ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-341-356

Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм

В. Н. Чубариков (г. Москва)

Чубариков Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математических и компьютерных методов анализа, президент механико-математического факультета, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова (г. Москва).
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Аннотация

Доказана теорема о среднем для кратных тригонометрических сумм, обобщающая теорему Г. И. Архипова [12, 13]. Первая теорема подобного типа лежит в сердцевине метода И. М. Виноградова [2]. В работе найден вариант теоремы с "равноправными" длинами промежутков изменения переменных. Интересным приложением метода И. М. Виноградова являются оценки дзетовых сумм вида

$$\sum_{n\le P} n^{it}.$$

Подобным приложением теоремы о среднем, доказанной нами, служат оценки сумм вида

$$\sum_{n\le P_1}\cdots\sum_{n\le P_r}(n_1\dots n_r+k)^{it},\ \sum_{n\le P}\tau_s(n)(n+k)^{it},\ \sum_{p\le P}(p+k)^{it}.$$

Ключевые слова: теоремы о среднем И. М. Виноградова, Г. И. Архипова; многомерная функция делителей; простые числа; дзетовая сумма.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:
В. Н. Чубариков. Об одной теореме о среднем значении кратных тригонометрических сумм // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 341–356.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-341-356

On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums

V. N. Chubarikov

Chubarikov Vladimir Nikolaevich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the Department of mathematical and computer methods of analysis, president of the mechanics and mathematics faculty of the M. V. Lomonosov Moscow State University.
e-mail: chubarik1@mech.math.msu.su

Abstract

A mean-value theorem for multiple trigonometric generalizing from the G. I. Arkhipov's theorem [12, 13] was proved. The first theorem of the similar type lies in the core of the I. M. Vinogradov's method [2]. In the paper the version of theorem with "similar" lengths of changing intervals of variables. Estimates of zeta-sums of the form

$$\sum_{n\leq P} n^{it}.$$

are the interesting application of the I.M.Vinogradov's method. The similar application of the mean-value theorem proving by us serve the estimate of sums of the form

$$\sum_{n\leq P_1}\cdots\sum_{n\leq P_r}(n_1\dots n_r+k)^{it}, \sum_{n\leq P}\tau_s(n)(n+k)^{it}, \sum_{p\leq P}(p+k)^{it}.$$

Keywords: the mean-value theorem of I. M. Vinigradov and G. I. Arkhipov, the multivariate divisor function, prime numbers, the zeta-sum.

Bibliography: 17 titles.

For citation:
V. N. Chubarikov, 2020, "On a mean-value theorem for multiple trigonometric sums" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 341–356.

1. Введение

В настоящей статье дано обобщение теоремы Г. И. Архипова о среднем значении степени модуля кратной тригонометрической суммы [12]. Первая теорема о среднем, лежащая в основе метода тригонометрических сумм, найдена И. М. Виноградовым. Наиболее совершенное изложение её дано в монографии [2]. Ю. В. Линнику [7] принадлежит p-адический вариант доказательства этой теоремы, усовершенствованный впоследствии А. А. Карацубой, Н. М. Коробовым [10, 11], Г. И. Архиповым [13] и другими.

Интересное применение метода тригонометрических сумм найдено Д. Е. Литтлвудом [1] в теории дзета-функции Римана, что позволило уточнить остаток Валле-Пуссена в асимптотической формуле для числа простых, не превосходящих любой наперёд заданной границы. Основным моментом доказательства этого утверждения лежит оценка дзетовой суммы вида

$$S = S(P;t) = \sum_{n\leq P} n^{it}.$$

Дальнейшие улучшения оценки дзетовой суммы связаны с применением метода И. М. Виноградова [5, 6, 3, 8].

Нами найдены оценки для любого целого k, отличного от нуля, подобных кратных тригонометрических сумм вида

$$\sum_{n\le P_1}\cdots\sum_{n\le P_r}(n_1\dots n_r+k)^{it},\sum_{n\le P}\tau_s(n)(n+k)^{it},\sum_{p\le P}(p+k)^{it},$$

где $\tau_s(n)$ — многомерная функция делителей числа n, выражающая число решений уравнения $n_1\dots n_s=n$ в натуральных числах $n_1,\dots,n_s$; а переменная p пробегает последовательность всех простых чисел.

В качестве первого шага получения этих оценок дадим доказательство теоремы о среднем для многочленов от нескольких переменных заданной степени.

Пусть $J=J(\mathbf{P};n,k,r)$ обозначает число решений системы диофантовых уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2k}(-1)^j x_{1,j}^{t_1}\dots x_{r,j}^{t_r}=0,\quad 0\le t_1+\dots+t_r\le n,\quad t_1,\dots,t_r\ge 0,$$

где каждое неизвестное $x_{i,j},1\le i\le r,1\le j\le 2k$, принимает все целые значения от 1 до P_j, причём $1<P_1\le P_2\le\dots\le P_r\le 2P_1,\mathbf{P}=(P_1,\dots,P_r)$, а величины n,k,r являются натуральными числами. Очевидно, что

$$J=J(\mathbf{P};n,k,r)=\int\cdots\int_{\Omega}|S(A)|^{2k}\,dA,$$

где

$$S(A)=S(A;\mathbf{P};n,k,r)=\sum_{x_1}^{P_1}\cdots\sum_{x_r=1}^{P_r}\exp\{2\pi i f(x_1,\dots,x_r)\},$$

причём $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_r)$,

$$f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots t_r\le n}}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}\alpha(t_1,\dots,t_r)x_1^{t_1}\dots x_r^{t_r},$$

число коэффициентов многочлена $f(\mathbf{x})$ равно $m=\binom{n+r}{r}$, символ Ω обозначает куб размерности m следующего вида

$$0\le\alpha(t_1,\dots,t_r)<1,\quad 0\le t_1,\dots,t_r,t_1+\dots+t_r\le n,$$

буква A обозначает набор вещественных коэффициентов

$$\alpha(t_1,\dots,t_r),\quad 0\le t_1,\dots,t_r,t_1+\dots+t_r\le n,$$

многочлена $f(x_1,\dots,x_r)$ степени n от r переменных $x_1,\dots,x_r$, наконец,

$$d\Omega=\prod_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_r\le n}}^{n}\cdots\prod_{t_r=0}^{n}d\alpha(t_1,\dots,t_r).$$

Теорема. *Пусть $3\le n,2\le r,$ — натуральные числа, $0\le\tau$ — целое число, $m=\binom{n+r}{r}$, $m_1=\frac{nrm}{r+1}$, и пусть $k\ge m\tau$. Тогда для величины $J=J(\mathbf{P};n,k,r)$ имеем оценку*

$$J\le D(\tau)P_1^{2rk-\Delta(\tau)},$$

где

$$\Delta(\tau)=m_1(1-(1-1/n)^\tau),\quad D(\tau)=(2^{nr}(n+1^n)km^{-1})^{2k}.$$

2. Леммы

Лемма 1. *Пусть q — простое число, T_0 — число решений системы сравнений*

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j x_{1j}^{t_1}\dots x_{rj}^{t_r}\equiv 0 \pmod q$$

$$0\le t_1,\dots,t_r, t_1+\dots+t_r\le n, m=\binom{n+r}{r},$$

где каждая неизвестная x_{ij} пробегает значения из полной системы вычетов по модулю q.

Тогда для величины T_0 справедлива оценка

$$T_0\le (n(n+1))^{r-1})^{2m}q^{2mr-m+1}, m=\binom{n+r}{r}.$$

Доказательство. Имеем

$$T_0=q^{-m}\sum_{a(0,\dots,0)=1}^{q}\cdots\sum_{a(t_1,\dots,t_r)=1}^{q}\cdots\sum_{a(0,\dots,n)=1}^{q}\left|\sum_{x_1=1}^{q}\cdots\sum_{x_r=1}^{q}e^{2\pi i F_A(x_1,\dots,x_r)/q}\right|^{2m},$$

где

$$F_A(x_1,\dots,x_r)=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_r\le n}}^{n}\cdots\sum_{t_r=0}^{n}a(t_1,\dots,t_r),$$

причём A — целочисленный набор $a(t_1,\dots,t_r), 0\le t_1,\dots,t_r, t_1+\dots+t_r\le n$.

Произведём следующую замену переменных суммирования

$$\begin{cases} x_1=y_1,\\ x_2=y_2+y_1^{n+1},\\ \dots\quad\dots\\ x_r=y_r+y_1^{(n+1)^{r-1}}.\end{cases}$$

Поскольку в сумме для T_0 переменные $x_1,\dots,x_r$ пробегают полные системы вычетов по модулю q, переменные $y_1,\dots,y_r$ будут пробегать полные системы вычетов по модулю q, и наоборот. Следовательно,

$$T_0=q^{-m}\sum_{a(0,\dots,0)=1}^{q}\cdots\sum_{a(t_1,\dots,t_r)=1}^{q}\cdots\sum_{a(0,\dots,n)=1}^{q}1\times$$

$$\times\left|\sum_{y_1=1}^{q}\cdots\sum_{y_r=1}^{q}e^{2\pi i F_A(y_1,y_2+y_1^{n+1},\dots,y_r+y_1^{(n+1)^{r-1}})/q}\right|^{2m}.$$

Далее при $p>1$ воспользуемся неравенством Гёльдера в виде

$$(\sum_{\nu}|a_\nu|)^p\le(\sum_{\nu}1)^{p-1}\sum_{\nu}|a_\nu|^p.$$

При $p=2m$ получим

$$\left|\sum_{y_1=1}^{q}\cdots\sum_{y_r=1}^{q}e^{2\pi i F_A(y_1,y_2+y_1^{n+1},\dots,y_r+y_1^{(n+1)^{r-1}})/q}\right|^{2m}\le$$

$$\le q^{(r-1)(2m-1)}\sum_{y_2=1}^{q}\cdots\sum_{y_r=1}^{q}\left|\sum_{y_1=1}^{q}e^{2\pi i F_A(y_1,y_2+y_1^{n+1},\dots,y_r+y_1^{(n+1)^{r-1}})/q}\right|^{2m}.$$

Отсюда находим

$$T_0\le q^{(r-1)(2m-1)}U,$$

где

$$U=\sum_{y_2=1}^{q}\cdots\sum_{y_r=1}^{q}1\times$$

$$\times q^{-m}\sum_{a(0,\dots,0)=1}^{q}\cdots\sum_{a(t_1,\dots,t_r)=1}^{q}\cdots\sum_{a(0,\dots,n)=1}^{q}\left|\sum_{y_1=1}^{q}e^{2\pi iF_A(y_1,y_2+y_1^{n+1},\dots,y_r+y_1^{(n+1)^{r-1}})}\right|^{2m}.$$

Имеем

$$U=\sum_{y_2=1}^{q}\cdots\sum_{y_r=1}^{q}U(y_2,\dots,y_r),$$

где $U(y_2,\dots,y_r)$ равно числу решений следующей системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j y_{1,j}^{t_1}\left(y_2+y_{1,j}^{n+1}\right)^{t_2}\dots\left(y_r+y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}}\right)^{t_r}\equiv 0 \pmod q,$$

$$0\le t_1,\dots t_r, t_1+\dots+t_r\le n,$$

причём неизвестные $y_{1,j}, 1\le j\le 2m$ принимают значения из полной системы вычетов по модулю q.

Заметим, что величина $U^*=U(y_2,\dots,y_r)$ не зависит от переменных $y_2,\dots,y_r$, так как вместе с решением $(y_{1,j},y_2+y_{1,j}^{n+1},\dots,y_r+y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}})$ предыдущей системы сравнений её решением является $\left(y_{1,j},y_{1,j}^{n+1},\dots,y_{1,j}^{(n+1)^{r-1}}\right)$, и наоборот. В этом легко убеждаемся, предположив, что $x_{i,j}, 1\le i\le r, 1\le j\le 2m$, решение системы сравнений, тогда $x_{i,j}+a_i, 1\le i\le r, 1\le j\le 2m$, также будет решением системы сравнений. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j(x_{1,j}+a_1)^{t_1}\dots(x_{r,j}+a_r)^{t_r}=$$

$$=\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j\sum_{v_1=0}^{t_1}\binom{t_1}{v_1}a_1^{t_1-v_1}x_{1,j}^{v_1}\cdots\sum_{v_r=0}^{t_r}\binom{t_r}{v_r}a_r^{t_r-v_r}x_{r,j}^{v_r}=$$

$$=\sum_{v_1=0}^{t_1}\cdots\sum_{v_r=0}^{t_r}\binom{t_1}{v_1}a_1^{t_1-v_1}\dots\binom{t_r}{v_r}a_r^{t_r-v_r}\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j x_{1,j}^{v_1}\dots x_{r,j}^{v_r}\equiv 0 \pmod q.$$

Следовательно, положив $(a_1,a_2,\dots,a_r)=(0,-y_2,\dots,-y_r)$, получим эквивалентную систему сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j y_{1,j}^{t_1+t_2(n+1)+\dots+t_r(n+1)^{r-1}}\equiv 0 \pmod q,$$

$$0\le t_1,t_2,\dots,t_r,t_1+t_2+\dots+t_r\le n.$$

Так как любое значение t вида

$$t=t_1+t_2(n+1)+\dots+t_r(n+1)^{r-1}, 0\le t_1,\dots,t_r,t_1+\dots+t_r\le n,$$

Принимается не более одного раза, то последнюю систему сравнений можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j z_j^t\equiv 0 \pmod q, t=t_1+t_2(n+1)+\dots+t_r(n+1)^{r-1},$$

$$0\le t_1,t_2,\dots,t_r, 1\le t_1+t_2+\dots+t_r\le n.$$

Количество сравнений в этой системе сравнений равно $m-1$, где $m=\binom{n+r}{r}$. Степени многочленов её не превосходят $n(n+1)^{r-1}$. Занумеруем числа t, представимые в виде

$$t=t_1+t_2(n+1)+\dots+t_r(n+1)^{r-1}, 0\le t_1,\dots,t_r, 1\le t_1+\dots+t_r\le n,$$

в порядке возрастания $1 = s_1 < s_2 < \cdots < s_{m-1} = n(n+1)^{r-1}$.

Таким образом, число решений U^* рассматриваемой системы сравнений можно представить в виде

$$V = q^{-m+1} \sum_{b_{s_1}=1}^{q} \cdots \sum_{b_{s_{m-1}}=1}^{q} \left| \sum_{z=1}^{q} e^{2\pi i f_B(z)/q} \right|^{2m}, f_B(z) = \sum_{u=1}^{m-1} b_t z^{s_u}.$$

Используя оценку А.Вейля, получим

$$U^* \leq q^{m+1} + (n(n+1)^r - 1)^{2m} q^m \leq (n(n+1))^{r-1})^{2m} q^{m+1}.$$

Отсюда находим

$$U = \sum_{y_2=1}^{q} \cdots \sum_{y_r=1}^{q} U^* = q^{r-1} U^* \leq (n(n+1))^{r-1})^{2m} q^{m+r}, \quad T_0 \leq (n(n+1))^{r-1})^{2m} q^{2mr-m+1}.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Докажем несколько полезных тождеств.

Лемма 2. *Пусть $t_1, \ldots, t_r$ — неотрицательные целые числа. Тогда имеем тождества*

$$m^* = m^*(n,r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r=n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} 1 = \binom{n+r-1}{r-1};$$

$$m = m(n,r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r\leq n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} 1 = \binom{n+r}{r};$$

$$m_1^* = m_1^*(n,r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r=n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} (t_1 + \cdots + t_r) = r\left(\binom{n+r}{r} - \binom{n+r-1}{r-1}\right);$$

$$m_1 = m_1(n,r) = \sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1+\cdots+t_r\leq n}}^{n} \cdots \sum_{t_r=0}^{n} (t_1 + \cdots + t_r) = \frac{rn}{r+1}\binom{n+r}{r}.$$

Доказательство. Рассмотрим при $|z| < 1$ производящую функцию $F(z)$ для последовательности m_0. Имеем

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m^*(n,r) z^n = \sum_{t_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{t_r=0}^{\infty} z^{t_1+\cdots+t_r} = \left(\sum_{t_1=0}^{\infty} z^{t_1}\right) \ldots \left(\sum_{t_r=0}^{\infty} z^{t_r}\right) = \frac{1}{(1-z)^r}.$$

Следовательно,

$$m^* = m^*(n,r) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{(1-z)^r}\bigg|_{z=0} = \frac{r(r+1)\ldots(r+n-1)}{n!} = \binom{n+r-1}{r-1}.$$

Далее величина $m = m(n,r) = \sum_{k=0}^{n} m^*(k,r)$ равна числу решений уравнения $t_1 + \cdots + t_{r+1} = n$ в целых неотрицательных числах $t_1, \ldots, t_{r+1}$, т.е.

$$m = m(n,r) = m^*(n,r+1) = \binom{n+r}{r}.$$

Рассмотрим теперь при $|z| < 1$ производящую функцию $F_1(z)$ последовательности $m_1^*(n,r)$. Находим

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1^*(n,r) z^n = \sum_{t_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{t_r=0}^{\infty} (t_1 + \cdots + t_r) z^{t_1+\cdots+t_r} =$$

$$= rz\left(\frac{1}{1-z}\right)' r\frac{z}{(1-z)^{r-1}} = r\frac{z}{(1-z)^{r+1}} = r\left(\frac{1}{(1-z)^{r+1}} - \frac{1}{(1-z)^{r}}\right).$$

Отсюда и из вида производящей функции $F(z)$ имеем

$$m_1^*(n,r) = r\left(\binom{n+r}{r} - \binom{n+r-1}{r-1}\right).$$

Наконец, используя при $0 \le k \le n$ формулу для $m_1^*(k,r)$ и для $m(k,r)$, имеем

$$m_1(n,r) = \sum_{k=0}^{n} m_1^*(k,r) = r\binom{n+r+1}{r+1} - r\binom{n+r}{r} = \frac{rn}{r+1}\binom{n+r}{r}.$$

Лемма доказана. □

Перейдём к формулировке и доказательству леммы о числе решений полной системы сравнений.

Определение. *Пусть задана матрица M, имеющая $m = \binom{n+r}{r}$ строк и $k \ge 1$ столбцов,*

$$M = \left(x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}\right),$$

где

$$0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n, 1 \le j \le k.$$

Набор векторов $\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x_k}$, где $\mathbf{x_s} = (x_{1,s}, \dots, x_{r,s}), 1 \le s \le k$, называют **регулярным по модулю** *q, если ранг матрицы M, элементами которой являются вычеты $x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r}$ по простому модулю q, будет максимален. В частности, при $k \ge m$, он равен m.*

Лемма 3. *Пусть p — простое число, T — число решений системы сравнений*

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p^{t_1+\dots+t_r}},$$

$$0 \le t_1, \dots, t_r, 1 \le t_1 + \dots + t_r \le n,$$

где неизвестные $x_{s,j}, 1 \le s \le r, 1 \le j \le k$, пробегают значения из полной системы вычетов по модулю p^n, например, $0 \le x_{s,j} < p^n$, и пусть векторы $\mathbf{x_j}, j = 2, 4, \dots, 2m$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p.

Тогда справедлива следующая оценка

$$T \le (n+1)^{2rm} p^A, A = 2rnm - m_1, \quad m = \binom{n+r}{r}, \quad m_1 = \frac{rn}{r+1}\binom{n+r}{r}.$$

Доказательство. Можно считать, что $p > n$, так как в противном случае решения системы сравнений, удовлетворяющие условию регулярности, отсутствуют.

Представим каждую неизвестную $x_{s,j}, 1 \le s \le r, 1 \le j \le 2m$, в виде

$$x_{s,j} = \sum_{l=0}^{n-1} p^l x_{s,j,l}, 0 \le x_{s,j,l} < p,$$

и подставим эти выражения в систему сравнений.

Сначала отметим, что сравнения полученной системы обязаны выполняться по модулю p, т.е.

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j,0}^{t_1} \dots x_{r,j,0}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p},$$

$$0 \le t_1, \dots, t_r, 1 \le t_1 + \dots + t_r \le n,$$

и неизвестные $\mathbf{x}_{2v,0} = (x_{1,2v,0}, \dots, x_{r,2v,0}), 1 \le v \le m$, удовлетворяют условию регулярности. Число решений этой системы сравнений обозначим через T_0. По лемме 1 имеем

$$T_0 \le (n(n+1))^{r-1})^{2m} p^{2mr-m+1}, m = \binom{n+r}{r}.$$

Итак, неравенство для величины T_0 даёт оценку сверху количества нулевых координат $x_{s,j,0}$, удовлетворяющих системе сравнений из условия леммы. Оценку числа других координат проведем по индукции по параметру ν. При $\nu=0$ такая оценка получена выше.

Далее первоначальную систему сравнений рассмотрим по модулю $p^{\nu+1}, 1\le\nu\le n$. Положим

$$u_{s,j,\nu}=\sum_{\mu=0}^{\nu}p^{\mu}x_{s,j,\mu}=u_{s,j,\nu-1}+p^{\nu}x_{s,j,\nu}, u(s,j,0)=x(s,j,0).$$

Имеем $x_{s,j}\equiv u(s,j,\nu) \pmod{p^{\nu+1}}$. Следовательно, обязана выполняться система сравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j u_{1,j,\nu}^{t_1}\dots u_{r,j,\nu}^{t_r}\equiv 0 \pmod{p^{\nu+1}},$$

$$0\le t_1,\dots,t_r, \nu+1\le t_1+\dots+t_r\le n,$$

и неизвестные $\mathbf{x_{2v,0}}=(x_{1,2v,0},\dots,x_{r,2v,0}), 1\le v\le m$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p. Число решений этой системы сравнений обозначим через T_ν.

Предположим, что справедлива оценка $T_{\nu-1}$. Зафиксируем любое решение $u_{s,j,\nu-1}$, $1\le s\le r$, $1\le j\le 2m$. Для этого фиксированного решения оценим величину $T(\nu)$.

Поскольку

$$u_{1,j,\nu}^{t_1}\dots u_{r,j,\nu}^{t_r}\equiv u_{1,j,\nu-1}^{t_1}\dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r}+p^{\nu}\psi_j(t_1,\dots,t_r),$$

где

$$\psi_j(t_1,\dots,t_r)=\sum_{\lambda=1}^{r}t_\lambda u_{1,j,\nu-1}^{t_1}\dots u_{\lambda,j,\nu-1}^{t_\lambda-1}\dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r}x_{\lambda,j,\nu} \pmod p,$$

где при $t_\lambda=0$ соответствующее слагаемое в последней сумме равно 0.

Отсюда приходим к системе сравнений с неизвестными $x_{s,j,\nu}, 1\le s\le r, 1\le j\le 2m$,

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j\psi_j(t_1,\dots,t_r)\equiv p^{-\nu}\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j u_{1,j,\nu-1}^{t_1}\dots u_{r,j,\nu-1}^{t_r}\equiv\lambda(t_1,\dots,t_r) \pmod p,$$

$$0\le t_1,\dots,t_r, \nu+1\le t_1+\dots+t_r\le n,$$

причём набор векторов $\mathbf{u}_{2j,\nu-1}=(u_{1,2j,\nu-1},\dots,u_{r,2j,\nu-1}), 1\le j\le m$, удовлетворяет условию регулярности по модулю p.

Для оценки $T(\nu)$ из предыдущей системы сравнений составим r подсистем сравнений. В первую подсистему войдут сравнения с условиями $t_1\ge\nu+1, t_2=\dots=t_r=0$, во вторую те сравнения, для которых $t_1+t_2\ge\nu+1, t_2\ne0, t_3=\dots=t_r=0$, и т.д., наконец, в r-ю подсистему включим сравнения с условиями $t_1+\dots+t_r\ge\nu+1, t_r\ne0$.

Пусть $R_s(\nu+1)$ обозначает число решений в целых числах неравенств $\nu+1\le t_1+\dots+t_s\le n$, $0\le t_1,\dots,t_s$. Тогда в первую подсистему войдут $R_1(\nu+1)$ сравнений, во вторую — войдут $R_2(\nu+1)-R_1(\nu+1)$, и т.д., в r-ю войдут сравнения в количестве $R_r(\nu+1)-R_{r-1}(\nu+1)$.

Первая подсистема будет состоять из сравнений вида

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j x_{1,j,0}^{t_1-1}x_{1,j,\nu}\equiv\lambda(t_1,0,\dots,0) \pmod p, \nu+1\le t_1\le n,$$

с неизвестными $x_{1,j,\nu}, 1\le j\le 2m$, и с условием регулярности по модулю p, которое означает, что матрица её коэффициентов имеет максимальный ранг по модулю p. Последнее означает, что найдутся $\rho=R_1(\nu+1)$ коэффициентов с номерами $1\le j_1\le j_\rho\le 2m$, таких, что определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{1,j_1,0}^{\nu+1} & \dots & x_{1,j_\rho,0}^{\nu+1}\\ \dots & \dots & \dots\\ x_{1,j_1,0}^{n} & \dots & x_{1,j_\rho,0}^{n}\end{pmatrix}$$

не сравним с 0 по модулю p. Следовательно, первая подсистема сравнений имеет не более $p^{2m-R_1(\nu+1)}$ решений.

Рассмотрим теперь s-ю подсистему сравнений. Она приводится к виду

$$\sum_{j=1}^{2m}(-1)^j x_{1,j,0}^{t_1}\dots x_{s,j,0}^{t_s-1}x_{s,j,\nu}\equiv\lambda'(t_1,\dots,t_s,0,\dots,0)\pmod p, \nu+1\le t_1\le n,$$

$$\nu+1\le t_1+\dots+t_s\le n, t_s\ne 0, 0\le t_1,\dots,t_s,$$

с неизвестными $x_{1,j,\nu}, 1\le j\le 2m$, из полной системы по модулю вычетов p, и с условием регулярности по модулю p, т.е. с условием линейной независимости сравнений системы по модулю p. Как и раньше, получим, что число решений этой системы сравнений не превосходит $p^{R_s(\nu+1)-R_{s-1}(\nu+1)}$.

Таким образом, число решений ν-й системы сравнений не превосходит

$$T_\nu\le p^{2m-R_1(\nu+1)}\prod_{s=2}^{r}p^{R_s(\nu+1)-R_{s-1}(\nu+1)}=p^{2mr-R_r(\nu+1)}.$$

Следовательно,

$$T\le\prod_{\nu=0}^{n-1}T_\nu\le(n(n+1)^{r-1})^{2m}p^{2mrn-R}, R=\sum_{\nu=1}^{n}R_r(\nu).$$

Найдём значение величины R. Имеем

$$R=\sum_{\nu=1}^{n}R_r(\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=\nu}^{n}R_r^*(k)=\sum_{k=1}^{n}R_r^*(k)\sum_{\nu=1}^{k}1=\sum_{k=1}^{n}kR_r^*(k)=$$

$$=\sum_{\substack{t_1=0\\ t_1+\dots+t_r\le n}}^{n}\dots\sum_{t_r=0}^{n}(t_1+\dots+t_r)=\frac{rn}{r+1}\binom{n+r}{r}=m_1.$$

□

Теперь докажем лемму о рекуррентном неравенстве.

Лемма 4. *Пусть $n\ge 2, r\ge 1, k\ge 2m, 1\le P_1\le\dots\le P_r\le 2P_1$. Тогда существует такое число p из отрезка $[P_1^{1/n}, 2P_1^{1/n}]$, что*

$$J=J(\mathbf{P};n,k,r)\le D_1p^{2r(k-m)+2mrn-m_1}J(\mathbf{Q};n,k-m,r)+D_2P_1^{2kr-2k+2m-2},$$

$$m_1=\frac{rn}{r+1}\binom{n+r}{r}, D_1=2n^2J_0\le 2n^2(n+1)^{2rm}\binom{k}{m}^2, D_2=2^{2nm+2nk(r-1)+1}n^{2nk},$$

где $\mathbf{Q}=(Q_1,\dots,Q_r), Q_s=P_sp^{-1}+1, 1\le s\le r$.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(P_1\dots P_r)^{m_1}>D_2$, поскольку в противном случае оценка величины J становится тривиальной. При этом условии на отрезке вида $[P_1^{1/n}, 2P^{1/n}]$ находится по крайней мере n различных простых чисел ([14], гл.III, лемма 8, с.105–107). Пусть $p_1,\dots,p_n$ обозначают любые n различных таких простых чисел, $\mathbf{x}_j=(x_{1,j},\dots,x_{r,j})$. Представим J в виде

$$J=\int\cdots\int_{\Omega}\left|\sum_{\mathbf{x}_1}\sum_{\mathbf{x}_3}\cdots\sum_{\mathbf{x}_{2k-1}}e^{2\pi i(f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_3)+\dots+f(\mathbf{x}_{2k-1}))}\right|^2d\Omega,$$

где координаты векторов $\mathbf{x}_j=(x_{1,j},\dots,x_{r,j})$ принимают значения целых чисел, причём $1\le x_{s,j}\le P_s$, $1\le s\le r$.

Наборы векторов $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,\dots,\mathbf{x}_{2k-1}\}$ разобьём на два класса. Первый класс A будет состоять только из тех наборов, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю $p=p_s$ при некотором $s, 1\le s\le r$. Определение регулярности набора векторов по простому модулю дано перед формулировкой леммы 3. Все остальные наборы отнесём ко второму классу B.

Пусть

$$\sum_A=\sum_{\substack{\mathbf{x}_1\\ \{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3,\dots,\mathbf{x}_{2k-1}\}\in A}}\sum_{\mathbf{x}_3}\cdots\sum_{\mathbf{x}_{2k-1}}e^{2\pi i(f(\mathbf{x}_1)+f(\mathbf{x}_3)+\dots+f(\mathbf{x}_{2k-1}))}.$$

Сумма $\sum\limits_B$ определяется аналогично. Тогда справедливо неравенство

$$J = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_A + \sum_B \right|^2 d\Omega \le 2J_1 + 2J_2,$$

где

$$J_1 = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_A \right|^2 d\Omega, \quad J_2 = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_B \right|^2 d\Omega.$$

Оценим J_1. Класс A разобьём на n совокупностей $A_1, \ldots, A_n$. Для всякого $s, 1 \le s \le n$, совокупность A_s будет состоять только из тех наборов векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{2k-1}\}$, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю p_s, и не входят в совокупности $A_1, \ldots, A_{s-1}$. По неравенству Коши имеем

$$J_1 = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_{s=1}^{n} \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega \le n \sum_{s=1}^{n} J_1 = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega \le n^2 J_0,$$

где J_0 обозначает ту совокупность A_t, для которой при $1 \le s \le n$ интеграл

$$J_s = \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_{A_s} \right|^2 d\Omega$$

имеет наибольшее значение.

Рассмотрим те наборы $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{2k-1}\}$, которые удовлетворяют условию регулярности по модулю p_t, причём первые m столбцов соответствующей матрицы M, отвечающей набору векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{2m-1}\}$, являются линейно независимыми по модулю p_t. Совокупность таких наборов векторов обозначим $A_{t,0}$. Поскольку все другие наборы векторов из совокупности A_t отличаются только номера для линейно независимых столбцов матрицы M, получим неравенство

$$J_0 \le \binom{k}{m}^2 \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \sum_{A_{t,0}} \right|^2 d\Omega.$$

Преобразуем сумму

$$\sum_{A_{t,0}} = \{\sum_{\mathbf{x_1}} \cdots \sum_{\mathbf{x_{2m-1}}}\}' \sum_{\mathbf{x_{2m+1}}} \cdots \sum_{\mathbf{x_{2k-1}}},$$

где штрих в знаке суммы означает, что первые m векторов характеризуют условие регулярности по модулю $p = p_t$.

Заметим, что для остальных $r - m$ векторов $\mathbf{x}_j, \quad j = 2m+1, \ldots, 2k-1$, их координаты произвольным образом изменяются в соответствующих промежутках. Представим эти векторы $\mathbf{x}_j$ в виде $\mathbf{x}_j = \mathbf{y}_j + p\mathbf{z}_j$, где при $1 \le s \le r, j = 2m+1, \ldots, 2k-1$, их координаты $y_{s,j}$ пробегают целые значения от 1 до p, а $z_{s,j}$ — от 0 до $P_s p^{-1}$.

Применяя неравенство Гёльдера, найдем

$$|\sum_{A_{t,0}}|^2 \le \left| \{\sum_{\mathbf{x_1}} \cdots \sum_{\mathbf{x_{2m-1}}}\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{y}} \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)} \le$$

$$\le p^{2r(k-m)-r} \sum_{\mathbf{y}} \left| \{\sum_{\mathbf{x_1}} \cdots \sum_{\mathbf{x_{2m-1}}}\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)}.$$

Следовательно,

$$J_0 \le \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m)} \max_{\mathbf{y}} \int\limits_{\Omega} \cdots \int \left| \{\sum_{\mathbf{x_1}} \cdots \sum_{\mathbf{x_{2m-1}}}\}' \right|^2 \left| \sum_{\mathbf{z}} \right|^{2(k-m)} d\Omega.$$

Отсюда при некотором $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 = (y_{1,0}, \dots, y_{r,0})$ интеграл в левой части последнего неравенства представляет собой число решений следующей системы диофантовых уравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} = \sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j (y_{1,0} + pz_{1,j})^{t_1} \dots (y_{r,0} + pz_{r,j})^{t_r},$$

$$0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n,$$

где неизвестные векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2m-1}$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p, а неизвестные $z_{s,j}, 1 \le s \le r, j = 2m+1, 2m+2, \dots, 2k$ пробегают все целые значения от 0 до $P_s p^{-1}$.

Не изменяя числа решений в этой системе, произведём сдвиг векторов неизвестных на вектор $-\mathbf{y}_0$. Получим следующую систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (x_{1,j} - y_{1,0})^{t_1} \dots (x_{r,j} - y_{r,0})^{t_r} = p^{t_1 + \dots + t_r} \sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j z_{1,j}^{t_1} \dots z_{r,j}^{t_r},$$

$$0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n.$$

Так как число $J(\Lambda)$ решений системы уравнений

$$\sum_{j=2m+1}^{2k} (-1)^j z_{1,j}^{t_1} \dots z_{r,j}^{t_r} = \lambda(t_1, \dots, t_r), (0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n),$$

не превосходит числа решений подобной системы уравнений при $\lambda(t_1, \dots, t_r) = 0$ для всех $0 \le t_1, \dots, t_r$, $t_1 + \dots + t_r \le n$, то имеем

$$J(\Lambda) \le J(\mathbf{Q}; n, k-m, r).$$

Пусть T обозначает число решений системы сравнений

$$\sum_{j=1}^{2m} (-1)^j (x_{1,j} - y_{1,0})^{t_1} \dots (x_{r,j} - y_{r,0})^{t_r} \equiv 0 \pmod{p^{t_1 + \dots + t_r}},$$

$$0 \le t_1, \dots, t_r, t_1 + \dots + t_r \le n,$$

причём переменные $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$, удовлетворяют условию регулярности по модулю p и пробегают полные системы вычетов по модулю p^n.

Воспользуемся оценкой величины T из леммы 3. Находим

$$J_0 \le \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m)} T J(\mathbf{Q}; n, k-m, r),$$

$$J_1 \le n^2 J_0 \le n^2 (n+1)^{2rm} \binom{k}{m}^2 p^{2r(k-m) + 2mrn - m_1} J(\mathbf{Q}; n, k-m, r).$$

Перейдём к оценке J_2. Для любого $1 \le s \le n$ наборы векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-1}$, входящие в класс B, не являются регулярными по модулю p_s. Следовательно, найдутся целые числа $c_s(t_1, \dots, t_r)$, не все сравнимые с нулём по модулям $p_s, 1 \le s \le n$, такие, что справедливы сравнения

$$\sum_{\substack{t_1=0 \\ t_1 + \dots + t_r \le n}}^{n} \dots t_r = 0^n \, c_s(t_1, \dots, t_r) x_{1,j}^{t_1} \dots x_{r,j}^{t_r} \equiv 0 \pmod{p_s},$$

$$j = 1, 3, \dots, 2k-1.$$

Отсюда имеем, что при фиксированном наборе $c_s(t_1, \dots, t_r), t_1 + \dots + t_r \le n$, отличном от нулевого по модулю p_s, число решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{2k-}$ предыдущего сравнения не превосходит $(np_s^{r-1})^k$. Число указанных наборов $c_s(t_1, \dots, t_r), t_1 + \dots + t_r \le n$, не превосходит $2p_s^{m-1}$, поскольку можно считать, что $c_s(0, \dots, 0)$ может принимать лишь два значения 0 или 1. Таким образом, количество всех возможных наборов $\mathbf{x}_1(p_s), \mathbf{x}_3(p_s), \dots, \mathbf{x}_{2k-}(p_s)$ вычетов по модулю p_s не превосходит $2p_s^{m-1}(np_s)^k$.

Итак, для всякого набора $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{2k-}$ из B и любого $p_s, 1 \le s \le n$, найдётся $\mathbf{x}_j(p_s)$ такое, что

$$\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{x}_j(p_s) \pmod{p_s}.$$

Зафиксируем любой набор вычетов векторов

$$\mathbf{x}_j(p_s) \equiv \mathbf{a}_{p_s}, 1 \le s \le n, j = 1, 3, \ldots, 2k-1.$$

Тогда по китайской теореме найдется единственный набор векторов $\mathbf{a}_j$ по модулю $p_1 \ldots p_s$ такой, что

$$\mathbf{x}_j \equiv \mathbf{a}_j \pmod{p_1 \ldots p_n}.$$

Таким образом, число наборов векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \ldots, \mathbf{x}_{2k-1}$, входящие в класс B, не превосходит

$$U = \prod_{s=1}^{n} \left(2p_s^{m-1}(np_s^r)^k\right).$$

Поскольку для любого $1 \le s \le n$ справедливо неравенство $p_s \le 2P_1^{1/n}$, имеем

$$U \le 2^{n+n(m-1)+kn(r-1)} n^{nk} P_1^{kr-k+m-1}.$$

Так как модуль сравнения $p_1 \ldots p_n$ не превосходит P_1, то соответствующие сравнения эквивалентны равенствам

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{a}_j, j = 1, 3, \ldots, 2k-1.$$

Это означает, что число элементов в классе B не превосходит U.

Следовательно,

$$J_2 \le U^2 \le 2^{2nm+2nk(r-1)} n^{2nk} P_1^{2kr-2k+2m-2}$$

Лемма 4 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы

Проведем индукцию по параметру $\tau \ge 0$. Пусть $\tau = 0$. Тогда $\Delta(\tau) = 0$ и выполняется тривиальная оценка $J \le (P_1 \ldots P_r)^{2k}$.

Пусть, теперь, $\tau = 1$. Так как $k \ge m$, то, очевидно, имеем

$$J(\mathbf{P}; n, k, r) \le (P_1 \ldots P_r)^{2(k-m)} J(\mathbf{P}; n, m, r), \Delta(1) = m_1/n = \frac{r}{r+1}\binom{n+r}{r} = \frac{r}{r+1}m.$$

Возьмём простое число q из отрезка $[P_r, 2P_r], 1 < P_1 \le P_2 \le \cdots \le P_r \le 2P_1$. Из леммы 1 находим

$$J(\mathbf{P}; n, m, r) \le (n(n+1)^{r-1})^{2m} q^{2mr-m+1} \le (n+1)^{2mr}(4P_1)^{2mr-m+1} \le$$

$$\le 4^{2mr-m+1}(n+1)^{2mr}(P_1 \ldots P_r)^{2m} P_1^{-m+1} \le 4^{2mr-m+1}(n+1)^{2mr}(P_1 \ldots P_r)^{2m} P_1^{-\Delta(1)}.$$

Следовательно,

$$J(\mathbf{P}; n, k, r) \le D(1)(P_1 \ldots P_r)^{2k} P_1^{-\Delta(1)}.$$

Утверждение теоремы достаточно доказать при $k = m\tau$. Предположим, что утверждение справедливо при $\tau = l \ge 1$. Докажем, что оно имеет место при $\tau = l+1$. Применим лемму 4. Получим

$$J(\mathbf{P}; n, m(l+1), r) \le 2n^2(n+1)^{2rm}\binom{m(l+1)}{m}^2 p^{2rml+2mrn-m_1} J(\mathbf{Q}; n, ml, r) +$$

$$+ 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1} n^{2nm(l+1)} P_1^{2m(l+1)r-2m(l+1)+2m-2},$$

где $P_1^{1/n} \le p \le 2P_1^{1/n}, Q_s = P_s p^{-1} + 1$.

Для оценки величины $J(\mathbf{Q}; n, ml, r)$ воспользуемся предположением индукции:

$$J(\mathbf{Q}; n, ml, r) \le D_0(l)(Q_1 \ldots Q_r)^{2ml} Q_1^{-\Delta(l)}.$$

Используя эту оценку и предыдущее неравенство, находим

$$J(\mathbf{P}; n, m(l+1), r) \le W_1 + W_2,$$

где

$$W_1 = A(l+1)D_0(l)p^{2rml+2mrn-m_1}(Q_1\dots Q_r)^{2ml}Q_1^{-\Delta(l)} = A(l+1)D_0(l)R,$$

$$A(l+1) = 2n^2(n+1)^{2rm}\binom{m(l+1)}{m}^2,$$

$$W_2 \le 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1}n^{2nm(l+1)}P_1^{2m(l+1)r-2m(l+1)+2m-2}.$$

Достаточно доказать, что $W_1 \le 0,5W_0, W_2 \le 0,5W_0$, где

$$W_0 = D(l+1)(P_1\dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}, D(l+1) \ge D_0(l+1).$$

Оценим W_1. Имеем

$$R = p^{2rml+2mrn-m_1}(Q_1\dots Q_r)^{2ml}Q_1^{-\Delta(l)} = R_0B,$$

$$R_0 = p^{2mrn-m_1+\Delta(l)}(P_1\dots P_r)^{2ml}P_1^{-\Delta(l)}, B = 2^{2mr}\prod_{s=1}^{r}\left(1+pP_s^{-1}\right)^{2ml},$$

где

$$Q_s = P_sp^{-1}+1, 1 \le s \le r; P_1^{1/n} \le p \le 2P_1^{1/n}; 1 < P_1 \le P_2 \le \dots \le P_r \le 2P_1.$$

Преобразуем R_0. Находим

$$p^{2mrn-m_1+\Delta(l)} \le (2P_1)^{2mr-\frac{m_1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^l}.$$

Следовательно,

$$R_0 \le 2^{2mr}(P_1\dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l)-\frac{m_1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^l}.$$

Так как

$$\Delta(l) + \frac{m_1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^l = m_1 - m_1\left(1-\frac{1}{n}\right)^l + \frac{m_1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^l =$$

$$= m_1 - m_1\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l+1} = \Delta(l+1),$$

то

$$R_0 \le 2^{2mr}(P_1\dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}.$$

Оценим теперь величину B. Будем считать, что $P_1 \ge (2ml)^2$. В противном случае утверждение теоремы справедливо тривиально. Тогда, учитывая, что $n \ge 3, l \ge 2$, получим

$$pP_s^{-1} \le pP_1^{-1} \le 2P_1^{\frac{1}{n}-1} \le 2(2ml)^{2\left(\frac{1}{n}-1\right)} \le (2ml)^{-1}.$$

Таким образом, имеем

$$B \le 2^{mr}e^r \le 2^{r(m+2)}.$$

Собирая вместе оценки для R_0 и B, находим

$$W_1 = R_0B \le D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)}(P_1\dots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}.$$

Покажем, что

$$D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)}) \le 0,5D(l+1).$$

Действительно, имеем цепочку неравенств

$$D(l+1) \ge D_0(l+1) \ge 2D_0(l)A(l+1)2^{r(m+2)},$$

$$D_0(l) \ge 2D_0(l-1)A(l)2^{r(m+2)},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$D_0(2) \geq 2D_0(1)A(2)2^{r(m+2)}.$$

Перемножая их, получим

$$D(l+1) \geq D_0(1)\left(2n^2 2^{2rm}\right)^l \left(\binom{2m}{m}\cdots\binom{m(l+1)}{m}\right)^2 2^{lr(m+2)+r},$$

где

$$D_0(1) \geq 2n^2 2^{2rm}.$$

Поскольку из полиномиальной формулы Ньютона

$$(a_1+\cdots+a_k)^n = \sum_{\substack{t_1 \\ t_1+\cdots+t_k=n}}^{n}\cdots\sum_{t_k}^{n}\frac{n!}{t_1!\ldots t_k!}a_1^{t_1}\ldots a_k^{t_r}$$

следует неравенство

$$\frac{(m(l+1))!}{(m!)^{l+1}} \leq (l+1)^{m(l+1)},$$

получим

$$\binom{2m}{m}\cdots\binom{m(l+1)}{m} = \frac{(m(l+1))!}{(m!)^{l+1}} \leq (l+1)^{m(l+1)}.$$

Следовательно, для $D(l+1)$ выполняется неравенство

$$D(l+1) \geq D_0(l+1) \geq \left(2^{r(m+2)+1}(n+1)^{2mr}(l+1)^{2m}\right)^{l+1},$$

т.е. $W_1 \leq 0,5W_0$.

Перейдём теперь к оценке W_2. Из определения W_2 имеем равенство

$$W_2 = A_1(l+1)P_1^{2mr(l+1)-2m(l+1)+2m-2},$$

где

$$A_1(l+1) = 2^{2nm+2nm(l+1)(r-1)+1}n^{2nm(l+1)}.$$

Достаточно доказать, что $W_2 \leq 0,5W_0$, т. е.

$$A_1(l+1)P_1^{2mr(l+1)-2m(l+1)+2m-2} \leq A_1(l+1)(P_1\ldots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-2m(l+1)+2m-2} \leq$$

$$\leq 0,5D(l+1)(P_1\ldots P_r)^{2m(l+1)}P_1^{-\Delta(l+1)}.$$

Очевидно, что $A_1(l+1) \leq 0,5D(l+1)$. Утверждение будет доказано, если будет доказана справедливость неравенства

$$P_1^{-2m(l+1)+2m-2} \leq P_1^{-\Delta(l+1)},$$

т. е.

$$m_1 - m_1\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l+1} \leq 2ml+2, m_1 = \frac{rnm}{r+1}.$$

Из неравенства Бернулли получим

$$1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{l+1} \leq \frac{l+1}{n}.$$

Достаточно проверить при $l \geq 1, r \geq 2$, справедливость следующих неравенств

$$m_1\frac{l+1}{n} \leq 2ml+2, \frac{rm(l+1)}{r+1} \leq 2ml+2, \frac{2l}{l+1} \geq 1 > \frac{r}{r+1}.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Найденная в работе теорема возникла в связи с приближением гладкой функции от нескольких переменных многочленом Тейлора, который представляет собой сумму форм различных степеней, являющихся дифференциалами данной функции. Здесь рассматривается случай, когда переменные "равноправны". Другими словами, длины промежутков изменения их имеют один и тот же порядок. Для оценок сумм, подобных дзетовой, нам понадобятся суммы с "неравноправными" длинами промежутков суммирования. Соответствующая теорема о среднем нами доказана и будет опубликована в ближайшее время.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Littlewood J. E. Researches in the theory of Riemann ζ-function // Proc. London Math. Soc.(2), 1922, Том. 20, XXII-XXVIII.
2. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. 2-е изд., исправленное и дополненное — М.: Физматлит. 1980, 144 с.
3. Виноградов И. М. Новая оценка функции $\zeta(1+it)$ // Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, Том. 22, № 2, 161–164.
4. Виноградов И. М. К вопросу об оценке тригонометрических сумм // Изв. АН СССР, сер.матем., 1965, Том. 29, № 3, 493–504.
5. Чудаков Н. Г. О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$ // Докл. АН СССР, 1938, Том. 21, 425–426.
6. Titchmarsh E. C. On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$ // Quart. J. Math., 1938, Том. 9, 97–108.
7. Линник Ю. В. Новые оценки сумм Вейля // Докл. АН СССР, 1942, Том. 34, № 7.
8. Коробов Н. М., Оценки тригонометрических сумм и их приложения // Успехи матем. наук, 1958, Том. 13, № 4, 185–192.
9. Walfisz A. Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie. — VEB Deutscher Verlag der WissenSchaften: Berlin. 1963, S. 231.
10. Карацуба А. А., Коробов Н. М. О теореме о среднем // Докл. АН СССР, 1963, Том. 149, № 2.
11. Карацуба А. А. Теоремы о среднем и полные тригонометрические суммы // Изв. АН СССР, сер.матем., 1966, Том. 30, № 1.
12. Архипов Г. И. Кратные тригонометрические суммы // Докл. АН СССР, 1974, Том. 219, № 5.
13. Архипов Г. И. Избранные труды. — Орёл: Изд-во Орловского ун-та, 2013, 464 с.
14. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987, 368 с.
15. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A. Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics; 39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2004, pp. 554.
16. Чубариков В. Н. Кратные тригонометрические суммы с простыми числами // Докл. АН СССР, 1984, Том. 278, № 2, 302–304.
17. Чубариков В. Н. Оценки кратных тригонометрических сумм с простыми числами // Изв. АН СССР, сер.матем., 1985, Том. 49, № 5, 1031–1067.

REFERENCES

1. Littlewood J. E, 1922, "Researches in the theory of Riemann ζ-function", *Proc. London Math. Soc.(2)*, vol. 20, XXII-XXVIII.
2. Vinogradov I. M., 1980, *The method of trigonometric sums in the theory of numbers. 2nd Edition., correct. and supplement*, Moscow: Fizmatlit. pp. 144.

3. Vinogradov I. M., 1958, The new estimation of function $\zeta(1 + it)$" , *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 22, № 2, 161–164.

4. Vinogradov I. M., 1965, "To the question on the estimation of trigonometric sums" , *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 29, № 3, 493–504.

5. Chudakov N. G., 1938, "On functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$" , *Doklady AN SSSR*, vol. 21, 425–426.

6. Titchmarsh E. C., 1938, "On $\zeta(s)$ and $\pi(x)$" , *Quart. J. Math.*, vol. 9, 97–108.

7. Linnik J. V., 1942, "New estimation of Weyl's sums" , *Doklady AN SSSR*, vol. 34, № 7.

8. Korobov N. M., 1958, "Estimations of trigonometric sums and their applications" , *Uspehi mathem. nauk*, vol. 13, № 4, 185–192.

9. Walfisz A., 1963, "Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie" , *VEB Deutscher Verlag der WissenSchaften: Berlin*, p. 231.

10. Karatsuba A. A., Korobov N. M. 1963, "On the mean-value theorem" , *Doklady AN SSSR*, vol. 149, № 2.

11. Karatsuba A. A., 1966, "Mean-value theorem and complete trigonometric sums" , *Izvestija. AN SSSR, Ser.Mathem.*, vol. 30, № 1.

12. Arkhipov G. I., 1974, "Multiple trigonometric sums" , *Doklady AN SSSR*, vol. 219, № 5.

13. Arkhipov G. I., 2013, *Selected papers*, Orjol: Publ.House of the Orjol University, pp. 464.

14. Arkhipov G. I., Karatsuba A. A., Chubarikov V. N., 1987, *The theory of multiple trigonometric sums*, Moscow.: Nauka. Fizmatlit. 368 c.

15. Arkhipov G. I., Chubarikov V. N., Karatsuba A. A., 2004, "Trigonometric sums in number theory and analysis. De Gruyter expositions in mathematics" , *39 — Berlin, New York: Walter de Gruyter*, pp. 554.

16. Chubarikov V. N., 1984, "Multiple trigonometric sums with primes" , *Doklady AN SSSR*, vol. 278, № 2, 302–304.

17. Chubarikov V. N., 1985, "Estimates of multiple trigonometric sums with primes" , *Izvestija. AN SSSR, Ser.Matem.*, vol. 49, № 5, 1031–1067.

Получено 22.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.