ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 512 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-368-373

Канонический базис Гензеля — Шафаревича для формальных модулей Хонды[1]

С. В. Востоков, Р. П. Востокова, Е. В. Иконникова

Востоков Сергей Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей алгебры и теории чисел, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
Востокова Регина Петровна — старший преподаватель, кафедра общей математики и информатики, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: rvostokova@yandex.ru
Иконникова Елена Валерьевна — инженер-исследователь, факультет математики и компьютерных наук, Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург).
e-mail: ikonnikovaev@gmail.com

Аннотация

В данной работе мы строим систему образующих Гензеля — Шафаревича для формальных модулей Хонды над многомерным полем. В дальнейшем это даст возможность вычисления символа Гильберта в описанной ситуации.

Ключевые слова: формальные группы, формальные модули

Библиография: 14 названий.

Для цитирования:
С. В. Востоков, Р. П. Востокова, Е. В. Иконникова. Канонический базис Гензеля — Шафаревича для формальных модулей Хонды // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 368–373.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 512 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-368-373

The Hensel–Shafarevich canonical basis in Honda formal modules

S. V. Vostokov, R. P. Vostokova, E. V. Ikonnikova

Vostokov Sergey Vladimirovich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor, Professor of algebra and number theory Department of St. Petersburg University (Saint Petersburg).
e-mail: sergei.vostokov@gmail.com
Vostokova Regina Petrovna — Senior Lecturer, Department of General Mathematics and Computer Science, St. Petersburg State University (Saint Petersburg).
e-mail: rvostokova@yandex.ru
Ikonnikova Elena Valerevna — Research Engineer, Faculty of Mathematics and Computer Science, St. Petersburg State University (Saint Petersburg).
e-mail: ikonnikovaev@gmail.com

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 16-11-10200

Abstract

In this paper, we construct Hensel–Shafarevich generating set in Honda formal modules over a higher dimensional field. Later, that should allow us to compute Hilbert symbol in this case.

Keywords: formal groups, formal modules

Bibliography: 14 titles.

For citation:
S. V. Vostokov, R. P. Vostokova, E. V. Ikonnikova, 2020, "The Hensel–Shafarevich canonical basis in Honda formal modules", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 368–373.

1. Введение

При изучении формальных модулей важную роль играют их системы образующих. В данной работе мы построим систему образующих Шафаревича для формальных модулей Хонды над многомерным полем. В дальнейшем это даст возможность вычисления символа Гильберта в описанной ситуации.

2. Обозначения

Пусть k — локальное поле характеристики 0, с полем вычетов $\bar{k} = \mathbb{F}_q$, $q = p^f$, $p \neq 2$. Пусть k'/k — конечное неразветвленное расширение с униформизующей π. Рассмотрим K — n-мерное локальное поле, т.е., цепочку полей $K = K_n, K_{n-1}, \dots, K_1, K_0$, где каждое следуюшее поле является полем вычетов предыдущего, и предположим, что при этом $K_1 = k'$. Тогда $K = k'((t_2))\dots((t_n))$, $(\pi, t_2, \dots, t_n)$ — система локальных параметров.

Обозначим за L конечное расширение K. Тогда $L = L_1((T_2))\dots((T_n))$, L_1 — конечное расширение K_1. Системой локальных параметров при этом будет $(\Pi, T_2, \dots, T_n)$, где Π — униформизующая в K. Пусть $L_i = L_1((T_2))\dots((T_i)))$ и T_0 — подполе инерции в L_1/k.

Нам понадобится отображение $\sigma : K \to K$, действующее на локальные параметры t_i как $\sigma(t_i) = t_i^p$, а на k' совпадаюшее с автоморфизмом Фробениуса, и оператор $\triangle$ на $K[[X]]$:

$$\triangle(\sum c_i X^i) = \sum \sigma(c_i) X^{pi}$$

Обозначим через $\mathcal{D}$ кольцо степеннных рядов от $\triangle$ с коэффициентами из $\mathcal{O}_K$, на котором введем умножение

$$\triangle \cdot a = \sigma(a) \cdot \triangle$$

3. Предварительные сведения

3.1. Тип формальной группы

Пусть $F(X,Y) \in \mathcal{O}_K[[X,Y]]$ — формальная группа. Тогда F строго изоморфна p-типической формальной группе F_p, т.е., такой формальной группе, логарифм которой имеет вид $\lambda_p(X) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i X^{p^i}$.

Предложение 1. *Пусть F_p — p-типическая формальная группа. Тогда существует единственный $u_p(\triangle) \in \pi + \mathcal{D}\triangle$ (будем называть его типом F_p), такой что*

$$\lambda_p(X) = (\pi u_p^{-1}(\triangle))(X).$$

Обратно, пусть $u \in \pi + \mathcal{D}\Delta$. Тогда ряд $\lambda(X) = \pi u^{-1}(\Delta) \circ X$ будет логарифмом некоторой p-типической формальной группы над $\mathcal{O}_K$.

Доказательство. По теории Хонды существует $u(\Delta) \in \pi + \mathcal{D}\Delta$ со свойством $u(\Delta) \circ \lambda_p(X) \equiv 0 \bmod \pi$. Тогда $u \circ \Lambda = \pi\varepsilon(\Delta)$, и $\varepsilon \in 1 + \mathcal{D}\Delta$. Теперь можно взять $u_p = \varepsilon^{-1} \circ u$.

Обратно, ряд $\lambda(X)$ удовлетворяет сравнению. □

3.1.1. Оператор $\mathcal{A}$

Из теории Хонды выводится следующее утверждение:

Предложение 2. *В классе изоморфных формальных групп высоты h можно выделить канонический представитель – группу Артина-Хассе F_c с логарифмом $\lambda_c(X) = \pi u_c^{-1}(\Delta) \circ X$, где $u_c = \pi - \sum_{i=1}^{h} a_i \Delta^i$.*

Теорема 1. *Пусть F — p-типическая формальная группа над $\mathcal{O}_K$ типа $u = \pi - a_h B \triangle^h$, $B \in 1 + \mathcal{D}\triangle$, и пусть $\lambda_1(X) = (\pi u^{-1}(\triangle))(X)$, где $u_1 = u^{\sigma^h} \circ B^{-1}$. Тогда*

1. *λ_1 является логарифмом некоторой p-типической формальной группы F_1 над $\mathcal{O}_K$;*
2. *существует $[\pi a_h^{-1}]_{F,F_1} \in Hom_{\mathcal{O}_K}(F, F_1)$, такой что*

$$[\pi a_h^{-1}]_{F,F_1}(X) \equiv X^{p^h} \mathrm{mod} \pi$$

3. *если u_c — канонический тип F, то $u_{c,1} = a_h^{-1} u_c a_h$ — канонический тип F_1.*

Доказательство.

1. $u_1 = u^{\sigma^h} \circ B^{-1} \in \pi + \mathcal{D}\Delta$ Следовательно, u_1 — логарифм некоторой формальной группы F_1 над $\mathcal{O}_K$.
2. Рассмотрим группу F_1' с логарифмом $\lambda_1' = \pi {u'}_1^{-1} \circ X$, где $u_1' = B u_1$. Учитывая, что $B \equiv 1 \mathrm{mod} \Delta$, F_1' будет строго изоморфна F_1.

   Легко проверить, что
   $$[\pi a_h^{-1}]_{F,F_1} = [\pi a_h^{-1}]_{F,F_1'} \circ [1]_{F_1',F_1}$$
   – гомоморфизм, удовлетворяющий условию.
3. $$u_{c,1} = (a_h^{-1} \varepsilon a_h)(a_h^{-1} u a_h = (a_h^{-1} \varepsilon a_h) B u_1$$
   Т.е., $u_{c,1} = \eta u_1$, где $\eta \in 1 + \mathcal{D}\triangle$.

□

Таким образом мы получаем последовательность формальных групп и гомоморфизмов f_i

$$F \to F_1 \to \ldots \to F_M$$

$$f^{(m)} = f_{m-1} \circ \ldots \circ f_1 \circ f$$

3.1.2. Отображение Артина-Хассе

Определим отображения

- $E_F : T_0[[X]]_0 \to F(T_0[[X]]_0)$
  $$E_F(\varphi) = \lambda^{-1}(\pi u_0^{-1} \circ \varphi)$$
- $l_F : F(T_0[[X]]_0) \to T_0[[X]]_0$
  $$l_F(\psi) = \frac{u_0}{\pi} \circ \lambda(\psi)$$

("экспоненту и логарифм").

Лемма 1. *E_F и l_F задают обратные друг другу изоморфизмы $\mathcal{O}_K$-модулей $O_{T_0}[[X]]_0$ и $F(O_{T_0}[[X]]_0)$, а также $T_0[[X]]_0$ и $F(T_0[[X]]_0)$.*

Доказательство. Непосредственной проверкой. □

3.1.3. Примарные элементы

Definition 5. *Элемент $\omega \in F_M(\mathfrak{M})$ называется примарным, если $K(\widetilde{\omega})/K$ неразветвлено (где $f^{(M)}(\widetilde{\omega}) = \omega$).*

- $W_F^M = Ker[\pi^M]_F \subset F(\mathfrak{M})$
- $\{z_1, \dots, z_h\}$ — множество образующих W_F^M (как модуля над $\mathcal{O}_K$)
- $s = f^{(M)} \circ \underline{z}$, где $\underline{z}$ — разложение одной из образующих в ряд по локальным параметрам
- $\widehat{b} = b + b^{\triangle} + \ldots + b^{\triangle^{h-1}}$

Предложение 3.

$$\omega(b) = E_M(\widehat{b}\lambda_M(s))|_{X=\Pi}$$

– корректно определенный элемент $F_M(\mathfrak{M})$, и, более того, является примарным.

Доказательство. Аналогично доказательству из [4], свойства ряда $\widehat{b}\lambda_M(s)$ позволяют подставлять в него элемент П. □

3.2. Основные результаты

Определим многочлены Эньяра:

$$g_0 = \pi_{M-1}X + X^{p^h}$$

$$g_{\rho,a} = \pi_{M-1}X + \pi_{M-1}aX^{p^\rho} + X^{p^h}, a \in \mathcal{O}_K, 1 \le \rho < fh$$

Пусть u_{M-1} — канонический тип группы F_{M-1}. Тогда существуют единственные (с точностью до изоморфизма) формальные группы G_0, $G_{\rho,a}$, для которых g_0, $g_{\rho,a}$ являются допустимыми изогениями в группы G_0', $G_{\rho,a}'$ соответственно. Тогда u_M — тип групп G_0', $G_{\rho,a}'$, следовательно, они изоморфны F_N. Обозначим соответствующие изоморфизмы за $\mathcal{E}_M^0$, $\mathcal{E}_M^{\rho,a}$.

Теорема 2. *Элементы*

$$\omega_i(b), b \in \mathcal{O}_K, \quad 1 \le i \le h,$$

$$\mathcal{E}_M^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$$\mathcal{E}_M^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}),$$

$\theta \in \mathcal{R}$, $a \in {\mathcal{O}_K}^*$, $1 \le \rho < fh$, $p \nmid \overrightarrow{i}$, $0 < i_n \le e_* = p^h e_n/(p^h - 1)$ являются множеством образующих для $F_M(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Достаточно проверить это утверждение для одной формальной группы типа u, например, $F = \mathcal{A}^{-M+1}G_0$. Обозначим логарифм G_0 за λ_0 и логарифм $G_{\rho,a}$ за μ. Тогда

$$(B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h}) \circ g_0 = \pi_{n-1}\lambda_0,$$

$$(B_{n-1}\mu^{\Delta^h}) \circ g_{\rho,a} = \pi_{n-1}\mu,$$

то есть

$$(B_{n-1}\lambda_0^{\Delta^h})(\pi_{n-1}x) \equiv \pi_{n-1}\lambda_0(x) \mathrm{mod} \deg p^\rho + 1$$

$$(B_{n-1}\mu^{\Delta^h})(\pi_{n-1}x) \equiv \pi_{n-1}\mu(x) \mathrm{mod} \deg p^\rho + 1$$

Таким образом, если мы определим V как элемент, удовлетворяющий условию

$$V - V^{\Delta^h}\pi_{n-1}^{p^\rho - 1} = a,$$

то $\mu \equiv \lambda_0 + Vx^{p^\rho}$. Рассмотрев логарифмы $\mathcal{A}G_0$ и $\mathcal{A}G_{\rho,a}$, делаем вывод, что

$$E_M^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}) - \theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n} \equiv$$

$$\equiv V^{\Delta^h}\theta^{p^\rho}\Pi^{ip^\rho}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n} \mathrm{mod} \Pi^{ip^{\rho+1}}T_2^{i_2}\ldots T_n^{i_n}$$

Теперь заметим, что достаточно добавить примарные элементы, чтобы получить полную систему образующих. □

Положим

$$\widetilde{\mathcal{E}}^0 = [\pi^M/\pi_1^{(M)}]_{\mathcal{A}G_0,F}$$
$$\widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a} = [\pi^M/\pi_1^{(M)}]_{\mathcal{A}G_{\rho,a},F}$$

Теорема 3. *Элементы*

$$\widetilde{\omega}_i(b), b \in \mathcal{O}_K, \quad 1 \le i \le h,$$
$$\widetilde{\mathcal{E}}^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n}),$$
$$\widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n}),$$

$\theta \in \mathcal{R}$, $a \in \mathcal{O}_K{}^*$, $1 \le \rho < fh$, $p \nmid \overrightarrow{i}$, $0 < i_n \le e_* = p^h e_n/(p^h-1)$ *являются множеством образующих для* $F(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Следует из предыдущей теоремы и того, что

$$[\pi^M/\pi_1^{(M)}]_{F_M,F}\mathcal{E}_M^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n}) = \widetilde{\mathcal{E}}^0(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n})$$
$$[\pi^M/\pi_1^(M)]_{F_N,F}\mathcal{E}_M^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n}) = \widetilde{\mathcal{E}}^{\rho,a}(\theta\Pi^{i_1}T_2^{i_2}\dots T_n^{i_n})$$

□

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ivan B. Fesenko, S. V. Vostokov, "Local fields and their extensions", AMS Bookstore, 2002.
2. M. Hazewinkel, "Formal Groups and Applications", Pure Appl. Math., 78, Academic Press, New York, 1978.
3. J. Lubin, J. Tate, "Formal complex multiplication in local fields", Annals of Mathematics. Second Series 81, 1965 380–387.
4. М. В. Бондарко, С. В. Востоков, Ф. Лоренц, "Спаривание Гильберта для формальных групп над σ-кольцами", Вопросы теории представлений алгебр и групп". 11, Зап. научн. сем. ПОМИ, 319, ПОМИ, СПб., 2004, 5–58.
5. С. В. Востоков, "Норменное спаривание в формальных модулях", Известия АН СССР, Сер.матем., 1979, т. 43, № 4, с. 706-794.
6. С. В. Востоков, "Канонический базис Гензеля–Шафаревича в полных дискретно-нормированных полях", Вопросы теории представлений алгебр и групп, 22, Зап. научн. сем. ПОМИ, 394, ПОМИ, СПб., 2011, 174-193.
7. С. В. Востоков, И. Л. Климовицкий, "Примарные элементы в формальных модулях", Математика и информатика, 2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., 17, МИАН, М., 2013, 153–163.
8. Д.Г. Бенуа, С.В. Востоков, "Норменное спаривание в формальных группах и представления Галуа", Алгебра и Анализ, том 2, вып. 6, 1990, с. 69-97.
9. О.В.Демченко, "Формальные группы Хонды: арифметика группы точек" ,Алгебра и Анализ, том 12, вып.1,2000, с.132–149
10. О. В. Демченко, "Новое в отношениях формальных групп Любина–Тэйта и формальных групп Хонды", Алгебра и анализ, 10:5 (1998), 77–84;
11. С. С. Афанасьева, Р. П. Востокова, "Логарифмы формальных A-модулей в малом ветвлении" Алгебра и анализ, 27:6 (2015), 6–13
12. Ikonnikova, E.V., Shaverdova, E.V. The Shafarevich basis in higher dimensional local fields. (2014) Journal of Mathematical Sciences (United States), 202 (3), pp. 410-421.
13. Ikonnikova, E.V. "The Hensel-Shafarevich canonical basis in Lubin-Tate formal modules", 2016 Journal of Mathematical Sciences (United States), 219 (3), pp. 462-472.
14. Afanaseva, S.S., Ikonnikova, E.V., "Arithmetic of π_0-critical module", 2017, Lobachevskii Journal of Mathematics, 38 (1), pp. 131-136

REFERENCES

1. Ivan B. Fesenko, S. V. Vostokov, "Local fields and their extensions", AMS Bookstore, 2002.
2. M. Hazewinkel, "Formal Groups and Applications", Pure Appl. Math., 78, Academic Press, New York, 1978.
3. J. Lubin, J. Tate, "Formal complex multiplication in local fields", Annals of Mathematics. Second Series 81, 1965 380–387.
4. M.V.Bondarko, S.V.Vostokov, F.Lorenz, "The Hilbert pairing for formal groups over σ-rings", Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 11, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 319, POMI, St. Petersburg, 2004, 5–58; J. Math. Sci. (N. Y.), 134:6 (2006), 2445–2476
5. S. V. Vostokov, "A norm pairing in formal modules", Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 43:4 (1979), 765–794; Math. USSR-Izv., 15:1 (1980), 25–51
6. S. V. Vostokov, "Canonical basis of Hensel–Shafarevich in complete discrete valuation fields", Problems in the theory of representations of algebras and groups. Part 22, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 394, POMI, St. Petersburg, 2011, 174–193; J. Math. Sci. (N. Y.), 188:5 (2013), 570–581
7. S. V. Vostokov, I. L. Klimovitskii, "Primary Elements in Formal Modules", Mathematics and Informatics, 2, Dedicated to 75th Anniversary of Anatolii Alekseevich Karatsuba, Sovrem. Probl. Mat., 17, Steklov Math. Institute of RAS, Moscow, 2013, 153–163; Proc. Steklov Inst. Math., 282, suppl. 1 (2013), S140–S149
8. D. G. Benois, S. V. Vostokov, "Norm pairing in formal groups and Galois representations", Algebra i Analiz, 2:6 (1990), 69–97; Leningrad Math. J., 2:6 (1991), 1221–1249
9. O. V. Demchenko, "Formal Honda groups: the arithmetic of the group of points", Algebra i Analiz, 12:1 (2000), 132–149; St. Petersburg Math. J., 12:1 (2001), 101–115
10. O. V. Demchenko, "New relationships between formal Lubin–Tate groups and formal Honda groups", Algebra i Analiz, 10:5 (1998), 77–84; St. Petersburg Math. J., 10:5 (1999), 785–789
11. S. S. Afanas'eva, R. P. Vostokova, "Logarithms of formal A-modules in the case of small ramification", Algebra i Analiz, 27:6 (2015), 6–13; St. Petersburg Math. J., 27:6 (2016), 863–868
12. Ikonnikova, E.V., Shaverdova, E.V. The Shafarevich basis in higher dimensional local fields. (2014) Journal of Mathematical Sciences (United States), 202 (3), pp. 410-421.
13. Ikonnikova, E.V. "The Hensel-Shafarevich canonical basis in Lubin-Tate formal modules", 2016 Journal of Mathematical Sciences (United States), 219 (3), pp. 462-472.
14. Afanaseva, S.S., Ikonnikova, E.V., "Arithmetic of π_0-critical module", 2017, Lobachevskii Journal of Mathematics, 38 (1), pp. 131-136

Получено 28.11.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.