ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-310-321

Определение поля смещений в неоднородном покрытии упругой пластины при прохождении через неё плоской звуковой волны¹

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен

Толоконников Лев Алексеевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Нгуен Тхи Шанг — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Аннотация

В статье рассматривается краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, построенная для определения поля смещений в непрерывно-неоднородном упругом покрытии пластины при прохождении через неё плоской звуковой волны.

Полагается, что однородная изотропная упругая пластина с неоднородным по толщине упругим покрытием граничит с идеальными жидкостями.

Методом степенных рядов получено приближенное аналитическое решение краевой задачи. Краевая задача сведена к задачам с начальными условиями. Решение краевой задачи представлено в виде линейной комбинации фундаментальных решений. Найденное аналитическое решение краевой задачи справедливо для широкого класса законов неоднородности материала покрытия.

Проведены численные расчеты зависимостей компонентов вектора смещения на границах покрытия от угла падения плоской волны.

Ключевые слова: краевая задача, поле смещений, отражение и прохождение звуковых волн, однородная упругая пластина, непрерывно-неоднородное покрытие.

Библиография: 15 названий.

Для цитирования:

Л. А. Толоконников, Т. Ш. Нгуен. Определение поля смещений в неоднородном покрытии упругой пластины при прохождении через неё плоской звуковой волны // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 310–321.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 539.3:534.26

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-310-321

**Determination of the displacement field
in an inhomogeneous coating of an elastic plate
when passing through her plane sound wave**

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen

Tolokonnikov Lev Alexeevich — doctor of physical and mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: tolokonnikovla@mail.ru

Nguyen Thi Sang — undergraduate department of of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: nguyensangnb@gmail.com

Abstract

The article considers a boundary value problem for a system of linear second-order ordinary differential equations constructed for determining the displacement field in a continuously inhomogeneous elastic coating of the plate when a plane sound wave passes through.

It is believed that a homogeneous isotropic elastic plate with inhomogeneous in thickness elastic coating borders on ideal liquids.

An approximate analytical solution of the boundary value problem by the power series method is obtained. The boundary-value problem is reduced to problems with initial conditions. The solution of the boundary value problem is presented in the form of a linear combination of fundamental decisions. Found analytical solution boundary value problem is valid for a wide class of heterogeneity laws of the coating material.

The numerical calculations of the dependences of the components of the displacement vector at the boundaries of the coating from the angle of incidence of the plane wave are presented.

Keywords: boundary-value problem, displacement field, reflection and transmission of sound waves, homogeneous elastic plate, continuously inhomogeneous coating.

Bibliography: 15 titles.

For citation:

L. A. Tolokonnikov, T. S. Nguyen, 2020, "Determination of the displacement field in an inhomogeneous coating of an elastic plate when passing through her plane sound wave", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 310–321.

1. Введение

Отражение и прохождение плоской звуковой волны через плоский неоднородный упругий слой исследовано в [1–9]. Задачи о прохождении плоской звуковой волны через однородную изотропную упругую пластину с непрерывно-неоднородным упругим покрытием решены в [10–14]. В этих работах для определения поля смещений в неоднородном покрытии построена краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая решается численными методами. Однако всегда желательно иметь аналитическое решение задачи. Его использование позволяет существенно сократить вычислительные затраты.

В настоящей работе получено приближенное аналитическое решение краевой задачи, описывающее поле смещений в неоднородном по толщине упругом покрытии пластины и справедливое для широкого класса законов неоднородности материала покрытия.

2. Постановка задачи

Рассмотрим однородную изотропную упругую пластину толщиной H , материал которой характеризуется плотностью ρ_0 и упругими постоянными λ_0 и μ_0 . Пластина имеет покрытие в виде неоднородного по толщине изотропного упругого слоя толщиной h , материал которого имеет плотность $\rho = \rho(z)$ и модули упругости $\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$. При этом декартова система прямоугольных координат x, y, z выбрана таким образом, что ось x лежит в плоскости, разделяющей однородный слой и неоднородное покрытие, а ось z направлена вниз по нормали к поверхности пластины (рис.1). Пластина с покрытием помещена между двумя полупространствами, заполненными идеальными однородными жидкостями, которые имеют плотности ρ_1, ρ_2 и скорости звука c_1, c_2 соответственно.

Из полупространства $z < -h$ на пластину с покрытием падает под произвольным углом плоская гармоническая звуковая волна, волновой вектор $\mathbf{k}_1$ которой лежит в плоскости x, z . Потенциал скорости падающей волны записывается в виде

$$\psi_0 = A_0 \exp\{i[k_{1x}x + k_{1z}(z + h) - \omega t]\},$$

где A_0 — амплитуда волны; $k_{1x} = k_1 \sin \theta_0$, $k_{1z} = k_1 \cos \theta_0$ — проекции волнового вектора k_1 на оси координат x и z соответственно; $k_1 = \omega/c_1$ — волновое число в полупространстве $z < -h$; θ_0 — угол падения плоской волны, составляемый нормалью к фронту волны с осью z ; ω — круговая частота; t — время. В дальнейшем временной множитель $e^{-i\omega t}$ будем опускать.

Рис. 1: Геометрия задачи

Задача об отражении и прохождении плоской звуковой волны через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с идеальными жидкостями, решена в [10]. При этом для аналитического описания волновых полей в полупространствах $z < -h$ и $z > H$, в однородной пластине и неоднородном покрытии необходимо знание значений компонентов вектора смещения $\mathbf{u}$ в неоднородном покрытии на его границах ($z = -h$ и $z = 0$).

Компоненты вектора смещения в неоднородном покрытии выражаются формулами

$$u_x = U_1(z) \exp(ik_{1x}x), u_z = U_2(z) \exp(ik_{1x}x),$$

а функции $U_n(z)$ ($n = 1, 2$) являются решением краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathbf{A}\mathbf{U}'' + \mathbf{B}\mathbf{U}' + \mathbf{C}\mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{AU}' + \mathbf{EU})_{z=-h} &= \mathbf{D}, \\ (\mathbf{AU}' + \mathbf{FU})_{z=0} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

где $\mathbf{U} = (U_1, U_2)^T$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mu' & ik_{1x}(\lambda + \mu) \\ ik_{1x}(\lambda + \mu) & \lambda' + 2\mu' \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -k_{1x}^2(\lambda + 2\mu) + \omega^2\rho & ik_{1x}\mu' \\ ik_{1x}\lambda' & -k_{1x}^2\mu + \omega^2\rho \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & ik_{1x}\mu \\ ik_{1x}\lambda & i\omega^2\rho_1/k_{1z} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & ik_{1x}\mu + f_{12} \\ ik_{1x}\lambda + f_{21} & f_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{D} = (0; -2i\rho_1\omega A_0)^T;$$

$$f_{1j} = \mu_0 \left[2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} (\beta_{j1} - \beta_{j2}) + s_3 (\gamma_{j1} + \gamma_{j2}) \right];$$

$$f_{2j} = s_1 (\beta_{j1} + \beta_{j2}) + s_2 (\gamma_{j1} - \gamma_{j2}) \quad (j = 1, 2);$$

$$\beta_{11} = k_{1x} t_2 w_1; \quad \beta_{21} = \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} r_2 w_1; \quad \beta_{12} = k_{1x} t_1 w_1; \quad \beta_{22} = -\sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} r_1 w_1;$$

$$\gamma_{11} = -\sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} q_2 w_2; \quad \gamma_{21} = k_{1x} g_2 w_2; \quad \gamma_{12} = \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} q_1 w_2; \quad \gamma_{22} = -k_{1x} g_1 w_2;$$

$$w_1 = \frac{-4i\mu_0 s_3}{r_1 t_2 + r_2 t_1}; \quad w_2 = \frac{4is_1}{g_1 q_2 - g_2 q_1};$$

$$g_j = (-1)^j 4s_1 \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} - (s_{7-j} e_{1l} + s_{9-j} e_{2l}) e_{j\tau};$$

$$q_j = 4s_1 k_{1x}^2 + (s_{7-j} e_{1l} - s_{9-j} e_{2l}) e_{j\tau};$$

$$t_j = 4\mu_0 s_3 \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} + (s_{6+(-1)^j} e_{2\tau} - s_{7+(-1)^j} e_{1\tau}) e_{jl};$$

$$r_j = 4\mu_0 k_{1x}^2 s_3 + (-1)^j (s_{6+(-1)^j} e_{2\tau} + s_{7+(-1)^j} e_{1\tau}) e_{jl};$$

$$s_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0) k_l^2 - 2\mu_0 k_{1x}^2; \quad s_2 = 2\mu_0 k_{1x} \sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2}; \quad s_3 = 2k_{1x}^2 - k_\tau^2; \quad s_4 = \frac{\omega_2 \rho_2}{\sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2}};$$

$$s_{4+j} = s_3 (s_4 \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} - s_1) - 2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} (s_4 k_{1x} - (-1)^j s_2);$$

$$s_{6+j} = s_3 (s_4 \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} + s_1) - 2k_{1x} \sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} (s_4 k_{1x} - (-1)^j s_2) \quad (j = 1, 2);$$

$$e_{1l} = e^{i\sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} H}; \quad e_{2l} = e^{-i\sqrt{k_l^2 - k_{1x}^2} H}; \quad e_{1\tau} = e^{i\sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} H}; \quad e_{2\tau} = e^{-i\sqrt{k_\tau^2 - k_{1x}^2} H};$$

$k_2 = \omega/c_2$ — волновое число в полупространстве $z > H$; $k_l = \omega/c_l$ и $k_\tau = \omega/c_\tau$ — волновые числа продольных и поперечных упругих волн в однородной пластине; $c_l = \sqrt{(\lambda_0 + \mu_0)/\rho_0}$ и $c_\tau = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — скорости продольных и поперечных волн соответственно.

Найдем аналитическое решение краевой задачи (1), (2).

3. Аналитическое решение задачи

Для решения краевой задачи (1), (2) воспользуемся методом степенных рядов [15].

Решение системы (1) будем искать в виде

$$U_n(z) = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{(s)}(z-a)^s \quad (n = 1, 2), \quad (3)$$

где a — некоторая точка отрезка $[-h, 0]$.

Если на отрезке $[-h, 0]$ функция $\rho(z)$ является дифференцируемой, а функции $\lambda(z)$ и $\mu(z)$ имеют непрерывные производные до второго порядка включительно, то все коэффициенты системы (1) будут представлять собой функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на $[-h, 0]$. Тогда ряды (3) будут сходящимися на $[-h, 0]$ [15].

Предположим, что функции ρ , λ и μ имеют вид многочленов относительно переменной z (или аппроксимированы такими многочленами):

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^R \rho^{(k)}(z-a)^k, \quad \lambda(z) = \sum_{k=0}^R \lambda^{(k)}(z-a)^k, \quad \mu(z) = \sum_{k=0}^R \mu^{(k)}(z-a)^k, \quad (4)$$

где R — степень многочленов.

Обозначим элементы матриц **A**, **B**, **C** через A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} соответственно. Запишем систему (1) в координатной форме

$$\sum_{n=1}^2 (A_{mn}U_n'' + B_{mn}U_n' + C_{mn}U_n) = 0, \quad m = 1, 2. \quad (5)$$

Так как элементы матриц **A**, **B**, **C** выражаются через модули упругости и плотность материала покрытия, то с учетом (4) получаем

$$A_{mn} = \sum_{k=0}^R A_{mn}^{(k)}(z-a)^k, \quad B_{mn} = \sum_{k=0}^R B_{mn}^{(k)}(z-a)^k, \quad C_{mn} = \sum_{k=0}^R C_{mn}^{(k)}(z-a)^k. \quad (6)$$

Коэффициенты $A_{mn}^{(k)}$, $B_{mn}^{(k)}$, $C_{mn}^{(k)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11}^{(k)} &= \mu^{(k)}, \quad A_{12}^{(k)} = A_{21}^{(k)} = 0, \quad A_{22}^{(k)} = \lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}, \\ B_{11}^{(k)} &= (k+1)\mu^{(k+1)}, \quad B_{12}^{(k)} = B_{21}^{(k)} = ik_{1x}(\lambda^{(k)} + \mu^{(k)}), \quad B_{22}^{(k)} = (k+1)(\lambda^{(k+1)} + 2\mu^{(k+1)}), \\ C_{11}^{(k)} &= -k_{1x}^2(\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) + \omega^2\rho^{(k)}, \quad C_{12}^{(k)} = ik_{1x}(k+1)\mu^{(k+1)}, \\ C_{21}^{(k)} &= ik_{1x}(k+1)\lambda^{(k+1)}, \quad C_{22}^{(k)} = -k_{1x}^2\mu^{(k)} + \omega^2\rho^{(k)}. \end{aligned}$$

Производные U_n' и U_n'' согласно (3) запишем в виде

$$U_n' = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)U_n^{(s+1)}(z-a)^s, \quad U_n'' = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)(s+2)U_n^{(s+2)}(z-a)^s. \quad (7)$$

С учетом разложений (3), (6), и (7) будем иметь

$$A_{mn}U_n'' = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} (s+1-k)(s+2-k)A_{mn}^{(k)}U_n^{(s+2-k)} \right) (z-a)^s,$$

$$B_{mn}U'_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} (s+1-k) B_{mn}^{(k)} U_n^{(s+1-k)} \right) (z-a)^s,$$

$$C_{mn}U_n = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{R_1} C_{mn}^{(k)} U_n^{(s-k)} \right) (z-a)^s,$$

где $R_1 = \min(R, s)$.

Подставляя последние выражения в уравнения (5) и приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени $(z-a)$, получаем уравнения для определения коэффициентов $U_n^{(s)}$ ($n = 1, 2$)

$$\sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} [(s+1-k)(s+2-k)A_{mn}^{(k)} U_n^{(s+2-k)} + (s+1-k)B_{mn}^{(k)} U_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)} U_n^{(s-k)}] = 0,$$

$$s = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2.$$

Выделяя из первой суммы последнего равенства член с индексом $k = 0$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^2 (s+1)(s+2)A_{mn}^{(0)} U_n^{(s+2)} = - \sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{mn}^{(k+1)} + B_{mn}^{(k)}] U_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)} U_n^{(s-k)} \} \quad (m = 1, 2). \quad (8)$$

Составим из (8) систему двух уравнений относительно неизвестных $U_1^{(s+2)}$ и $U_2^{(s+2)}$

$$a_{m1}^{(s)} U_1^{(s+2)} + a_{m2}^{(s)} U_2^{(s+2)} = b_m^{(s)}, \quad m = 1, 2, \quad (9)$$

где

$$a_{mn}^{(s)} = (s+1)(s+2)A_{mn}^{(0)} \quad (m, n = 1, 2);$$

$$b_m^{(s)} = - \sum_{n=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{ (s+1-k)[(s-k)A_{mn}^{(k+1)} + B_{mn}^{(k)}] U_n^{(s+1-k)} + C_{mn}^{(k)} U_n^{(s-k)} \}.$$

Так как $A_{12}^{(0)} = A_{21}^{(0)} = 0$, то $a_{12}^{(s)} = a_{21}^{(s)} = 0$. Поэтому из (9) находим

$$U_n^{(s+2)} = b_n^{(s)} / a_{nn}^{(s)} \quad (n = 1, 2; \quad s = 0, 1, \dots). \quad (10)$$

Рекуррентные соотношения (10) позволяют вычислить все коэффициенты разложений (3) за исключением $U_n^{(0)}$ и $U_n^{(1)}$ ($n = 1, 2$).

Для нахождения этих коэффициентов сведем краевую задачу (1), (2) к задачам с начальными условиями в точке $z = a$. Найдем четыре линейно независимых решения системы дифференциальных уравнений (1). В качестве фундаментальных решений можно выбрать четыре решения задачи Коши $\mathbf{U}^l(z) = (U_1^l, U_2^l)^T$ ($l = 1, 2, 3, 4$) системы (1) с начальными условиями, являющимися линейно независимыми.

Возьмем следующие начальные условия:

$$\mathbf{U}^l|_{z=a} = (\delta_{1l}, \delta_{2l})^T, \quad \mathbf{U}^{l'}|_{z=a} = (\delta_{3l}, \delta_{4l}) \quad (l = 1, 2, 3, 4), \quad (11)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; l — порядковый номер задачи Коши.

Однородность системы (1) позволяет представить решение краевой задачи (1), (2) в виде линейной комбинации фундаментальных решений

$$\mathbf{U} = \sum_{l=1}^4 C_l \mathbf{U}^l, \quad (12)$$

где C_l – постоянные.

Каждую составляющую вектора $\mathbf{U}^l$ будем искать в виде (3)

$$U_n^l = \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)} (z-a)^s \quad (n=1, 2). \quad (13)$$

Все коэффициенты разложений (13) за исключением $U_n^{l(0)}$ и $U_n^{l(1)}$ ($n=1, 2$) вычисляются по формуле (10)

$$U_n^{l(s+2)} = c_n^{l(s)} \quad (n=1, 2; \quad l=1, 2, 3, 4; \quad s=0, 1, \dots), \quad (14)$$

где

$$c_n^{l(s)} = -[(s+1)(s+2)A_{nn}^{(0)}]^{-1} \sum_{q=1}^2 \sum_{k=0}^{R_1} \{(s+1-k)[(s-k)A_{mq}^{(k+1)} + B_{mq}^{(k)}]U_q^{l(s+1-k)} + C_{mq}^{(k)}U_q^{l(s-k)}\}.$$

Учитывая, что $U_n^{l'}|_{z=a} = U_n^{l(1)}$, из начальных условий (11), получаем

$$U_1^{l(0)} = \delta_{1l}; \quad U_2^{l(0)} = \delta_{2l}; \quad U_1^{l(1)} = \delta_{3l}; \quad U_2^{l(1)} = \delta_{4l} \quad (l=1, 2, 3, 4).$$

Подставляя (12) в краевые условия (2), получим систему четырех линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_l ($l=1, 2, 3, 4$)

$$\sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A}\mathbf{U}^{l'} + \mathbf{E}\mathbf{U}^l)_{z=-h} = \mathbf{D},$$

$$\sum_{l=1}^4 C_l (\mathbf{A}\mathbf{U}^{l'} + \mathbf{F}\mathbf{U}^l)_{z=0} = 0.$$

Определив из этой системы коэффициенты C_l , согласно (12) и (13) находим приближенное аналитическое решение краевой задачи (1),(2)

$$U_n(z) = \sum_{l=1}^4 C_l \sum_{s=0}^{\infty} U_n^{l(s)} (z-a)^s \quad (n=1, 2). \quad (15)$$

В качестве точки $z=a$ можно взять любую точку отрезка $[-h, 0]$. Выберем $a=-h/2$, то есть середину отрезка $[-h, 0]$.

На основе полученного аналитического решения краевой задачи были проведены численные расчеты зависимостей модулей компонентов вектора смещения в неоднородном покрытии $|u_x| = |U_1(z)|$, $|u_z| = |U_2(z)|$ на границах покрытия (при $z=-h$ и $z=0$) от угла падения плоской волны. Исследовался случай, когда жидкости по обе стороны тела являются одинаковыми ($k_1 = k_2$, $\rho_1 = \rho_2$). Полагалось, что амплитуда падающей волны $A_0 = 1$, а отношение толщины покрытия h к толщине однородной пластины H , равно 0,2. Рассматривалась алюминиевая пластина толщиной $H = 0,1$ м ($\rho_0 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³, $\lambda_0 = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\mu_0 = 2,6 \cdot 10^{10}$ Н/м²) с покрытием на основе поливинилбутирала, находящаяся в воде ($\rho_1 = \rho_2 = 10^3$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с). Волновой размер пластины полагался равным $k_1 H = 5$. Расчеты проводились как для однородного покрытия с плотностью $\tilde{\rho} = 1,07 \cdot 10^3$ кг/м³ и модулями упругости $\tilde{\lambda} = 3,9 \cdot 10^9$ Н/м², $\tilde{\mu} = 9,8 \cdot 10^8$ Н/м², так и для неоднородных покрытий, механические характеристики которых менялись по толщине слоя по закону

$$\rho = \tilde{\rho} f(z), \quad \lambda = \tilde{\lambda} f(z), \quad \mu = \tilde{\mu} f(z).$$

Рассматривались следующие линейный и квадратичный законы неоднородности:

$$f_1(z) = a_1 \left(-\frac{z}{h} + 0,5 \right) \quad (a_1 = 1), \quad f_2(z) = a_2 \left[\left(\frac{z}{h} \right)^2 + 0,5 \right] \quad (a_2 = 6/5).$$

Множитель a_j ($j = 1, 2$) выбран так, чтобы среднее значение функции $f_j(z)$ по толщине слоя было равно единице.

Согласно (4) для линейного закона неоднородности материала покрытия ($R = 1$) имеем

$$\rho(z) = \tilde{\rho}[\rho^{(0)} + \rho^{(1)}(z + h/2)], \quad \lambda(z) = \tilde{\lambda}[\lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}(z + h/2)], \quad \mu(z) = \tilde{\mu}[\mu^{(0)} + \mu^{(1)}(z + h/2)],$$

где

$$\rho^{(0)} = \tilde{\rho}, \quad \rho^{(1)} = -\tilde{\rho}/h, \quad \lambda^{(0)} = \tilde{\lambda}, \quad \lambda^{(1)} = -\tilde{\lambda}/h, \quad \mu^{(0)} = \tilde{\mu}, \quad \mu^{(1)} = -\tilde{\mu}/h,$$

$$\rho^{(k)} = \lambda^{(k)} = \mu^{(k)} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots),$$

а для квадратичного ($R = 2$) —

$$\rho(z) = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}(z + h/2) + \rho^{(2)}(z + h/2)^2, \quad \lambda(z) = \lambda^{(0)} + \lambda^{(1)}(z + h/2) + \lambda^{(2)}(z + h/2)^2,$$

$$\mu(z) = \mu^{(0)} + \mu^{(1)}(z + h/2) + \mu^{(2)}(z + h/2)^2,$$

где

$$\rho^{(0)} = 0,9\tilde{\rho}, \quad \rho^{(1)} = -1,2\tilde{\rho}/h, \quad \rho^{(2)} = 1,2\tilde{\rho}/h^2, \quad \lambda^{(0)} = 0,9\tilde{\lambda}, \quad \lambda^{(1)} = -1,2\tilde{\lambda}/h, \\ \lambda^{(2)} = 1,2\tilde{\lambda}/h^2, \quad \mu^{(0)} = 0,9\tilde{\mu}, \quad \mu^{(1)} = -1,2\tilde{\mu}/h, \quad \mu^{(2)} = 1,2\tilde{\mu}/h^2, \\ \rho^{(k)} = \lambda^{(k)} = \mu^{(k)} = 0 \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Зависимости $|U_j(z)/A_0|$ ($j = 1, 2$) от θ_0 при $z = -h$ представлены на рис. 2 и рис. 3, а при $z = 0$ — на рис. 4 и рис. 5. Сплошные линии соответствуют однородному покрытию, пунктирные и штриховые — покрытиям с линейным и квадратичным законами неоднородности соответственно. Сравнение приведенных зависимостей показывает существенное влияние неоднородности материала покрытия на поле смещений.

Рис. 2: Зависимость $|U_1(-h)/A_0|$ от θ_0

Рис. 3: Зависимость $|U_2(-h)/A_0|$ от θ_0 Рис. 4: Зависимость $|U_1(0)/A_0|$ от θ_0 Рис. 5: Зависимость $|U_2(0)/A_0|$ от θ_0

4. Заключение

Полученное аналитическое решение рассматриваемой краевой задачи для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка позволяет эффективно исследовать поле смещений в упругом неоднородном по толщине покрытии пластины при прохождении плоской звуковой волны, а также существенно сократить вычислительные затраты при численном анализе отраженного и прошедшего через пластину с покрытием акустических полей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приходько В. Ю., Тюткин В. В. Расчет коэффициента отражения звуковых волн от твердых слоисто-неоднородных сред // Акустический журн. 1986. Т. 32. Вып. 2. С. 212-218.
2. Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Прохождение звуковых волн через трансверсально-изотропный неоднородный плоский слой // Акустический журн. 1990. Т. 36. Вып. 4. С. 740-744.
3. Ринкевич А. Б., Смирнов А. Н. Распространение упругих волн в неоднородной трансверсально-изотропной пластине // Дефектоскопия. 2000. № 8. С. 78-83.
4. Толоконников Л. А. Отражение и преломление плоской звуковой волны анизотропным неоднородным слоем // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 5. С. 179-184.
5. Толоконников Л. А. Прохождение звука через неоднородный анизотропный слой, граничащий с вязкими жидкостями // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62. Вып. 6. С. 1029-1035.
6. Ларин Н. В., Толоконников Л. А. Прохождение плоской звуковой волны через неоднородный термоупругий слой // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 4. С. 650-659.
7. Толоконников Л. А., Ларин Н. В. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т. 58. № 1. С. 108-116.
8. Ларин Н. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // Акустический журн. 2015. Т. 61. № 5. С. 552-558.
9. Скобельцын С. А. Определение параметров неоднородности анизотропного упругого слоя по прохождению звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 7. Ч. 2. С. 246-257.
10. Толоконников Л. А., Юдачев В. В. Отражение и преломление плоской звуковой волны упругим плоским слоем с неоднородным покрытием // Известия Тульского гос. ун-та. Естественные науки. 2015. Вып. 3. С. 219-226.
11. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. О влиянии неоднородного покрытия упругой пластины на отражение и прохождение звука // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2018. Вып. 6. С. 362-372.

12. Толоконников Л. А., Нгуен Т. Ш. Прохождение звука через упругую пластину с неоднородным покрытием, граничащую с вязкими жидкостями // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20 Вып. 2. С. 311-324.
13. Ларин И. В., Скобельцын С. А., Толоконников Л. А. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 4. С. 480-488.
14. Ларин Н. В. Определение законов неоднородности покрытия термоупругой пластины, обеспечивающих наименьшее звукоотражение // Известия Тульского гос. ун-та. Технические науки. 2016. Вып. 11. Ч. 2. С. 216-234.
15. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 3. Ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.

REFERENCES

1. Prikhod'ko, V. Yu. & Tyutekin, V. V. 1986, "Calculation of reflection coefficient of sound waves from solid layered media", *Akust. Zhurnal*, vol. 32, no 2, pp. 212-218, [in Russian].
2. Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 1990, "Transmission of sound waves through a transversely isotropic inhomogeneous plane layer", *Akust. Zhurnal*, vol. 36, no 4, pp. 740-744, [in Russian].
3. Rinkevich, A. B. & Smirnov, A. N. 2000, "Propagation of elastic waves in a non-uniform transversely isotropic plate", *Defektoskopiya*, no 8, pp. 78-83, [in Russian].
4. Tolokonnikov, L. A. 1999, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an anisotropic inhomogeneous layer", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 40, no 5, pp. 936-941.
5. Tolokonnikov, L. A. 1998, "The transmission of sound through an inhomogeneous anisotropic layer adjoining viscous liquids", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 62, no 6, pp. 953-958.
6. Larin, N. V. & Tolokonnikov, L. A. 2006, "The transmission of a plane acoustic wave through a non-uniform thermoelastic layer", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 70, no 4, pp. 590-598.
7. Tolokonnikov, L. A. & Larin, N. V. 2017, "Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids", *J. Appl. Mech. and Techn. Physics*, vol. 58, no 1, pp. 95-102.
8. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2015, "Determination of the Inhomogeneity Laws for an Elastic Layer with Preset Sound-Reflecting Properties", *Acoustical Physics*, vol. 61, no 5, pp. 504-510.
9. Skobel'tsyn, S. A. 2016, "Determining of the heterogeneity parameters of an anisotropic elastic layer on the sound transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 7-2, pp. 246-257, [in Russian].
10. Tolokonnikov, L. A. & Yudachev, V. V. 2015, "Reflection and refraction of a planar acoustic waves in an elastic planar layer with a non-uniform covering", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Estestv. Nauki*, no 3, pp. 219-226, [in Russian].
11. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2018, "About the influence of an non-uniform covering of the elastic plate on sound reflection and transmission", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 6, pp. 362-372, [in Russian].

12. Tolokonnikov, L. A. & Nguyen, T. S. 2019, "The transmission of sound through an elastic plate with an inhomogeneous coating adjoining viscous liquids", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no 2, pp. 311-324, [in Russian].
13. Larin, N. V., Skobel'tsyn, S. A. & Tolokonnikov, L. A. 2016, "Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties", *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 80, no 4, pp. 339-344.
14. Larin, N. V. 2016, "Determination of the inhomogeneity laws for coating of the thermoelastic plate to obtain minimum sound reflection", *Izv. Tul. Gos. Univ., Ser. Tekh. Nauki*, no 11-2, pp. 216-234, [in Russian].
15. Smirnov, V. I. 1969, "Higher Mathematics Course, vol. 3-2", Nauka, Moscow, 672 p., [in Russian].

Получено 19.01.2019 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.