ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 511.3

ОЦЕНКА СУММ ХАРАКТЕРОВ ПО СПЛОШНОМУ ПРОМЕЖУТКУ СУММИРОВАНИЯ

А. А. Копанева (г. Москва), Е. А. Бурлакова (г. Орел)

Аннотация

В статье приводится доказательство нескольких теорем. Теорема 1, для оценки сумм характеров по сплошному промежутку основано на использовании формулы А.Г. Постникова и теорема 2, для правильного выбора параметров, оценки сумм такого вида.

Ключевые слова: простое число, суммы характеров Дирихле, простые модули, сплошной промежуток суммирования, неглавный характер, оценка сумм, формула А. Г. Постникова, короткие суммы характеров, степенное понижение, тригонометрическая сумма.

EVALUATION OF CHARACTER SUMS OVER THE CONTINUOUS INTERVAL OF SUMMATION

A. A. Kopaneva (Moscow), E. A. Burlakova (Orel)

Abstract

In this paper we prove several theorems. Theorem 1, to assess the character sums over the continuous interval based on the use of the formula A. Postnikov and Theorem 2, for the right choice of parameters, estimates of this kind.

Keywords: A Prime number, the sum of Dirichlet characters, simple modules, continuous period of summation, nonprincipal character estimate of amounts formula A. G. Postnikova, short amount of characters, the exponential decrease, trigonometric sum.

Результаты полученные в статье являются прямым продолжением исследований А. Г. Постникова, связанные с применением его формулы, позволяющей выразить значение суммы характеров Дирихле по модулю равному степени простого числа, через тригонометрическую сумму специального вида. В работе А. А. Карацубы "Тригонометрические суммы специального вида и их приложения" (1964г.) такие суммы названы L-суммами. Они оценивались А. Г. Постниковым, В. Н. Чубариковым, Б. А. Турешбаевым и другими авторами. В работах тех же авторов данные оценки применялись к оценкам сумм характеров

Дирихле. Ранее авторами была доказана теорема, которая при фиксированном значении простого для характеров Дирихле по модулю равному степени простого числа дает оценку коротких сумм характеров по сдвинутым простым числам. Ранее оценки коротких сумм характеров оценивались только для простого модуля, причем они были получены в работах И. М. Виноградова "Оценка одной суммы, распространенной на простые числа арифметической прогрессии" 1966г. и А. А. Карацубы "Суммы характеров с простыми числами" (1970г.).

В теореме 2 получен результат касающийся оценок сумм характеров Дирихле и получено явное значение константы, показателя степенного понижения. Заметим, что теперь можно ставить вопрос о получении новых степенных понижений в этой оценке.

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y) = b_1(xy) + b_2(xy)^2 + ... + b_m(xy)^m$ *- многочлен с вещественными коэффециентами, где* $m = \left[\dfrac{n-1}{s}\right]$*, а числа* b_ρ *при* $\rho = 1, ..., m$ *определяются равенством* $b_\rho = a_\rho Q^{s\rho - n + 1}$*, где* Q *- фиксированное простое,* $(a_\rho, Q) = 1$*. Тогда для суммы* S *вида*

$$\Sigma = \sum_{x=1}^{P}\sum_{y=1}^{P} e^{2\pi i f(xy)}$$

при достаточно больших $m > m_0$ *имеет место следующая оценка*

$$\Sigma \ll P^{2-\Delta}$$

где $\Delta > \dfrac{0,95 - f(z)}{12,7m^2}$*. Здесь предполагается выполнение следующих дополнительных условий:*

1) $f(z) = 1 - \dfrac{2}{z+1} + \dfrac{3}{2z+1} - \dfrac{1}{(z+1)^2} + \dfrac{2}{(2z+1)^2}$,

2) $z = \eta m \in [z_1, z_2]$*, где* $0 < z_1 < z_2$ *- некоторые постоянные,*

3) $\eta = \dfrac{\ln P}{(n-1)\ln Q}$

Лемма 1. **(Лемма Постникова)**. *Пусть* $k = Q^n, Q \geqslant 3$ *- простое число,* s *и* m *- натуральные числа, причем* $s \leqslant n-1, n-s \leqslant sm < n+s-1$*,* $ind\nu$ *- индекс числа* ν *по модулю* k*.*

Тогда

$$\frac{ind(1+Q^S u)}{Q-1} \equiv a_1 Q^s u + \frac{1}{2}a_2(Q^s u)^2 + ... + \frac{1}{m}a_m(Q^s u)^m (\mathrm{mod} Q^{n-1}),$$

где $(a_1, Q) = (a_2, Q) = ... = (a_m, Q) = 1$ *и число* $\nu^{-1}(\mathrm{mod} Q^{n-1})$ *определяется из сравнения* $\nu\nu_1 \equiv 1(\mathrm{mod} Q^{n-1})$*.*

Доказательство. Доказательство леммы см. [1].

Применение теоремы 1 для оценки сумм характеров по сплошному промежутку основано на использовании формулы А.Г. Постникова сформулированного в лемме. Для этого необходимо произвести правильный выбор параметров. Оценке сумм такого вида посвящена следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть χ - неглавный характер по модулю $q = Q^n$, где Q - фиксированное простое число и $q \to \infty$. Рассмотрим сумму $W = \sum\limits_{y \leqslant N_0} \chi(y+a)$, где $(a, Q) = 1$ и $N_0 < Q^n$. Тогда справедлива оценка $|W| \ll N_0^{1-\Delta_0}$, где $\Delta_0 = c_5\varphi^{-2}$, $\varphi = \dfrac{\ln Q^{n-1}}{\ln N_0}$, $c_5 = 0,000151...$ - положительная постоянная и $\varphi > \varphi_0$ достаточно велико.*

Доказательство.

Все значения, которые принимает переменная суммирования y, разобьем на прогрессии по модулю Q^s , где s - натуральное число, удовлетворяющее условию $Q^s \leqslant N_0$. Тогда сумма W будет представлена в виде отдельных сумм W_0 по этим прогрессиям в количестве Q^s.

Каждая из указанных сумм W_0 имеет вид
$W_0 = \sum\limits_{t \ll N} \chi(Q^s t + a' + a)$, где $N_1 = |N_0 Q^{-s}|, a'$ - некоторое фиксированное число из промежутка $[1, Q^s]$. Если при этом оказывается, что $a' + a$ делится на Q, то сумма $W_0 = 0$, поэтому достаточно ограничиться оценкой сумм W_0 вида $W_0 = \sum\limits_{t \ll N_1} \chi(Q^s t + a)$, где $(a, Q) = 1$.

Сумму W_0 сравним с суммой $W_1(xy)$ вида

$$W_1(xy) = \sum_{t=1}^{N_1} \chi(a + Q^s(t + xy)) = \sum_{t=1}^{N_1} \chi(a(t) + Q^s xy),$$

где $1 \leqslant x, y \leqslant P$ и число $P > 1$ - произвольное, а $(a(t), Q) = 1$

Поскольку $|\chi(h)| \leqslant 1$ при любом h, то

$$|W_0 - W_1(xy)| \leqslant \left| \sum_{t=1}^{xy} \chi(a + Q^s t) - \sum_{t=N_1+1}^{N_1+xy} \chi(a + Q^s t) \right| \leqslant 2xy \leqslant 2P^2$$

Если в качестве P выбрать значение $P = N_1^{0,5} \cdot N_0^{-0,5\Delta_0}$, то получим равенство

$$W_0 = W_1(xy) + O(N_1 N_0^{-\Delta_0}).$$

Суммируя последнее равенство по xy с условием $1 \leqslant x, y \leqslant P$, получим

$$P^2 W_0 = \sum_{x=1}^{P} \sum_{y}^{P} \sum_{t=1}^{N_1} \chi(a(t) + Q^s xy) + O(P^2 N_1 N_0^{-\Delta_0}) \ll$$

$$\ll N_1\left|\sum_{\substack{x=1\\y=1}}^{P}\chi(a_0+Q^sxy)\right|+P^2N_0^{-\Delta_0}$$

Здесь число a_0 в последней сумме равно одному из значений $a(t)$ и удовлетворяет условию $(a_0,Q)=1$.

Значение характера $\chi(a_0+Q^sxy)$ выразим через тригонометрическую сумму по формуле А. Г. Постникова (лемма). Тогда, при некотором b_0 с условием $a_0b_0\equiv 1(\mathrm{mod}Q)$ получим:

$$\chi(a_0+Q^sxy)=\chi_0(a_0)\chi(1+Q^sb_0xy)=e^{2\pi i\dfrac{ind(1+Q^sb_0xy)}{Q^{n-1}(Q-1)}}=$$

$$=\chi_0e^{2\pi i\left(a_1Q^sb_0xy+\frac{1}{2}a_2(Q^sb_0xy)^2+\ldots+\frac{1}{m}a_m(Q^sb_0xy)^m\right)\cdot Q^{1-n}},$$

где $m=\left[\dfrac{n-1}{s}\right]$.

Отсюда для $b_1,...,b_m$, удовлетворяющих равенствам $b_\rho=a_\rho Q^{s\rho-n+1}$ с условием $(a_\rho,Q)=1$ будем иметь

$$P^2W_0\ll N_1\Sigma+P^2N_0^{1-\Delta_0},\text{причем}$$

$$\Sigma=\sum_{x=1}^{P}\sum_{y=1}^{P}e^{2\pi if(xy)},\,f(xy)=b_1xy+b_2(xy)^2+...+b_m(xy)^m.$$

К оценке суммы Σ можно применить утверждение теоремы 1, если только за счет выбора значения параметра s обеспечить выполнение условия $z=\eta m\in[z_1,z_2]$, где $\eta=\dfrac{\ln P}{\ln Q^{n-1}}$. Тогда получим:

$$S\ll P^{2-\Delta_0},$$

где $\Delta_0>\dfrac{0,95-f(z)}{12,7m^2}$

Подстановка этой оценки в последнее равенство для суммы W_0 приводит к следующему результату:

$$P^2W_0\ll N_1P^{1-\Delta}+P^2N_1N_0^{-\Delta_0},$$

$$W_1\ll N_1P^{-\Delta}+N_1N_0^{-\Delta_0}.$$

Займемся теперь набором значений параметров P,s с таким расчетом, чтобы значение константы c_5 сделать как можно большим.

Положим $s=\left[\dfrac{n-1}{5\varphi}\right]$. Тогда $m=\left[\dfrac{n-1}{s}\right]+\theta_1$, где $0\leqslant\theta_1<1$, откуда $m=\left[\dfrac{n-1}{\left[\dfrac{n-1}{5\varphi}\right]}\right]=\left[\dfrac{n-1}{\dfrac{n-1}{5\varphi}-\theta}\right]=\left[5\varphi\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{5\varphi}{n-1}}\right]=5\varphi-\theta_2$, где $0\leqslant\theta_2<1$, если только n достаточно велико, так как при достаточно малом ε имем, $[5\varphi(1+\varepsilon)]$ равна 5φ при целом 5φ и равна $[5\varphi]$, если 5φ - нецелое.

Значение параметров N_1, тогда, будут удовлетворять следующим условиям:

$$N_1 = [N_0 Q^{-s}], P = N_1^{0,5} N_0^{-0,5\Delta_0} = Q^{-0,5s} N_0^{0,5-0,5\Delta_0} + \theta_3, \text{где } 0 \leqslant \theta_3 < 1$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{\varphi} = \dfrac{\ln N_0}{\ln Q^{n-1}}$ получим

$$\eta = \frac{\ln P}{\ln Q^{n-1}} = \frac{-0,5s\ln Q}{(n-1)\ln Q} + \frac{0,5(1-\Delta_0)}{\varphi} + O\left(\frac{1}{P}\right) = -\frac{1}{2m} + \frac{1-\Delta_0}{2\varphi} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Далее,

$$z = \eta m = \frac{m(1-\Delta_0)}{2\omega} - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{m^3}\right) = \frac{5}{2}(1-\Delta_0) - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) = \\ = 2\varphi - \frac{\Delta_0}{2} + O\left(\frac{1}{\varphi^3}\right).$$

Так величина η имеет порядок m^{-1}, порядок величины φ и m одинаков. Кроме того, по условию теоремы порядок величины Δ_0 равен φ^{-2}. Следовательно $z = 2 + O(\varphi^{-2})$. Подставим указанные значения параметров m и z в последнее неравенство для Δ_0. Тогда получим:

$$\Delta_0 > \frac{0,95 - f(z)}{12,7m^2} = \frac{0,95 - f(2+O(\varphi^{-2}))}{12,7(5\varphi-\theta_2)^2} = \frac{0,95 - f(2)}{12.7\cdot 25\varphi^2} + O\left(\frac{1}{\varphi^3}\right) > \\ > \frac{0,95 - 0,902}{12,7\cdot 25\varphi^2} = \frac{0,048...}{317,5\varphi^2} = 0,000151...\varphi^{-2}$$

если только $\varphi > \varphi_0$ достаточно велико.
Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 240 с.

2. Постников А. Г. Избранные труды / под ред. В. Н. Чубарикова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 512 с.

Московский государственный университет технологий и управления
Государственный университет — учебно-научно-производственный комплекс, г. Орел
Поступило 23.05.2013