ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-297-309

О полноте списка выпуклых RR -многогранников

В. И. Субботин

Субботин Владимир Иванович — кандидат физико-математических наук, доцент, Донской государственный аграрный университет (г. Новочеркасск).

e-mail: geometry@mail.ru

Аннотация

В статье дано доказательство полноты перечня одного класса выпуклых симметричных многогранников в трёхмерном евклидовом пространстве. Этот класс принадлежит классу так называемых RR -многогранников. RR -многогранники характеризуются следующими условиями симметрии: у каждого многогранника класса RR существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие ни одной звезде этих вершин; причём каждая грань, не входящая в звезду ромбической вершины, является правильной. Ромбичность вершины здесь означает, что звезда вершины составлена из n равных, одинаково расположенных ромбов. Симметричность вершины означает, что через неё проходит ось вращения порядка n её звезды. Ранее автором были найдены все многогранники с ромбическими или дельтоидными вершинами и локально симметричными гранями. При этом локально симметричные грани не принадлежат ни одной из ромбических или дельтоидных звёзд. Класс RR -многогранников получается из рассмотренных ранее заменой условия локальной симметрии неромбических граней условием их правильности.

Таким образом, рассматриваемый класс RR связан с известным результатом Н. Джонсона и В. Залгаллера о перечислении всех выпуклых многогранников с условием правильности граней. Но, как показано в настоящей статье, RR -многогранники не могут быть просто получены из класса правильных, а требуют специального метода. Настоящая статья посвящена доказательству полноты класса RR -многогранников с двумя изолированными симметричными ромбическими вершинами V , W . При этом ромбы сходятся в вершинах V , W не обязательно своими острыми углами и V , W не обязательно разделены только одним поясом правильных граней.

Ключевые слова: симметричная ромбическая вершина, звезда вершины, пояс правильных граней, RR -многогранник.

Библиография: 26 названий.

Для цитирования:

В. И. Субботин. О полноте списка выпуклых RR -многогранников // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 297–309.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 514.172.45

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-297-309

On the completeness of the list of convex RR -polyhedra

V. I. Subbotin

Subbotin Vladimir Ivanovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Don State Agrarian University (Novocherkassk).

e-mail: geometry@mail.ru

Abstract

The article gives proof of the completeness of the list of one class of convex symmetric polyhedra in three-dimensional Euclidean space. This class belongs to the class of so-called RR -polyhedra. The RR -polyhedra are characterized by the following symmetry conditions: each polyhedron of the class RR has symmetric rhombic vertices and there are faces that do not belong to any star of these vertices; and each face that does not belong to the star of the rhombic vertex is regular. The vertex rhombicity here means that the vertex star is composed of n equal, equally spaced rhombuses. The symmetry of the vertex means that the rotation axis of the order n of its star passes through it. Previously, the author found all polyhedra with rhombic or deltoid vertices and locally symmetric faces. Moreover, locally symmetric faces do not belong to any of the rhombic or deltoid stars. The class of RR -polyhedra is obtained from the previously considered replacement of the local symmetry condition of the non-rhombic faces by the condition of their regularity.

Thus, the considered class RR is connected with the well-known result of D. Johnson and V. Zalgaller on the enumeration of all convex polyhedra with the condition of the regularity of the faces. But as shown in this article, RR -polyhedra cannot simply be obtained from the class of regular-faced, but require a special method. The proof of completeness of the class of RR -polyhedra with two isolated symmetric rhombic vertices V , W is given in this article. Wherein, the rhombuses converge at the vertices of V , W not necessarily at its acute angles, and V , W are not necessarily separated by only one belt of regular faces.

Keywords: symmetric rhombic vertex, the star of the vertex, the belt of regular faces, RR -polyhedron.

Bibliography: 26 titles.

For citation:

V. I. Subbotin, 2020, "On the completeness of the list of convex RR -polyhedra", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 297–309.

1. Введение

Целью настоящей статьи является доказательство полноты списка одного класса замкнутых выпуклых симметричных многогранников в E^3 , принадлежащих классу так называемых RR -многогранников. Последний класс характеризуется условиями симметрии на элементы многогранника, а именно: многогранник M называется в работе RR -многогранником (от слов "rhombic" и "regular"), если у него существуют симметричные ромбические вершины и существуют грани, не принадлежащие звёздам этих вершин и являющиеся правильными многоугольниками одного типа. Здесь звезда вершины V многогранника, обозначаемая далее $Star(V)$ — это совокупность всех граней, имеющих одну общую вершину, совпадающую с V . Если звезда

$Star(V)$ состоит из n равных и одинаково расположенных, т.е. сходящихся в вершине V либо своими острыми, либо тупыми углами ромбов, то вершину V будем называть ромбической. Если звёзды $Star(V)$ и $Star(W)$ не имеют общих вершин, то будем говорить, что эти звёзды *отделены* друг от друга, а вершины V и W будем называть *изолированными*.

Если V расположена на оси вращения порядка n множества $Star(V)$, то V называется симметричной n -ромбической вершиной.

Естественность понятия класса RR -многогранников очевидна из следующих соображений.

Существует класс правильных (платоновых) многогранников в E^3 ; существует класс многогранников Джонсона–Залгаллера только с одним условием симметрии на грани: все грани являются правильными многоугольниками не обязательно одного типа. Известны также различные обобщения этих классов ([1–10], [22], [24–26]). Существуют также два многогранника, каждая вершина которых является симметричной ромбической — ромбододекаэдр и ромботриаконтаэдр. Известен также многогранник с двумя изолированными симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями, в котором ромбические звёзды отделены одним поясом правильных граней (шестиугольниками) — удлинённый ромбододекаэдр. Заметим, что поясом граней здесь и в дальнейшем называется связное множество граней $F_1, F_2, \dots, F_n$ такое, что любые две грани F_i, F_{i+1} и также F_1, F_n имеют только одно общее ребро, а любые две другие грани этого множества не имеют общих рёбер.

В связи с этим возникает вопрос, каковы все те многогранники, у которых существуют симметричные ромбические вершины, а остальные грани являются правильными?

В работе автора [19] дано конструктивное доказательство существования двух RR -многогранников с двадцатью и двадцатью четырьмя гранями. Оба этих многогранника имеют зеркальные оси симметрии. Кроме того, в [20] анонсирована теорема, в которой доказывается полнота списка RR -многогранников с *одним* поясом правильных граней и изолированными *остроугольными* симметричными ромбическими вершинами. Под остроугольной ромбической вершиной понимается ромбическая вершина V , которая является вершиной острых углов ромбов звезды $Star(V)$.

В настоящей работе будут найдены все RR -многогранники с двумя симметричными, изолированными — как остроугольными так и тупоугольными — ромбическими вершинами, звёзды которых зеркально расположены. При этом условие наличия только одного пояса правильных граней не обязательно.

Заметим, что некоторые другие взаимосвязи геометрии многогранников с симметрией его элементов можно найти, например, в [11–18], [21], [23].

2. Основная теорема

Напомним определение зеркально расположенных звёзд вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Две равные симметричные n -ромбические звёзды $Star(V)$ и $Star(W)$, расположенные друг к другу своими вогнутыми сторонами, будем называть зеркально расположенными, если вершины V и W расположены либо на оси вращения порядка n фигуры $Star(V) \cup Star(W)$, либо $Star(V)$ и $Star(W)$ могут быть совмещены при помощи зеркального поворота вокруг оси порядка $2n$, проходящей через их вершины.*

Под зеркальным поворотом вокруг оси L понимается композиция поворота вокруг оси L и отражения в плоскости, перпендикулярной этой оси.

Здесь докажем основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Множество всех RR -многогранников с двумя зеркально расположенными ромбическими звёздами $Star(V)$ и $Star(W)$, отделёнными друг от друга правильными гранями одного типа, исчерпывается следующими девятью многогранниками:*

- 1) шесть многогранников с n -ромбическими вершинами, $6 \leq n < 12$, и правильными треугольными гранями;
- 2) 24-гранник с 4-ромбическими вершинами и правильными треугольными гранями;
- 3) 20-гранник с 5-ромбическими вершинами и квадратными гранями;
- 4) Удлиненный ромбический додекаэдр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство разобьём на несколько частей.

1. В этой части будут найдены все RR -многогранники с треугольными гранями.

Граница каждой ромбической звезды $Star(V)$ представляет собой пространственную ломаную линию $MRNSPTQ \dots$. Звенья этой ломаной являются сторонами ромбов звезды $Star(V)$, а вершины являются вершинами острых и тупых углов ромбов. Границу ромбической звезды $Star(V)$ обозначим $L(V)$, острые углы ромбов — α . Обозначим β углы с вершинами на $L(V)$, образованные сторонами двух смежных ромбов (Рис.1,а)). Углы β в дальнейшем будем называть свободными.

Сначала проверим возможность RR -многогранников с остроугольными ромбическими вершинами.

Рассмотрим случай n -ромбической вершины V при $n = 3$. В этом случае, помещая в свободные углы равносторонние треугольные грани T_i , мы не сможем получить вторую ромбическую звезду, отделённую правильными треугольными гранями от звезды $Star(V)$. Действительно, для каждой грани T_i найдётся параллельная ромбическая грань звезды $Star(V)$ (Рис.1,б)). Но в силу равносторонности граней T_i каждая ромбическая грань составлена из двух правильных треугольников. Поэтому, приставляя к граням T_i новые треугольные грани, мы получим только ромбоэдр, гранями которого являются шесть равных ромбов с острыми углами $\frac{\pi}{3}$.

Рассмотрим случай n -ромбической вершины V при $n = 4$. Покажем, что и в этом случае не существует многогранника с двумя ромбическими вершинами, разделёнными правильными треугольными гранями.

В этом случае для каждой из четырёх треугольных граней T_i , помещённой в свободный угол β_i , существует равная и параллельная ей треугольная грань T_j , причём обе грани T_i и T_j параллельны оси вращения звезды $Star(V)$. Если приставить треугольные грани F_1 и F_2 соответственно к двум соседним граням T_1 и T_2 , то угол γ с вершиной S , общей с вершинами граней F_1 и F_2 , будет меньше $\frac{\pi}{3}$, так как две другие стороны граней F_1 и F_2 , имеющие общую вершину, перпендикулярны друг другу (Рис.1,с)).

Рассмотрим случай n -ромбической вершины V при $n = 5$. Если предположить существование RR -многогранника с двумя ромбическими вершинами, разделёнными правильными треугольными гранями в этом случае, то грани $RNSK$ и $SPTL$ будут являться ромбами, а не разделёнными рёбрами на две треугольные грани каждая, Рис.1,а). Действительно, если предположить, что KS не параллельна RN , а SL не параллельна PT , то переходя по параллельным рёбрам $RN \parallel MV$, $PT \parallel VQ$ и т.д., на завершающем шаге получим два ребра, являющимися соседними сторонами правильной треугольной грани. Значит, угол KSL не равен $\frac{\pi}{3}$ и в этот угол нельзя будет поместить треугольную грань.

Если $6 \leq n < 12$, то RR -многогранники с двумя ромбическими вершинами, разделёнными правильными треугольными гранями, могут быть построены. На Рис.1,д) — фрагмент одного из многогранников, на Рис.2,а) — один из шести многогранников в целом.

Действительно, найдём связь величины угла α со свободными углами β .

Для этого рассмотрим трёхгранный угол с вершиной P на Рис.1,а). Обозначая δ двугранный угол с ребром VP , получим:

$$\cos \beta = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \delta, \quad \sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin \alpha}.$$

С другой стороны, рассматривая правильную n -угольную пирамиду $MNPQ \dots V$ получим для двугранного угла δ выражение:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \frac{\pi(n-2)}{2n}}{\cos \frac{\alpha}{2}};$$

следовательно,

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{2 \sin \frac{\pi(n-2)}{2n}}. \quad (1)$$

Из последней формулы по заданным n и β мы можем найти острый угол α .

При $n = 11$ получаем многогранник с максимальным числом граней – 66. Заметим, что при $n > 11$, очевидно, симметричную ромбическую звезду построить нельзя, так как должно выполняться неравенство $n\alpha < 2\pi$, т.е. начиная с $n = 12$ угол $\alpha < \frac{\pi}{6}$. Но при выполнении последнего неравенства сумма плоских углов при вершине P будет $> 2\pi$.

Проверим теперь, для каких n возможно поместить в свободные углы по две равносторонних треугольных грани, так как по три таких грани поместить нельзя: сумма плоских углов при вершине P (Рис.1,a)) будет $\geq 2\pi$.

Случай $n = 3$ очевиден, так как в этом случае помещается только один треугольник, что следует из изложенного в начале этого пункта.

При $n = 4$ мы получим 24-гранный RR -многогранник с зеркально-поворотной осью 8-го порядка (Рис.2,b), существование и единственность которого доказана автором в [19].

Докажем невозможность многогранника с двумя треугольными гранями в свободных углах при $n = 5$. На Рис.1,e) угол между рёбрами m и n не равен углу между рёбрами p и q . Переходя к паре рёбер r , s соответственно параллельных рёбрам p и q и далее, на завершающем шаге получим угол, эквивалентный углу 2. Но угол 2 равен углу 3. Следовательно, угол 1 не равен углу 3. Поэтому, если в угол 1 поместить два треугольника, то двугранный угол между ними не будет равен двугранному углу, который образуют треугольные грани с общей вершиной P . Пусть возможно поместить в угол 5 и во все углы, ему эквивалентные относительно вращения звезды $Star(V)$, две треугольные грани. Тогда сторона BC , лежащая против угла 5, и все стороны, ей эквивалентные, образуют плоский правильный 5-угольник $ABC \dots$ с осью вращения, проходящей через вершину V (Рис.1,e)). Следовательно, в этом случае вторая ромбическая вершина не будет существовать.

Две треугольных грани нельзя поместить и в случае $n \geq 6$, так как тупые углы ромбов в этом случае будут $> \frac{2\pi}{3}$, и сумма плоских углов в вершине P и ей эквивалентных будет $> 2\pi$.

Теперь рассмотрим возможность существования RR -многогранников с треугольными гранями и двумя тупоугольными симметричными ромбическими вершинами.

Очевидно, что в случае тупоугольной вершины V тупые углы ромбов звезды $Star(V)$ должны быть $< \frac{2\pi}{3}$.

Пусть тупоугольной вершине S ромбов звезды $Star(V)$, принадлежащей граничной ломаной $L(V)$, инцидентны вершины четырёх треугольных граней. Если в вершине T ломаной $L(V)$, в которой сходятся ромбы своими острыми углами, сходятся только две треугольных грани, то получим "ромбическую 6-угольную призму" с зеркальной осью симметрии 6-го порядка. Её боковые грани представляют собой ромбы с острыми углами $\frac{\pi}{3}$ и условными рёбрами. На Рис.1,f) изображена развёртка многогранника без тупоугольных ромбических звёзд:

рёбра p и q отождествляются, а верхняя и нижняя ломаные являются граничной ломаной соответственно для двух ромбических звёзд. Этот многогранник, как легко видеть, не является RR -многогранником, так как пары треугольных граней с общей вершиной в вершинах острых углов ромбов звезды $Star(V)$ вырождаются в одну ромбическую грань с условным ребром.

Пусть в вершинах ломаной $L(V)$, в которых должны сходиться ромбы звезды $Star(V)$ своими острыми углами (одна из таких вершин — T , Рис.1,g)), сходятся по три треугольных грани, а в вершинах ломаной $L(V)$, инцидентных тупым углам ромбов звезды $Star(V)$ (одна из таких вершин — S) — по-прежнему по четыре треугольных грани. Тогда предполагаемый многогранник M с двумя ромбическими вершинами должен будет иметь 30 граней, из которых 24 — треугольные, обычную ось вращения 3-го порядка и плоскость симметрии, перпендикулярную этой оси. Однако такой многогранник M не будет выпуклым.

Это легко видеть, рассмотрев отсечение по боковым рёбрам (через одно) правильной треугольной призмы с последующим отсечением новых рёбер верхнего и нижнего оснований призмы. Отсечения можно выбрать так, чтобы получить 11-гранник M' с осью вращения 3-го порядка и плоскостью симметрии, перпендикулярной этой оси. Гранями M' будут являться шесть равных равнобедренных трапеций Π'_i , меньшие основания которых примем равными 1, три ромба R_i , разбиваемых на два правильных треугольника со стороной 1, и два больших параллельных правильных треугольника Δ , со стороной, равной большому основанию трапеций Π'_i .

Чтобы построить многогранник M , заменим трапеции Π'_i пространственными трапециями Π_i , составленными из трёх правильных треугольников и с теми же самыми меньшими основаниями. Очевидно, для того, чтобы три большие основания пространственных трапеций Π_i являлись граничной ломаной $L(V)$ нужно, чтобы три равных расстояния d_i между вершинами этой ломаной, эквивалентных вершине T , равнялось трём равным расстояниям ρ_i между вершинами, эквивалентными S , Рис.1,g). То же верно и для второй ромбической вершины многогранника. Проводя вычисления, видим, что длины больших сторон трапеций Π'_i , равные $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, будут больше больших диагоналей ромбов R_i , равных $\sqrt{3}$. Но большие диагонали ромбов R_i больше расстояний d_i . Таким образом, верно неравенство $d_i < \rho_i$, то есть мы не получаем ромбических звёзд. Мы не сможем получить равенство $\rho_i = d_i$, так как при увеличении d_i (при уменьшении ρ_i) одновременно в двух ромбических звёздах происходит "перелом" ромбов по меньшим их диагоналям, так как углы граничных ломаных ромбических звёзд в вершине S и ей эквивалентных, будут увеличиваться и выпуклость многогранника M будет нарушена.

Для наглядности на Рис.1,g) изображена часть предполагаемого многогранника M : восемь треугольных граней, две из трёх переломанных ромбических граней и одна из предполагаемых ромбических звёзд $Star(V)$. Рёбра, по которым происходит перелом ромбов на два треугольника показаны пунктиром.

Рассмотрим следующий возможный случай, когда в вершине S и ей эквивалентных сходятся по три треугольных грани, а в вершине T и ей эквивалентных — две. В этом случае получаем многогранник с одной ромбической тупоугольной вершиной. На Рис.1,h) изображена его развёртка без возможно ромбической звезды и без одной треугольной грани. Последняя получается после отождествления рёбер p и q путём отождествления вершин этих ребер, помеченных одинаковыми цифрами. В результате получается правильная треугольная грань rst . Цифрой 2 помечены вершины, в которых ромбические вершины возможной звезды $Star(V)$ сходятся своими острыми углами. Таким образом, в этом случае RR -многогранник невозможен.

2. В этой части доказательства теоремы будут найдены все RR -многогранники с квадратными гранями. Как и в части 1, сначала проверим возможность RR -многогранников с остроугольными ромбическими вершинами.

Рис. 1: К доказательству теоремы 1

Рассмотрим случай 3-ромбической вершины V . В этом случае в свободные углы нельзя поместить квадраты, так как свободные углы равны острым углам ромбов.

В случае 4-ромбической вершины V , выбрав острые углы ромбов равными $\frac{\pi}{3}$, квадратные грани в свободных углах β возможны, и очевидно, возможен многогранник с двумя симметричными ромбическими вершинами и квадратными гранями, но у него ромбические звёзды имеют общие вершины. Таким образом, нарушается условие делимости ромбических звёзд. (Рис.1,k)). Добавлять новые квадратные грани нельзя, так как угол 1 на Рис.1,l) не может

Рис. 2: RR -многогранники

быть равен $\frac{\pi}{2}$. Действительно, в противном случае, переходя по параллельным рёбрам $a \parallel c$, $b \parallel d$, и т.д., получим, что острый угол ромбов вершины V равен $\frac{\pi}{2}$.

Если V — 5-ромбическая вершина, то RR -многогранник возможен. Получим 20-гранник с зеркальной осью симметрии 10-го порядка (Рис.2,с)). Доказательство его существования и единственности приведено в работе автора [19].

Аналогично получаем доказательство невозможности RR -многогранников с квадратными гранями в случае 6- и 7-ромбических вершин. Только в этом случае переход по парам параллельных рёбер следует начинать с рёбер k и d на Рис.1,1).

Для n -ромбических вершин в случае $n > 7$ доказательство невозможности RR -многогранников следует из того, что тупые углы ромбов будут в этом случае $> \frac{3\pi}{4}$ и в вершине S сумма плоских углов будет $> 2\pi$.

Рассмотрим возможность существования RR -многогранников с квадратными гранями и двумя *тупоугольными* симметричными ромбическими вершинами.

Очевидно, в этом случае ромбические вершины могут быть только трёхгранными. В вершинах граничной кривой $L(V)$ могут сходиться только по два квадрата; в противном случае в вершинах ломаной $L(V)$ сумма плоских углов будет $> 2\pi$, и мы получаем призматическую поверхность — замкнутый пояс из шести квадратов. Граничная ломаная этого пояса является плоской и не может быть совмещена с пространственной ломаной LV .

3. Рассмотрим возможность RR -многогранников с 5-угольными правильными гранями.

Рассмотрим сначала случай остроугольных ромбических вершин.

Для 3-гранных ромбических вершин невозможность доказывается так же, как в случае треугольных граней. Для 4-гранных вершин невозможность RR -многогранника следует из невозможности пояса из 5-угольников с двумя парами параллельных граней.

В случае 5-гранных вершин вычисление по вышеприведённой формуле (1) для острого угла ромба даёт: $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Поэтому три пятиугольника не могут сходиться в вершинах S_i ломаной $L(V)$, которым инцидентны острые вершины ромбов звезды $Star(V)$.

Покажем, что в вершинах S_i не могут сходиться и по два пятиугольника. Действительно, мы получили бы в этом случае пояс додекаэдра из пяти 5-угольников. Но у такого пояса для двух соседних 5-угольников угол между их сторонами с общей вершиной равен $\frac{3\pi}{5}$, что больше острых углов ромбов. Поэтому граничная ломаная $L(V)$ не может быть совмещена с пространственной границей пояса.

При $n = 6$ в вершинах S_i ломаной $L(V)$, которым инцидентны острые вершины ромбов,

для двух соседних 5-угольников угол между их сторонами в вершинах S_i только увеличится по сравнению с только-что рассмотренным случаем $n = 5$, а острый угол ромбов уменьшится. Поэтому и здесь граничная ломаная $L(V)$ не может быть совмещена с пространственной границей пояса.

При $n > 6$ сумма плоских углов в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся ромбы своими тупыми углами и 5-угольники, будет больше 2π . Это можно проверить, вычисляя острые углы ромбов по формуле (1).

Рассмотрим случай тупоугольных ромбических вершин и правильных 5-угольных граней.

Как и раньше, в каждой вершине ломаной $L(V)$ может сходитьсь только по две 5-угольных грани. Рассмотрим пояс Π из шести 5-угольников с граничной ломаной L . Если граничная ломаная L пояса Π была бы одновременно и граничной ломаной звезды, то для соседних пятиугольников пояса Π углы между сторонами, имеющими общую вершину, должны были быть равными через один. Но это невозможно, так как тупые углы ромбов звезды $Star(V)$ должны быть $< \frac{2\pi}{3}$, а три угла ломаной L будут $> \frac{2\pi}{3}$. Поэтому не существует ромбических тупоугольных звёзд, граничная ломаная которых была бы и граничной ломаной пояса Π .

4. Здесь рассмотрим случай k -угольных граней при $k \geq 6$. Пусть сначала ромбические вершины являются остроугольными.

Случай 3-ромбических вершин, как и ранее, не даёт новых многогранников при $k \geq 6$.

Пусть ромбические вершины 4-гранные, а правильные грани — 6-угольные. Как известно, в этом случае существует 12-гранник, удовлетворяющий определению RR -многогранника — удлинённый ромбододекаэдр (Рис.2,d)).

Помещая в свободные углы звезды $Star(V)$ правильные k -угольники при $k > 6$, для 4-гранных вершин должен получиться пояс, четыре грани которого попарно параллельны. Однако, это при нечётных k , $k > 6$ невозможно. При чётных k , $k > 6$ такой пояс возможен, но в этом случае, очевидно, звезда $Star(V)$ не является ромбической. Поэтому и в этих случаях RR -многогранник невозможен.

Если ромбические вершины 5-гранные, а правильные грани — k -угольные, $k \geq 6$, то сумма плоских углов в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся ромбы своими острыми углами и k -угольники, будет больше 2π , что проверяется непосредственно по формуле (1).

При $n > 5$ для остроугольных n -ромбических вершин и правильных k -угольных граней, $k \geq 6$, очевидно, рассматриваемые RR -многогранники не существуют. Действительно, в этом случае сумма плоских углов в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся ромбы своими тупыми углами и k -угольники, будет больше 2π .

В случае тупоугольных ромбических вершин RR -многогранников с k -угольными гранями не существует при любом $k \geq 6$.

Действительно, так как тупые углы ромбов тупоугольной звезды должны быть меньше $\frac{2\pi}{3}$, то в вершинах ломаной $L(V)$, в которых сходятся ромбы своими острыми углами, не может сходитьсь два k -угольника для всех $k \geq 6$. $\square$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства следует, что в условии теоремы 1 можно не требовать заранее условия зеркальной расположенности двух ромбических звёзд.

3. Заключение

Доказанная теорема даёт полный список всех девяти RR -многогранников с двумя изолированными симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями одного типа. На Рис.2, а) представлен один из шести RR -многогранников с правильными треугольными гранями и n -ромбическими вершинами при $6 \leq n < 12$; на Рис.2, б), в), г) — три остальных.

Очевидно, каждый из найденных многогранников имеет ось вращения, обычную или зеркально-поворотную. Наибольшее число граней — 66 — имеет RR -многогранник с правильными треугольными гранями и с 11-гранными ромбическими вершинами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Coxeter H. S. Regular polytopes. London-NY. 1963.
2. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И. Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках. М.: МЦНМО, 2007.
3. Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники. Графы. Оптимизация. М.: Наука, 1981.
4. Cromwell P. R. Polyhedra. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
5. Grunbaum V. Convex Polytopes. John Wiley & Sons, New York, 1967.
6. Johnson N. W. Convex polyhedra with regular faces // Can. J. Math. 1966. Vol. 18, № 1. P. 169–200.
7. Jurij Kovic. Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces // Math. Commun. 2013. Vol. 18. P. 429–440.
8. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 1-220.
9. Тимофеев А. В. О выпуклых многогранниках с равноугольными и паркетными гранями // Чебышевский сборник. 2011. Т. 12, № 2. С. 118–126.
10. Гурин А. М. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями // Сиб. электрон. матем. изв. 2010. Т. 7, № 2. С. А5–А23.
11. Субботин В. И. О выпуклых RR -многогранниках с нетреугольными гранями // “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории”. Материалы XVI Международной конференции, посвящённой 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. Тула: ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2019. С. 277-278.
12. Субботин В. И. Об одном классе сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, № 4. С. 132-140.
13. Субботин В. И. О некоторых обобщениях сильно симметричных многогранников // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, № 2. С. 222-230.
14. Субботин В. И. О вполне симметричных многогранниках // Материалы Международной конференции по дискретной геометрии и её приложениям, посвящённой 70-летию проф. С. С. Рышкова. М.: МГУ. 2001. С. 88-89.
15. Субботин В. И. Выпуклые многогранники с дельтоидными вершинами // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19, № 2. С. 489-498.
16. Subbotin V. I. Characterization of polyhedral partitioning a space. // Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations. Kiev: September, 22-28, 2003. P. 46.

17. Субботин В. И. Многогранники с максимальным числом несимметричных граней // Метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Материалы Международной конф., посвящ. 100-летию Н.В.Ефимова. М.: Макс-Пресс, 2010. С. 60-61.
18. Субботин В. И. О симметричных многогранниках с несимметричными гранями // Материалы Международного семинара “Дискретная математика и её приложения”, посвящ. 80-летию акад. О. Б. Лупанова. М.: МГУ. 2012. С. 398-400.
19. Субботин В. И. О двух классах многогранников с ромбическими вершинами // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2018. Т.476. С.153–164.
20. Субботин В. И. О многогранниках с симметричными ромбическими вершинами и правильными гранями // Материалы Международной конференции, посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т.Базылева. М.: МПГУ. 2019. С. 139-140.
21. Farris S. L. Completely classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra. // *Geometriae Dedicata*. 1988. Vol. 26, № 1. P. 111-124.
22. Grunbaum B. Regular polyhedra — old and new.// *Aequationes mathematicae*. 1977. Vol. 16, № 1-2. P. 1-20.
23. Wills J. M. On polyhedra with transitivity properties // *Discrete and Computational Geometry*. 1986. Vol. 1, № 3. P. 195-199.
24. Berman M. Regular-faced Convex Polyhedra, // *Journal of The Franklin Institute*. 1971. Vol. 291, № 5. P. 329-352.
25. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. II, // *Mathematische Zeitschrift*. 1985. Vol. 188, № 4. P. 559–591.
26. Coxeter H. S. Regular and semi-regular polytopes. III, // *Mathematische Zeitschrift*. 1988. Vol. 200, № 1. P. 3–45.

REFERENCES

1. Coxeter H. S. 1963, *Regular polytopes*, London-NY.
2. Deza M, Grishukhin V. P. , Shtogrin M. I. 2008, *Isometricheskie poliedralnye podgrafy v gipercubach i kubicheskikh reshetkach* [*Scale-Isometric Polytopal Graphs in Hypercubes and Cubic Lattices*], MCNMO, Moscow.
3. Emelichev V. A., Kovalev M. M., Kravzov M. K. 1981, *Mnogogranniki. Grafi. Optimizacija*. [*Polyhedra. Graph. Optimization*], Nauka, Moscow.
4. Cromwell P. R. 1997, *Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge.
5. Grunbaum B. 1967, *Convex Polytopes*, John Wiley & Sons, New York.
6. Johnson N. W. 1966, “Convex polyhedra with regular faces“, *Can. J. Math.*, vol. 18, № 1, pp. 169–200.
7. Jurij Kovic. 2013, “Centrally symmetric convex polyhedra with regular polygonal faces“, *Math. Commun.*, vol. 18, pp. 429–440.
8. Zalgaller V. A. 1967, “Convex polyhedra with regular faces“, *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, vol. 2, pp. 1-220.

9. Timofeenko A. V. 2011, "On convex polyhedra with equiangular and parquet faces", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 12, no. 2, pp. 118-126.
10. Gurin A. M. 2010, "On the history of studying convex polyhedra with regular faces", *Sib. electron. math. izv.*, vol. 7, pp. A5-A23.
11. Subbotin V.I. 2019, "On convex RR -polyhedrons with non-triangular faces", *Materialy XVI megdunarodnoj konferencii "Algebra, teoriya chisel i diskretnaja geometrija: sovremennye problemy, prilozheniya i problemy istorii", posvyashchyonnoj 80-letiyu professora Mishelja Deza (Proc. Int. Conf. "Algebra, number theory and discrete geometry: modern problems, applications and problems of history")*, Tula, pp. 277-278.
12. Субботин В. И. 2016, "On a class of strongly symmetric polytopes", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 17, no. 4, pp. 132-140.
13. Subbotin V.I. 2015, "Some generalizations strongly symmetric polyhedra", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 16, no. 2, pp. 222-230.
14. Subbotin V. I. 2001, "On Completely symmetrical polyhedra", *Materialy Megdunarudnoy konferencii po diskretnoy geometrii i eyo prilozheniyam, posvyashchyonnoj 70-letiyu prof. S.S.Ryshkova (Proc. Int. Conf. on discrete geometry and its applications)*, Moscow, pp. 88-89.
15. Subbotin V. I. 2018, "Convex polyhedra with delthoidal vertices", *Chebyshevskiy sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 489-498.
16. Subbotin V. I. 2003, "Characterization of polyhedral partitioning a space", *Voronoy conference on analytic number theory and spatial tessellations*, Kiev, p. 46.
17. Subbotin V. I. 2010, "Polyhedra with the maximum number of asymmetrical faces", *Materialy megdunarodnoy konferencii "Metriceskaja geometriya poverchnostey i mnogogrannikov", posvyashchyonnoj 100-letiyu N.V.Efimova (Proc. Int. Conf. "Metric geometry of surfaces and polyhedra")*, Moscow, pp. 60-61.
18. Subbotin V. I. 2012, "On symmetric polyhedra with asymmetrical faces", *Trudy megdunarodnogo seminar "Diskretnaja matematika i eyo prilozheniya", posvyashchyonnogo 80-letiyu O. B. Lupanova (Proc. Int. Seminar "Discrete Mathematics and Its Applications")*, Moscow, pp. 398-400.
19. Subbotin V. I. 2018, "On two classes of polyhedra with rhombic vertices", *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, vol. 476, pp. 153-164.
20. Subbotin V. I. 2019, "On polyhedra with symmetric rhombic vertices and regular faces", *Trudy megdunarodnogo seminar "Klassicheskaja i sovremennaja geometrija", posvyashchyonnogo 80-letiyu V.T.Bazyleva (Proc. Int. Conf. "Classical and modern geometry")*, Moscow, pp. 139-140.
21. Farris, S. L. 1988, "Classifying all vertex-transitive and edge-transitive polyhedra", *Geometriae Dedicata*, vol. 26, no. 1, pp. 111-124.
22. Grünbaum, B. 1977, "Regular polyhedra — old and new", *Aequationes mathematicae*, vol. 16, no. 1-2, pp. 1-20.
23. Wills J. M. 1986, "On polyhedra with transitivity properties", *Discrete and Computational Geometry*, vol. 1, no. 3, pp. 195-199.
24. Berman M. 1971, "Regular-faced Convex Polyhedra", *Journal of The Franklin Institute*, vol. 291, no. 5, pp. 329-352.

-
25. Coxeter H.S. 1985, “Regular and semi-regular polytopes. II“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 188, no. 4, pp. 559–591.
26. Coxeter H.S. 1988, “Regular and semi-regular polytopes. III“, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 200, no. 1, pp. 3–45.

Получено 3.06.2019 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.