

УДК 511.361

О ПРИБЛИЖЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

П. Л. Иванков (г. Москва)

Аннотация

В работе рассматриваются некоторые гипергеометрические функции при специальном соотношении между их параметрами. Получены оценки снизу модулей линейных форм от значений таких функций. Обычно для получения подобных оценок используют метод Зигеля, см. [1], [2], [3, гл. 3]. При применении этого метода рассуждения начинаются с построения при помощи принципа Дирихле линейной приближающей формы, имеющей достаточно большой порядок нуля в начале координат. Используя систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют рассматриваемые функции, строят затем совокупность таких форм, причем определитель, составленный из их коэффициентов, не должен быть тождественным нулем. Дальнейшие шаги состоят в переходе к числовым линейным формам и к доказательству интересующих исследователя утверждений: доказывается линейная независимость значений рассматриваемых функций или устанавливаются соответствующие количественные результаты. С помощью метода Зигеля доказаны достаточно общие теоремы, касающиеся арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций, причем кроме упомянутой выше линейной независимости во многих случаях установлена также трансцендентность и алгебраическая независимость значений таких функций. Однако использование принципа Дирихле на начальном этапе ограничивает возможности метода. Его непосредственное применение возможно лишь для гипергеометрических функций с рациональными параметрами. Следует отметить также недостаточную точность получаемых этим методом количественных результатов. В связи с вышесказанным был разработан некоторый аналог метода Зигеля (см. [4]), с помощью которого в ряде случаев удалось исследовать арифметическую природу значений гипергеометрических функций также и с иррациональными параметрами.

Еще раньше, однако, стали применяться методы, основанные на эффективном построении линейной приближающей формы. С помощью таких построений была исследована арифметическая природа классических констант и были получены соответствующие количественные результаты, см., например, [5, гл. 1]. В дальнейшем выяснилось, что эффективные методы применимы и при исследовании обобщенных гипергеометрических функций. Были получены, в частности, явные формулы для коэффициентов линейных приближающих форм. В ряде случаев эти формулы позволяют реализовать схему метода Зигеля и для гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Если в приведенной ниже формуле (1) многочлен $a(x)$ тождественно равен единице, то полученные эффективным методом результаты носят довольно общий характер, и здесь дальнейшее развитие этого метода наталкивается на трудности принципиального характера. Если же $a(x) \neq 1$, то возможности эффективного метода еще не исчерпаны: результаты, полученные на сегодняшний день, могут быть обобщены и улучшены.

В теоремах, доказанных в настоящей работе, устанавливаются новые качественные и количественные результаты для некоторых гипергеометрических функций, у которых $a(x) = x + \alpha$, и многочлен $b(x)$ из (1) имеет специальный вид. Рассматривается случай иррациональных параметров, однако используемые соображения позволяют, по-видимому, получить новые результаты для таких функций и в случае рациональных параметров.

Ключевые слова: обобщенные гипергеометрические функции, иррациональные параметры, оценки линейных форм.

Библиография: 15 названий.

ON APPROXIMATION OF THE VALUES OF SOME HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS WITH IRRATIONAL PARAMETERS

P. L. Ivankov (Moscow)

Abstract

In this paper we consider some hypergeometric functions whose parameters are connected in a special way. Lower estimates of the moduli of linear forms in the values of such functions have been obtained. Usually for the achievement of such estimates one makes use of Siegel's method; see [1], [2], [3, chapt. 3]. In this method the reasoning begins with the construction by means of Dirichlet principle of the linear approximating form having a sufficiently large order of zero at the origin of coordinates. Employing the system of differential equations, the functions under consideration satisfy, one constructs then a set of forms such that the determinant composed of the coefficients of the forms belonging to this set must not be equal to zero identically. Further steps consist of constructing a set of numerical forms and of proving of the interesting for the researcher assertions: linear independence of the values of the functions under consideration can be proved or corresponding quantitative results can be obtained. By means of Siegel's method have been proved sufficiently general theorems concerning the arithmetic nature of the values of the generalized hypergeometric functions and in addition to aforementioned linear independence in many cases was established the transcendence and algebraic independence of the values of such functions. But the employment of Dirichlet principle at the first step of reasoning restricts the possibilities of the method. Its direct employment is possible in the case of hypergeometric functions with rational parameters only. It must be taken into consideration also the insufficient accuracy of the quantitative results that can be obtained by this method. As a consequence of these facts some analogue of Siegel's method has been developed (see [4]) by means of which it became possible in some cases to investigate the arithmetic nature of the values of hypergeometric functions with irrational parameters also.

But yet earlier one had begun to apply methods based on effective construction of linear approximating form. By means of such constructions the arithmetic nature of some classic constants was investigated and corresponding quantitative results were obtained, see for example [5, chapt. 1]. Subsequently it turned out that effective methods can be applied also for the investigation of generalized hypergeometric functions. Explicit formulae for the coefficients of the linear approximating forms were obtained. In some cases these formulae make it possible to realize Siegel method scheme also for the hypergeometric functions with irrational parameters. If in (1) polynomial $a(x)$ is equal to unity identically then the results obtained by effective method are of sufficiently general nature and in this case further development of this method meets the obstacles of principal character. In case $a(x) \neq 1$, however, the possibilities of effective method are not yet exhausted and the latest results can be generalized and improved.

In the theorems proved in the present paper new qualitative and quantitative results are obtained for some hypergeometric functions with $a(x) = x + \alpha$ and polynomial $b(x)$ from (1) of special character. The case of irrational parameters is under consideration but the ideas we use will apparently make it possible in the future to obtain new results in case of rational parameters also.

Keywords: generalized hypergeometric functions, irrational parameters, estimates of linear forms.

Bibliography: 15 titles.

1. Введение

Рассмотрим обобщенную гипергеометрическую функцию вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \quad (1)$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — некоторые многочлены, старшие коэффициенты которых равны единице. В первой из рассматриваемых ниже теорем $a(x) = x + \alpha$ и $b(x) = x(x + 2\alpha + 1)$. При этом мы получаем функцию Куммера специального вида. Значения функции Куммера изучались во многих работах; см., например, [6], [7], [8]. Нетрудно убедиться, однако, что теорема 1 не вытекает непосредственно из результатов перечисленных работ; это же замечание справедливо и в отношении теоремы 2, в которой рассматривается функция более общего вида.

2. Результаты

Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле, и пусть $\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$. Рассмотрим при $j = 1, 2$ функции

$$A_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\alpha + x}{x(2\alpha + 1 + x)}. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть ξ — ненулевое число из поля $\mathbb{I}$, и пусть h_1, h_2 — нетривиальный набор целых чисел из $\mathbb{I}$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ существует число $H_0 = H_0(\epsilon)$ такое, что при $H = \max(|h_1|, |h_2|) > H_0$ выполняется неравенство

$$|h_1 A_1(\xi) + h_2 A_2(\xi)| > H^{-3-\epsilon}.$$

Определим при $j = 1, 2, 3$ функции

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_j(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\alpha + x}{x(\beta + x)(2\alpha + 1 + x)},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$, $\beta - \alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\chi_1(\nu) = 1, \chi_2(\nu) = \nu, \chi_3(\nu) = \nu(\nu + 2\alpha + 1). \quad (3)$$

Тогда справедлива такая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\xi \in \mathbb{I}$ — ненулевое число, и пусть h_1, h_2, h_3 — нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$. Тогда при любом $\epsilon > 0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{j=1}^3 h_j F_j(\xi) \right| > H^{-5-\epsilon}.$$

В последнем неравенстве $H = \max(|h_1|, |h_2|, |h_3|)$, причем, как и в предыдущей теореме, $H > H_0(\epsilon)$.

Пусть

$$P_{lj}(z) = \sum_{s=0}^n p_{ljs} z^s, \quad l, j = 1, 2, \quad (4)$$

— многочлены с неопределенными коэффициентами, и пусть

$$R_l(z) = \sum_{j=1}^2 P_{lj}(z) A_j(z). \quad (5)$$

Запишем и преобразуем выражение для коэффициента $c_{l\nu}$ при z^ν в разложении по степеням z функции $R_l(z)$. Имеем

$$c_{l\nu} = \sum_{s=0}^{\min(n,\nu)} \sum_{j=1}^2 p_{ljs}(\nu-s)^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{\alpha+x}{x(2\alpha+1+x)} = D_{\nu n} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(2\alpha+1+x)} \times \\ \times \sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^2 p_{ljs}(\nu-s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu-x)(\nu+2\alpha+1-x) \prod_{x=1}^{n-s} (\nu+\alpha-n+x), \quad (6)$$

где

$$D_{\nu n} = \begin{cases} \prod_{x=1}^{\nu-n} (\alpha+x), & \text{если } \nu \geq n, \\ \prod_{x=0}^{n-\nu-1} \frac{1}{\alpha-x}, & \text{если } 0 \leq \nu < n. \end{cases}$$

Верхний индекс суммирования $\min(n, \nu)$ в правой части (6) можно заменить на n ввиду наличия под знаком произведения множителя $\nu-x$.

Подберем теперь коэффициенты многочленов (5) так, чтобы тождественно по ν при $l = 1, 2$ выполнялось равенство

$$\sum_{s=0}^n \sum_{j=1}^2 p_{ljs}(\nu-s)^{j-1} \prod_{x=0}^{s-1} (\nu-x)(\nu+2\alpha+1-x) \prod_{x=1}^{n-s} (\nu+\alpha-n+x) = Q_l(\nu), \quad (7)$$

где

$$Q_l(\nu) = \prod_{x=0}^{2n+l-2} (\nu-x) \quad (8)$$

В работах [9] и [6] показано, что для этого следует положить

$$p_{ljs} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_{js}(\zeta) Q_l(\zeta) d\zeta}{\chi_{j+1}(\zeta-s) \prod_{x=0}^{s-1} (\zeta-x)(\zeta+2\alpha+1-x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta+\alpha-n+x)}. \quad (9)$$

В последнем выражении

$$K_{js}(\zeta) = \begin{cases} 1, & \text{если } j=1 \text{ и } s=0, \text{ или если } j=2, s=0, 1, \dots, n, \\ \frac{\alpha+1}{\zeta+\alpha-s+1}, & \text{если } j=1, s=1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

и простой замкнутый положительно ориентированный кусочно гладкий контур Γ охватывает все нули многочлена $\phi_1(\zeta) = \prod_{x=0}^n (\zeta-x)(\zeta+2\alpha+1-x)$, а все нули многочлена

$$\phi_2(\zeta) = \prod_{x=1}^n (\zeta+\alpha-n+x)$$

лежат в его внешности. Существование контура Γ обеспечивается условием $\alpha \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}$; многочлены $\chi_2(\zeta)$ и $\chi_3(\zeta)$ определены равенствами (3).

ЛЕММА 1. При указанном выше выборе коэффициентов многочленов (4) справедливы соотношения

$$\deg P_{11}(z) = \deg P_{22}(z) = n, \quad \deg P_{12}(z) < n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для коэффициента p_{11n} имеем

$$p_{11n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\alpha + 1) \prod_{x=0}^{2n-1} (\zeta - x)}{(\zeta - n)(\zeta + \alpha - n + 1) \prod_{x=0}^{n-1} (\zeta - x)(\zeta + 2\alpha + 1 - x)} d\zeta.$$

Последний интеграл запишем в виде разности двух интегралов по положительно ориентированным окружностям Γ_1 и γ , первая из которых охватывает все полюсы подынтегральной функции, а вторая содержит лишь полюс $\zeta = -\alpha + n - 1$. Интеграл по окружности Γ_1 равен нулю, т.к. степень знаменателя на две единицы больше степени числителя, а интеграл по окружности γ отличен от нуля, что проверяется непосредственным вычислением. Мы видим, что равенство $\deg P_{11}(z) = n$ справедливо. Аналогично можно проверить и другие утверждения леммы. Лемма доказана.

Общим знаменателем некоторого множества чисел $X \subset \mathbb{I}$ будем называть такое отличное от нуля целое число $g \in \mathbb{I}$, что $gx \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ для любого $x \in X$. Наименьший по модулю общий знаменатель некоторого множества чисел будем называть наименьшим общим знаменателем этого множества. Через $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие от α и от поля $\mathbb{I}$.

ЛЕММА 2. Модуль общего наименьшего знаменателя коэффициентов (9) многочленов (4) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_1 n} (n!)^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $j = 2$, $s = 0, 1, \dots, n$. Тогда в соответствии с (9) имеем

$$\begin{aligned} p_{l2s} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{Q_l(\zeta) d\zeta}{\prod_{x=0}^s (\zeta - x)(\zeta + 2\alpha + 1 - x) \prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \alpha - n + x)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_1} - \sum_{\mu=1}^{n-s} \int_{|\zeta + \alpha - n + \mu| = \frac{1}{2}} \right), \quad (10) \end{aligned}$$

где окружность Γ_1 определяется так же, как и при доказательстве предыдущей леммы, а все окружности $|\zeta + \alpha - n + \mu| = \frac{1}{2}$ ориентированы положительно. Если записать интеграл по окружности Γ_1 с помощью вычета подынтегральной функции относительно бесконечно удаленной точки, то станет ясно, что модуль общего наименьшего знаменателя таких интегралов (при $s = 0, 1, \dots, n$) оценивается сверху величиной $e^{\gamma_2 n}$. Далее, при $1 \leq \mu \leq n - s$ имеем для интеграла по соответствующей окружности

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta + \alpha - n + \mu| = \frac{1}{2}} &= \frac{(-1)^{\mu-1} \prod_{x=s+1}^{2n+l-2} (-\alpha + n - \mu - x)}{\prod_{x=0}^s (\alpha + 1 + n - \mu - x)(\mu - 1)!(n - s - \mu)!} = \\ &= \frac{(-1)^{\mu+l-s-1} \prod_{x=s+1}^{2n+l-2} (\alpha + \mu + x - n)}{\prod_{x=0}^s (\alpha + 1 + n - \mu - x)(\mu - 1)!(n - s - \mu)!}. \quad (11) \end{aligned}$$

Мы видим, что произведение $\prod_{x=0}^s (\alpha + n - \mu - x)$ в знаменателе полностью сокращается, а для того, что останется оценка общего наименьшего знаменателя (при $s = 0, 1, \dots, n$, $\mu = 1, \dots, n - s$) хорошо известна: такая оценка получена в нескольких работах; см., например, [10], [11], [12]. Для доказательства теоремы 1 достаточно оценки вида $(n!)^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, однако в последней из упомянутых работ получена более точная оценка, которая и фигурирует в рассматриваемой лемме. Мы видим, что при $j = 2$ лемма справедлива; случай $j = 1$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

С помощью несложной вычислительной процедуры, опирающейся на (9) и (4), можно получить такие оценки

$$|p_{ljs}| \leq \frac{n!}{s!} e^{\gamma_3 n}, \quad |P_{lj}(\xi)| \leq n! e^{\gamma_3 n}, \quad l, j = 1, 2, \quad s = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

Из (6), (7) и (8) следует равенство

$$c_{l\nu} = D_{\nu n} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(2\alpha+1+x)} \prod_{x=0}^{2n+l-2} (\nu-x),$$

которое показывает, что

$$c_{l\nu} = 0, \quad l = 1, 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n+l-2. \quad (13)$$

С учетом оценок (12) получаем отсюда такое неравенство

$$|R_l(\xi)| \leq (n!)^{-1} e^{\gamma_4 n}. \quad (14)$$

Здесь константа γ_4 может зависеть также и от ξ .

Теперь все готово для доказательства первой теоремы. Составим определитель

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} P_{11}(z) & P_{12}(z) \\ P_{21}(z) & P_{22}(z) \end{vmatrix}.$$

Порядок нуля этого определителя при $z = 0$ равен $2n$; это вытекает из (13): достаточно записать $\Delta(z)$ в виде

$$\Delta(z) = \frac{1}{A_1(z)} \begin{vmatrix} R_1(z) & P_{12}(z) \\ R_2(z) & P_{22}(z) \end{vmatrix}. \quad (15)$$

С другой стороны, из леммы 1 следует, что степень $\Delta(z)$ также равна $2n$. Поэтому $\Delta(z) = Cz^{2n}$, $C \neq 0$. Рассмотрим числовой определитель $\Delta(\xi)$. Из вышесказанного ясно, что $\Delta(\xi) \neq 0$, и одну из строк этого определителя можно заменить на строку (h_1, h_2) так, чтобы получившийся при этом определитель (обозначим его через δ) был отличен от нуля. Из леммы 2 следует оценка снизу модуля δ :

$$|\delta| > (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\gamma_5 n}.$$

Оценку сверху для $|\delta|$ можно получить с помощью (12) и (14):

$$|\delta| < |l|n! e^{\gamma_3 n} + H(n!)^{-1} e^{\gamma_4 n}, \quad (16)$$

где $l = h_1 A_1(\xi) + h_2 A_2(\xi)$. Для получения последней оценки следует записать δ в виде, аналогичном (15). Если, например, мы заменили первую строку определителя $\Delta(\xi)$ на строку (h_1, h_2) , а из чисел $A_1(\xi)$ и $A_2(\xi)$ второе оказалось отличным от нуля, то мы имеем равенство

$$\delta = \frac{1}{A_2(\xi)} \begin{vmatrix} h_1 & l \\ P_{21}(\xi) & R_2(\xi) \end{vmatrix},$$

из которого легко следует (16). Заметим, что одновременное выполнение равенств $A_1(\xi) = 0$ и $A_2(\xi) = 0$ противоречит теореме о единственности решения задачи Коши из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (функции $A_1(z)$ и $A_2(z)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению, см. [3, гл. 5 § 1]). Комбинируя оценки модуля δ сверху и снизу, можно завершить доказательство теоремы 1. Соответствующее рассуждение является стандартным и мы его не приводим (см., например, [3, гл. 11, § 2], а также [13] и [14]).

Вторая теорема доказывается аналогично. Здесь также строится система линейно независимых приближающих форм вида

$$\sum_{j=1}^3 P_j(z) F_j(z) = R(z), \quad P_j(z) = \sum_{s=0}^n p_{js} z^s.$$

Для получения приближающей формы $R(z)$ с максимально возможным порядком нуля при $z = 0$ следует по аналогии с (9) положить

$$p_{js} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{K_{js}(\zeta) \prod_{x=0}^{3n+1} (\zeta - x)}{\chi_{j+1}(\zeta - s) \prod_{x=0}^{s-1} (\zeta - x) (\zeta + \beta - x) (\zeta + 2\alpha + 1 - x)} \times \\ \times \frac{d\zeta}{\prod_{x=1}^{n-s} (\zeta + \alpha - n + x)}, \quad (17)$$

где $\chi_4(\zeta) = \zeta(\zeta + 2\alpha + 1)(\zeta + \beta)$. Варьируя степень многочлена $\prod_{x=0}^{3n+1} (\zeta - x)$ в числителе подынтегрального выражения из правой части (17), можно получить совокупность линейно независимых функциональных приближающих форм.

Основным моментом доказательства является получение оценки общего наименьшего знаменателя коэффициентов p_{js} . Для этого, как и выше, следует записать интеграл из (17) в виде разности

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_1} - \sum_{\mu=1}^{n-s} \int_{|\zeta + \alpha - n + \mu| = \frac{1}{2}} \right),$$

Как и в случае (11) приведение $\prod_{x=0}^s (\alpha + n - \mu - x)$ сокращается и оценка общего наименьшего знаменателя получается из тех же соображений, что и при доказательстве леммы 2. Решающим обстоятельством при этом является рациональность разности $\beta - \alpha$. Окончательная оценка имеет вид, указанный в упомянутой лемме (при этом присутствующая в оценке константа может зависеть также и от β). В остальном доказательство теоремы 2 лишь незначительными техническими деталями отличается от доказательства первой теоремы.

3. Заключение

Полученные в настоящей работе результаты можно обобщать в различных направлениях. Можно заменить $x + 2\alpha + 1$ в знаменателе из правой части (1) специально подобранным многочленом так, чтобы произошло сокращение в числителе и знаменателе, как это случилось в последнем выражении из (11). Можно попробовать уточнить оценки линейных форм в случае рационального α в более общем случае по сравнению с разобранным в работе [15]. Любопытно отметить, что среди многочисленных теорем, опубликованных по поводу арифметических свойств значений функций вида (1) и ее производных, по-видимому нет ни одной, в которой была бы доказана линейная независимость упомянутых значений в предположении, что многочлен $a(x)$ имеет более одного иррационального корня.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Siegel C. L. Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1929–1930. №1. S. 1–70.
2. Siegel C. L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949.

3. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987. 447 с.
4. Галочкин А. И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестник Московского университета. Математика, механика. 1986, №2. С. 30–34.
5. Фельдман Н. И. Седьмая проблема Гильберта. М.: Издательство Московского университета, 1982. 312 с.
6. Иванков П. Л. Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера // Математические заметки. 1991. Т. 49, выпуск 2. С. 55–63.
7. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений функций Куммера // Сибирский математический журнал. 1979. Т. 12, №5. С. 961–982.
8. Иванков П. Л. О линейной независимости значений некоторых функций // Фундаментальная и прикладная математика. 1995 Т. 1, выпуск 1. С. 191–206.
9. Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. Т. 182, №2. 1991. С. 283–302.
10. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский математический журнал. 1976. Т. XVII, №6. С. 1220–35.
11. Галочкин А. И. О некоторых арифметических свойствах коэффициентов функции Куммера // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, №6. С. 27–32.
12. Иванков П. Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11, №6. С. 65–72.
13. Галочкин А. И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций // Математические заметки. 1970. Т. 8, №1. С. 19–28.
14. Галочкин А. И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. 1978, №6. С. 25–32.
15. Иванков П. Л. О вычислении постоянных, входящих в оценки линейных форм // Известия вузов. Математика. 2000, №1(452). С. 31–36.

REFERENCES

1. Siegel, C. L. 1929-1930, "Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen", *Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, no. 1. pp. 1–70.
2. Siegel, C. L. 1949, *Transcendental numbers*, Princeton University Press, Princeton.
3. Shidlovskii, A. B. 1987, *Transtsendentnye chisla* [Transcendental numbers] Nauka, Moscow, 447 pp. (Russian)
4. Galochkin, A. I. 1986, "An analogue of Siegel's method", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (Moscow Univ. Math. Bulletin)*, no. 2, pp. 30–34. (Russian)
5. Fel'dman, N. I. 1982, *Sed'maya problema Gil'berta*. [Hilbert's seventh problem] Moskov. Gos. Univ., Moscow, 312 pp. (Russian)

6. Ivankov, P. L. 1991, "Lower estimates of the linear forms in the values of Kummer's function", *Mat. Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 49, no. 2, pp. 55–63. (Russian)
7. Belogrivov, I. I. 1979 "On transcendence and algebraic independence of the values of Kummer's function", *Sibirsk. Mat. Zh. (Siberian Mathematical Journal)*, vol. 12, no. 5, pp. 961–982. (Russian)
8. Ivankov, P. L. 1995, "On the linear independence of the values of some functions", *Fundam. Prikl. Mat. (Journal of Mathematical Sciences (New York))*, vol. 1, no. 1, pp. 191–206. (Russian)
9. Ivankov, P. L. 1991, "On the arithmetic properties of the values of hypergeometric functions", *Matematicheskii sbornik (Sbornik: Mathematics)*, vol. 182, no. 2, pp. 283–302. (Russian)
10. Galochkin, A. I. 1976, "On arithmetic properties of the values of certain entire hypergeometric functions", *Sibirsk. Mat. Zhurnal (Siberian Mathematical Journal)*, vol. 17, no 6, pp. 1220–1235. (Russian)
11. Galochkin, A. I. 2005, "On some arithmetic properties of the coefficients of Kummer's function", *Fundam. Prikl. Mat. (Journal of Mathematical Sciences (New York))*, vol. 11, no. 6, pp. 27–32. (Russian)
12. Ivankov, P. L. 2005, "On the values of hypergeometric functions with different irrational parameters", *Fundam. Prikl. Mat. (Journal of Mathematical Sciences (New York))*, vol. 11, no. 6, pp. 65–72. (Russian)
13. Galochkin, A. I. 1970, "Lower estimates of the linear forms in the values of some hypergeometric functions", *Mat. Zametki (Mathematical Notes)*, vol. 8, no. 1, pp. 19–28. (Russian)
14. Galochkin, A. I. 1978, "On diophantine approximations of the values of some entire functions with algebraic coefficients. I", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (Moscow Univ. Math. Bulletin)*, no. 6, pp. 25–32. (Russian)
15. Ivankov, P. L. 2000, "On the calculation of the constants involved in the estimates of linear forms", *Izvestija vuzov. Mat. (Russian Mathematics (Izvestija VUZ. Matematika))*, no. 1(452), pp. 31–36. (Russian)

Московский Государственный Технический Университет имени Н. Э. Баумана.

Получено 15.12.2015 г.

Принято в печать 10.03.2016 г.