \cdot \psi(r_2), ..., q \cdot \psi(r_n)) =$$

$$= M((p_1 + ... + p_n) \cdot b, (nq - (p_1 + ... + p_n)) \cdot a; ...; (p_1 + ... + p_n) \cdot b, (nq - (p_1 + ... + p_n)) \cdot a) =$$

$$= \psi\left(\frac{p_1 + ... + p_n}{nq}\right) = \psi\left(\frac{r_1 + ... + r_n}{n}\right) = \psi\left(\frac{\phi(t_1) + ... + \phi(t_n)}{n}\right) =$$

$$= \psi\left(\frac{\phi(M(x_1; y_1; ...; z_1)) + ... + \phi(M(x_n; y_n; ...; z_n))}{n}\right)$$

Уточним последнюю формулу:

$$M(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n; ...; z_1, z_2, ..., z_n) =$$

$$= M(x_1, x_2, ..., x_n; y_2, y_1, ..., y_n; ...; z_1, z_2, ..., z_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi\left(\frac{\phi(M(x_1; y_1; ...; z_1)) + \phi(M(x_2; y_2; ...; z_2)) + ... + \phi(M(x_n; y_n; ...; z_n))}{n}\right) =$$

$$= \psi\left(\frac{\phi(M(x_1; y_2; ...; z_1)) + \phi(M(x_2; y_1; ...; z_2)) + ... + \phi(M(x_n; y_n; ...; z_n))}{n}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(M(x_1; y_1; ...; z_1)) + \phi(M(x_2; y_2; ...; z_2)) = \phi(M(x_1; y_2; ...; z_1)) + \phi(M(x_2; y_1; ...; z_2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi(M(x_1; y_1; ...; z_1)) - \phi(M(x_2; y_1; ...; z_2)) = \phi(M(x_1; y_2; ...; z_1)) - \phi(M(x_2; y_2; ...; z_2))$$

Таким образом, функция $\phi(M(x_1; y; ...; z)) - \phi(M(x_2; y; ...; z))$ не зависит от y. Аналогично можно показать, что эта функция зависит только от x_1 и x_2. То есть

$$\phi(M(x; y; ...; z)) - \phi(M(a; y; ...; z)) = f_1(x)$$

Точно такими же рассуждениями можно получить

$$\phi(M(a; y; ...; z)) - \phi(M(a; a; ...; z)) = f_2(y)$$

....

$$\phi(M(a; a; ...; z)) - \phi(M(a; a; ...; a)) = f_m(z)$$

Если сложить все полученные равенства, то мы придем к

$$\phi(M(x; y; ...; z)) = f_1(x) + f_2(y) + ... + f_m(z)$$

А значит формула для среднего представляется в виде

$$M(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n; ...; z_1, z_2, ..., z_n) =$$

$$= \psi\left(\frac{f_1(x_1) + ... + f_1(x_n) + f_2(y_1) + ... + f_2(y_n) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_n)}{n}\right),$$

причем $\phi(M(x; x; ...; x)) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x) \Leftrightarrow x = \psi(f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \psi = (f_1 + ... + f_m)^{-1}$
Следовательно

$$M(x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_n; ...; z_1, z_2, ..., z_n) =$$

$$= (f_1 + ... + f_m)^{-1}\left(\frac{f_1(x_1) + ... + f_1(x_n) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_n)}{n}\right) =$$

$$= (nf_1 + ... + nf_m)^{-1}\left(f_1(x_1) + ... + f_1(x_n) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_n)\right)$$

По лемме 3 значения $\psi(r)$ при $r \in \mathbb{Q}$ образуют плотное множество, а значит доказанная формула верна по непрерывности при всех значениях переменных.

5. Доказательство теоремы 1 при произвольном количестве переменных в группах

С помощью леммы 4 мы можем сравнять количества переменных в группах. Допустим, что n_m - наибольшая, тогда:

$$M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) = t =$$

$$M_{n_m, n_m, ..., n_m}(x_1, x_2, ..., x_{n_1}, t, ..., t; y_1, y_2, ..., y_{n_2}, t, ..., t; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) =$$

К последнему выражению мы уже можем применить предыдущий результат:

$$= (n_m(f_1 + ... + f_m))^{-1}(f_1(x_1) + ... + f_1(x_{n_1}) + (n_m - n_1)f_1(t) +$$

$$+ f_2(y_1) + ... + f_2(y_{n_2}) + (n_m - n_2)f_2(t) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_{n_m}))$$

Выразив из последней цепочки равенств t, получим

$$n_m f_1(t) + n_m f_2(t) + ... + n_m f_m(t) = f_1(x_1) + ... + f_1(x_{n_1}) + (n_m - n_1)f_1(t) +$$

$$+ f_2(y_1) + ... + f_2(y_{n_2}) + (n_m - n_2)f_2(t) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_{n_m}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n_1 f_1(t) + n_2 f_2(t) + ... + n_m f_m(t) =$$

$$= f_1(x_1) + ... + f_1(x_{n_1}) + f_2(y_1) + ... + f_2(y_{n_2}) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_{n_m}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M(x_1, x_2, ..., x_{n_1}; y_1, y_2, ..., y_{n_2}; ...; z_1, z_2, ..., z_{n_m}) = t =$$

$$= (n_1 f_1 + n_2 f_2 + ... + n_m f_m)^{-1}(f_1(x_1) + ... + f_1(x_{n_1}) + ... + f_m(z_1) + ... + f_m(z_{n_m}))$$

6. Заключение

Доказанная теорема обобщает результат А. Н. Колмогорова на более широкий класс средних. В дальнейшем предполагается распространить понятие неравноправия переменных с использованием группы подстановок.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров, А. Н. Избранные труды. Математика и механика / А. Н. Колмогоров. - Москва: Наука, 1985. - 470 с.
2. Чубариков, В. Н. Замечание к определению среднего / В. Н. Чубариков // Вестник Московского университета. сер. 1. Математика и механика - 2003 - №1. С. 30-33.

REFERENCES

1. Kolmogorov, A. N., 1985, Izbrannie trudy. Matematika i mehanika [Selected Works. Mathematics and Mechanics], Nauka, Moscow, pp. 136-138.
2. Chubarikov, V. N., 2003, "A remark on definition of mean value Vestnik Moscovskogo Univ. Seriya 1: Matematika. Mehanika, no. 1, pp. 30-33.

Получено 21.09.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.