ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-364-367

О значениях последовательности Битти в арифметической прогрессии¹

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин

Бегунц Александр Владимирович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: ab@rector.msu.ru

Горяшин Дмитрий Викторович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, механико-математический факультет, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).

e-mail: goryashin@mech.math.msu.su

Аннотация

В статье доказана асимптотическая формула для числа значений последовательности Битти в арифметической прогрессии с растущей разностью. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и β — вещественное число из промежутка $[0; \alpha)$, a и d — целые числа, $d \geq 2$, $0 \leq a < d$, x — достаточно большое натуральное число. Обозначим через $N_d(x)$ число значений последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, $1 \leq n \leq x$, принадлежащих арифметической прогрессии $(a + kd)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то при $x \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула $N_d(x) = \frac{x}{d} + O(d \ln^3 x)$, где постоянная в знаке O абсолютная. Разность прогрессии может расти вместе с x , причём результат нетривиален, если $d \ll \sqrt{x} \ln^{-3/2-\varepsilon} x$, $\varepsilon > 0$.

Ключевые слова: последовательность Битти, арифметическая прогрессия, асимптотическая формула.

Библиография: 4 названия.

Для цитирования:

А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин О значениях последовательности Битти в арифметической прогрессии // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 364–367.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.35, 517.15

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-364-367

On the values of Beatty sequence in an arithmetic progression

А. В. Begunts, D. V. Goryashin

Begunts Aleksandr Vladimirovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).

e-mail: ab@rector.msu.ru

Goryashin Dmitry Viktorovich — candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, Lomonosov Moscow State University, Department of mathematics and mechanics (Moscow).

e-mail: goryashin@mech.math.msu.su

¹Работа выполнена при поддержке Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (грант «Современные проблемы фундаментальной математики и механики»).

Abstract

In the paper, we consider $N_d(x) = N(x; \alpha, \beta; d, a)$, $x \in \mathbb{N}$, which is the number of values of Beatty sequence $[\alpha n + \beta]$, $1 \leq n \leq x$, for $\alpha > 1$ irrational and with bounded partial quotients, $\beta \in [0; \alpha)$, in an arithmetic progression $(a + kd)$, $k \in \mathbb{N}$. We prove the asymptotic formula $N_d(x) = \frac{x}{d} + O(d \ln^3 x)$ as $x \rightarrow \infty$, where the implied constant is absolute. For growing difference d the result is non-trivial provided $d \ll \sqrt{x} \ln^{-3/2-\varepsilon} x$, $\varepsilon > 0$.

Keywords: Beatty sequence, arithmetic progression, asymptotic formula.

Bibliography: 4 titles.

For citation:

A. V. Begunts, D. V. Goryashin, 2020, "On the values of Beatty sequence in an arithmetic progression", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 364–367.

В настоящей заметке продолжено исследование свойств последовательности Битти (см., например, [1], [2]) и изучен вопрос о распределении её значений в заданной арифметической прогрессии с растущей разностью. Основным результатом является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha > 1$ — иррациональное число и β — вещественное число из промежутка $[0; \alpha)$, a и d — целые числа, $d \geq 2$, $0 \leq a < d$, x — достаточно большое натуральное число. Обозначим через

$$N_d(x) = N(x; \alpha, \beta; d, a) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ [\alpha n + \beta] \equiv a \pmod{d}}} 1$$

число значений последовательности Битти $[\alpha n + \beta]$, $1 \leq n \leq x$, принадлежащих арифметической прогрессии $(a + kd)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда если неполные частные непрерывной дроби числа α ограничены, то справедлива асимптотическая формула

$$N_d(x) = \frac{x}{d} + O(d \ln^3 x) \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

где постоянная в знаке O абсолютная.

Данный результат является нетривиальным для всех $d \ll \sqrt{x} \ln^{-3/2-\varepsilon} x$, где $\varepsilon > 0$. Отметим также, что аналогичным образом доказывается асимптотическая формула с остаточным членом $O(d \ln^4 x)$ для случая почти всех $\alpha > 1$ в смысле меры Лебега.

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 1 ([3], лемма 19). Пусть α — положительное иррациональное число, действительное число β лежит в промежутке $[0; \alpha)$ и функция ξ определена на множестве натуральных чисел. Тогда для любого целого числа $L \geq 2$ при $N \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$\sum_{n \leq N} \xi([\alpha n + \beta]) - \frac{1}{\alpha} \sum_{n \leq \alpha N + \beta} \xi(n) \ll |\Sigma_1| + |\Sigma_2| + |R_{N,\alpha}|, \quad (1)$$

где

$$|\Sigma_1| \ll \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m} \left| \sum_{n \leq \alpha N + \beta} \xi(n) e^{2\pi i \lambda m n} \right|, \quad (2)$$

$$|\Sigma_2| \ll \frac{\ln L}{L} \left(\sum_{1 \leq m \leq L \ln L} \left| \sum_{n \leq \alpha N + \beta} \xi(n) e^{2\pi i \lambda m n} \right| + \sum_{n \leq \alpha N + \beta} |\xi(n)| \right), \quad (3)$$

$$|R_{N,\alpha}| \ll \max_{n \leq \alpha N + \beta} |\xi(n)| \quad (4)$$

и $\lambda = \frac{1}{\alpha k}$, причём k — наименьшее натуральное число, для которого $\alpha k > 1$.

Применим утверждение данной леммы к функции $\xi(n) = \delta_{a,d}(n)$, равной характеристической функции арифметической прогрессии $a + kd$, $k \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\delta_{a,d}(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv a \pmod{d}, \\ 0, & \text{если } n \not\equiv a \pmod{d}. \end{cases}$$

Получим

$$N_d(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq \alpha x + \beta \\ n \equiv a \pmod{d}}} 1 + O(R) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha x + \beta}{d} + O(1) \right) + O(R) = \frac{x}{d} + O(R),$$

где $R = R_1 + R_2 + 1$,

$$R_1 = \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m} \left| \sum_{n \leq \alpha x + \beta} \delta_{a,d}(n) e^{2\pi i \lambda m n} \right|, \quad \lambda = \frac{1}{\alpha},$$

$$R_2 = \frac{\ln L}{L} \left(\sum_{1 \leq m \leq L \ln L} \left| \sum_{n \leq \alpha x + \beta} \delta_{a,d}(n) e^{2\pi i \lambda m n} \right| + \sum_{n \leq \alpha x + \beta} \delta_{a,d}(n) \right).$$

Докажем обобщение леммы 3.3 книги [4], используя обозначение $\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$.

ЛЕММА 2. Пусть λ — положительное иррациональное число и ψ — такая неубывающая положительная функция, что при всех натуральных m верно неравенство $\|\lambda m\| \geq \frac{1}{m\psi(m)}$. Тогда для любых $d, L \geq 1$:

- а) существует такое $\delta > 0$, что на промежутке $[0; \delta)$ не попадёт ни одного значения $\|\lambda d m\|$, $1 \leq m \leq L$, причём можно положить $\delta = (2dL\psi(2dL))^{-1}$;
 б) при $L \rightarrow \infty$ справедливы оценки

$$\sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{\|\lambda d m\|} \ll dL\psi(2dL) \ln L, \quad \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m\|\lambda d m\|} \ll d\psi(2dL) \ln L + d \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{\psi(2dm) \ln m}{m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству леммы 3.3 книги [4], воспользуемся тем, что для любого $\delta > 0$ из неравенств $\|x \pm y\| \geq \delta$ вытекает неравенство $\|x\| - \|y\| \geq \delta$. Рассмотрим произвольные целые числа m_1, m_2 с условием $0 \leq m_2 < m_1 \leq L$. Тогда поскольку

$$\|\lambda d m_1 \pm \lambda d m_2\| = \|\lambda d(m_1 \pm m_2)\| \geq \frac{1}{d(m_1 \pm m_2)\psi(d(m_1 \pm m_2))} \geq \frac{1}{2dL\psi(2dL)} = \delta,$$

получаем, что $\|\lambda d m_1\| - \|\lambda d m_2\| \geq \delta$. Полагая $m_2 = 0$, получаем утверждение п. а). Следовательно, точки $\|\lambda d m\|$, $1 \leq m \leq L$, расположены на полуинтервале $(0; \frac{1}{2}]$ так, что расстояние между любыми соседними не меньше δ , при этом на промежутке $[0; \delta)$ ни одной такой точки нет. Значит,

$$S_L = \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{\|\lambda d m\|} \leq \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m\delta} \ll dL\psi(2dL) \ln L.$$

Далее, пользуясь преобразованием Абеля, получаем

$$\sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m\|\lambda d m\|} = \frac{S_L}{L+1} + \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{S_m}{m(m+1)} \ll d\psi(2dL) \ln L + d \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{\psi(2dm) \ln m}{m}.$$

Лемма доказана.

Оценим теперь суммы R_1 и R_2 . Поскольку при $\|t\| \neq 0$ для всякого $x > 0$ верна оценка

$$\left| \sum_{k \leq x} e^{2\pi i k t} \right| \leq \frac{1}{2\|t\|},$$

получаем

$$R_1 = \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m} \left| \sum_{k \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}} e^{2\pi i \lambda m(a + kd)} \right| = \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m} \left| \sum_{k \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}} e^{2\pi i \lambda m d k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m \leq L} \frac{1}{m\|\lambda d m\|}.$$

Аналогично имеем

$$R_2 = \frac{\ln L}{L} \sum_{1 \leq m \leq L \ln L} \left| \sum_{k \leq \frac{\alpha x + \beta - a}{d}} e^{2\pi i \lambda m(a + kd)} \right| + \frac{x}{dL} \ln L \ll \frac{\ln L}{L} \sum_{1 \leq m \leq L \ln L} \frac{1}{\|\lambda d m\|} + \frac{x}{dL} \ln L.$$

Далее воспользуемся утверждением леммы 2. Если неполные частные непрерывной дроби числа α (а значит, и числа $\lambda = \frac{1}{\alpha}$) ограничены, то соответствующая функция ψ равна константе (см. [4, с. 134–135]). Получаем оценки

$$|R_1| \ll d \ln^2 L, \quad |R_2| \ll d \ln^3 L + \frac{x}{dL} \ln L,$$

что при $L = x$ даёт требуемый результат.

Авторы благодарят профессора В. Н. Чубарикова за поддержку и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Technau, M., 2018, “On Beatty sets and some generalisations thereof”, Würzburg, Würzburg University Press. doi: 10.25972/WUP-978-3-95826-089-4
2. Бегунц А. В., Горяшин Д. В. Актуальные задачи, связанные с последовательностями Битти // Чебышевский сборник. **18**. Вып. 4. 2017. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Бегунц А. В. О распределении значений сумм мультипликативных функций на обобщенных арифметических прогрессиях // Чебышевский сборник. **6**. Вып. 2. 2005. 52–74.
4. Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей: Пер. с англ. — М.: Наука, 1985. — 408 с.

REFERENCES

1. Technau, M., 2018, “*On Beatty sets and some generalisations thereof*”, Würzburg, Würzburg University Press. urn:nbn:de:bvb:20-opus-163303
2. Begunts, A. V., Goryashin, D. V., 2017, “Topical problems concerning Beatty sequences”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 18, no. 4, pp. 97–105. doi: 10.22405/2226-8383-2017-18-4-97-105
3. Begunts, A. V., 2005, “On the distribution of the values of sums of multiplicative functions on generalized arithmetic progressions”, *Chebyshevskii Sb.*, vol. 6, no. 2, pp. 52–74.
4. Kuipers, L., Niederreiter, H., 1974, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York.

Получено 21.09.2019 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.