

## ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 512.643.5:512.643.8:511.331.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-259-272

**Асимптотическая структура  
собственных чисел и собственных векторов  
некоторых треугольных ганкелевых матриц**

Ю. В. Матиясевич

**Матиясевич Юрий Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Российской академии наук, советник РАН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН, президент Санкт-Петербургского математического общества (г. Санкт-Петербург).

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Аннотация**

Ганкелевы матрицы, рассматриваемые в статье, возникли при одной переформулировке гипотезы Римана, предложенной ранее автором. Компьютерные вычисления показали, что в случае дзета-функции Римана собственные числа и собственные вектора таких матриц обладают интересной структурой.

В статье изучается модельная ситуация, когда вместо дзета-функции взята функция, имеющая единственный нуль. Для этого случая указаны первые члены асимптотических разложений наименьшего и наибольших (по абсолютной величине) собственных чисел и соответствующих им собственных векторов.

*Ключевые слова:* Дзета-функция Римана, гипотеза Римана, ганкелевы матрицы, собственные числа, собственные вектора.

*Библиография:* 12 названий.

**Для цитирования:**

Ю. В. Матиясевич. Асимптотическая структура собственных чисел и собственных векторов некоторых треугольных ганкелевых матриц // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 259–272.

## CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 512.643.5:512.643.8:511.331.1

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-259-272

**Asymptotic structure of eigenvalues and eigenvectors  
of certain triangular Hankel matrices**

Yu. V. Matiyasevich

**Matiyasevich Yuri Vladimirovich** — doctor of physical and mathematical sciences, professor, full member of Russian Academy of Sciences, RAS Counselor of St. Petersburg department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, president of the St. Petersburg Mathematical society (St. Petersburg).

*e-mail: yumat@pdmi.ras.ru*

**Abstract**

The Hankel matrices considered in the article arose at one reformulation of the Riemann hypothesis proposed earlier by the author.

Computer calculations showed that in the case of the Riemann zeta function the eigenvalues and the eigenvectors of such matrices have an interesting structure.

The article studies a model situation when instead of the zeta function function one takes a function having a single zero. For this case we indicate the first terms of the asymptotic expansions of the smallest and largest (in absolute value) eigenvalues and the corresponding eigenvectors.

*Keywords:* Riemann zeta function, Riemann Hypothesis, Hankel matrices, eigenvalues, eigenvectors.

*Bibliography:* 12 titles.

**For citation:**

Yu. V. Matiyasevich, 2020, “Asymptotic structure of eigenvalues and eigenvectors of certain triangular Hankel matrices”, *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 259–272.

**1. Введение**

Изучение предельного распределения собственных чисел ганкелевых матриц растущего размера является классической тематикой. При этом следует различать две постановки задачи.

При первой рассматривается растущая последовательность матриц

$$(c_0), \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}, \dots \quad (1)$$

где

$$c_0, c_1, \dots, c_k, \dots \quad (2)$$

— некоторая фиксированная последовательность чисел.

При второй постановке задачи матрицы растут в направлении другой диагонали, например, так:

$$(c_1), \quad \begin{pmatrix} c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_3 & c_2 & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ c_1 & c_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_4 & c_3 & c_2 & c_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_2 & c_1 & c_0 & 0 \\ c_1 & c_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \tag{3}$$

Иными словами, в первом случае фиксируются главные диагонали (как начальные отрезки последовательности (2)), а во втором — побочные диагонали (для всех матриц все элементы этих диагоналей равны одному и тому же элементу  $c_k$  последовательности (2)).

Во втором случае матрицы являются почти треугольными — количество ненулевых поддиагоналей под побочной диагональю останется постоянным.

Поведение собственных чисел матриц последовательностей (1) и (3) является весьма различным. Первая постановка задачи является более традиционной, но в настоящей работе будут рассматриваться последовательности матриц вида (3). Интерес к этому возник у автора при изучении одной переформулировки гипотезы Римана про дзета-функцию (см. [4, 5, 6, 8]). Появляющиеся при этом ганкелевы матрицы описаны ниже в параграфе 2, причём в общей постановке, а не только для дзета-функции. Компьютерные вычисления собственных чисел этих матриц именно для дзета-функции выявили ряд интересных закономерностей и позволили автору сформулировать новые гипотезы про неё; частично эти наблюдения воспроизведены ниже в параграфе 3.

Теоретическое исследование матриц, возникающих в случае дзета-функции, представляется трудным, поскольку их элементы определяются через тейлоровские коэффициенты этой функции, которые ведут себя довольно нерегулярным образом. Для того, чтобы понять, какие из наблюдаемых закономерностей присущи именно дзета-функции, а какие являются общими для матриц рассматриваемого типа, в настоящей работе рассматривается простейшая модельная ситуация — случай, когда матрицы являются треугольными, а их элементы порождаются функцией с единственным нулём вместо дзета-функции. Для таких матриц в параграфах 4 и 5 будут указаны первые члены асимптотических разложений, соответственно, наименьшего и наибольших (по абсолютной величине) собственных чисел и отвечающих им собственных векторов, а затем проведено сравнение с численными данными, полученными для случая дзета-функции Римана.

## 2. Связь определителей специальных ганкелевых матриц с нулями целой функции

Пусть  $f(w)$  — мероморфная функция,

$$f(0) = 1, \tag{4}$$

числа

$$w_1, w_2, \dots, w_n \tag{5}$$

являются нулями этой функции, причём каждый из них встречается в (5) в соответствии со своей кратностью,

$$|w_1| \leq |w_2| \leq \dots \leq |w_{n-1}| \leq |w_n|, \tag{6}$$

и в круге

$$|w| \leq |w_n| \quad (7)$$

нет нулей, отличных от (5).

Рассмотрим *аппроксимацию Паде* типа  $(n, m)$  к  $f(w)$ : пусть  $P_{n,m}(w)$  и  $Q_{n,m}(w)$  — многочлены степеней  $n$  и  $m$  соответственно, такие что

$$f(w) \approx \frac{P_{n,m}(w)}{Q_{n,m}(w)} = \frac{1 + p_{n,m,1}w + \dots + p_{n,m,n}w^n}{1 + q_{n,m,1}w + \dots + q_{n,m,m}w^m} \quad (8)$$

$$= f(w) + O(w^k), \quad (9)$$

где  $k$  имеет максимально возможное значение (поскольку в (8) в нашем распоряжении имеются  $n + m$  коэффициентов

$$p_{n,m,1}, \dots, p_{n,m,n}, q_{n,m,1}, \dots, q_{n,m,m}, \quad (10)$$

то в общем случае  $k = n + m + 1$ ).

Теорема Монтезусе де Болора [9] (см. также [1, 11]) говорит, что при сделанных предположениях относительно нулей (5) именно к ним с ростом  $m$  стремятся нули многочлена  $P_{n,m}(w)$ :

$$P_{n,m}(w) \rightarrow \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{w}{w_n}\right), \quad (11)$$

в частности,

$$|p_{n,m,n}| \rightarrow W_n, \quad (12)$$

где

$$W_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{|w_n|}. \quad (13)$$

Нетрудно понять, что коэффициенты (10) выражаются через коэффициенты разложения

$$f(w) = 1 + \phi_1 w + \dots + \phi_k w^k + \dots \quad (14)$$

Для упрощения последующих формул положим  $\phi_0 = 1$  и  $\phi_k = 0$  при  $k < 0$ . К. Якоби ([3], см. также [1, теорема 1.1.2]) дал явные выражения для  $p_{n,m,n}$  через определители ганкелевых матриц

$$M_{n,m} = (-1)^{n+m} \begin{pmatrix} \phi_{n+m-1} & \phi_{n+m-2} & \dots & \phi_n \\ \phi_{n+m-2} & \phi_{n+m-3} & \dots & \phi_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n & \phi_{n-1} & \dots & \phi_{n-m+1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

а именно,

$$p_{n,m,n} = (-1)^{n+m+1} \frac{\det(M_{n,m+1})}{\det(M_{n,m})} \quad (16)$$

при условии, что  $\det(M_{n,m}) \neq 0$ .

Отсюда и из (12) следует, что если  $n$  фиксировано, а  $m$  стремится к бесконечности, то

$$|\det(M_{n,m})|^{\frac{1}{m}} \rightarrow W_n. \quad (17)$$

### 3. Приложения к гипотезе Римана

Дзета-функция Римана  $\zeta(z)$  при  $\operatorname{Re}(z) > 1$  задаётся рядом Дирихле

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}. \quad (18)$$

Эта функция может быть аналитически доопределена на всю комплексную плоскость за исключением точки  $z = 1$ , которая является единственным и простым полюсом  $\zeta(z)$ .

Уже Л. Эйлер знал, что отрицательные чётные числа,

$$z_1 = -2, z_2 = -4, \dots, z_k = -2k, \dots, \quad (19)$$

являются нулями дзета-функции; ныне эти нули называют *тривиальными*. Б. Риман доказал, что все остальные, *нетривиальные*, нули этой функции лежат в *критической полосе*

$$0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, \quad (20)$$

и высказал свою знаменитую гипотезу о том, что они лежат на *критической прямой*

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Благодаря установленному Риманом *функциональному уравнению* для доказательства этой гипотезы достаточно показать, что тривиальные нули (19) являются единственными нулями дзета-функции, лежащими в полуплоскости

$$\operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Мы избавимся от полюса дзета-функции, введя в рассмотрение целую функцию

$$\zeta^*(z) = 2(z-1)\zeta(z); \quad (23)$$

множитель 2 добавлен ради дальнейшего получения нормировки (4).

При замене переменной

$$z = \frac{w}{w+1}, \quad w = \frac{z}{1-z} \quad (24)$$

полуплоскость (22) переходит в круг

$$|w| < 1, \quad (25)$$

а тривиальные нули (19) переходят в числа

$$w_1 = \frac{z_1}{1-z_1} = -\frac{2}{3}, \dots, w_k = \frac{z_k}{1-z_k} = -\frac{2k}{2k+1}, \dots, \quad (26)$$

являющимися нулями функции

$$\tilde{\zeta}(w) = \zeta^*\left(\frac{w}{w+1}\right). \quad (27)$$

В терминах этой функции гипотеза Римана состоит в том, что в круге (25) нет нулей, отличных от (26).

До конца этого параграфа мы будем полагать, что функция  $\tilde{\zeta}(w)$  взята на роль функции  $f(w)$  из предыдущего параграфа.

Из гипотезы Римана следует, что для любого  $n$  начальные нули (5) (значения которых указаны в (26)) удовлетворяют условиям, предполагавшимся в предыдущем параграфе. Определяя матрицы (15) через тейлоровские коэффициенты функции  $\tilde{\zeta}(w)$ , мы, согласно (17), получаем, что

$$|\det(M_{n,m})|^{\frac{1}{m}} \rightarrow W_n = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}. \quad (28)$$

Нетрудно понять, что справедливо и обратное — если условия (28) выполнены для всех  $n$ , то гипотеза Римана верна. Действительно, предположим, что это не так, и пусть  $\check{w}$  — это нуль функции  $\tilde{\zeta}(w)$ , лежащий в круге (25), но отличный от нулей (26). Возьмём в качестве  $n$  количество нулей функции  $\tilde{\zeta}(w)$ , лежащих в круге  $|w| \leq |\check{w}|$ . Пусть это будут нули  $\check{w}_1, \dots, \check{w}_n$ , занумерованные так, что  $|\check{w}_1| \leq \dots \leq |\check{w}_n|$ . Согласно (17)

$$|\det(M_{n,m})|^{\frac{1}{m}} \rightarrow \prod_{k=1}^n \frac{1}{|\check{w}_k|}. \quad (29)$$

Легко видеть, что  $|\check{w}_1| \leq |w_1|, \dots, |\check{w}_{n-1}| \leq |w_{n-1}|$  и  $|\check{w}_n| < |w_n|$ . Следовательно,

$$\prod_{k=1}^n \frac{1}{|\check{w}_k|} > \prod_{k=1}^n \frac{1}{|w_k|} = \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k}, \quad (30)$$

что даёт требуемое противоречие вместе с (29) и (28).

Приведённая переформулировка гипотезы Римана мотивирует изучение матриц вида (15), в частности, их собственных чисел и собственных векторов. Компьютерные вычисления показали, что в случае дзета-функции эти числа и вектора имеют богатую структуру, частично описанную ниже.

Пусть

$$\mu_{n,m,1}, \mu_{n,m,2}, \dots, \mu_{n,m,m} \quad (31)$$

— собственные числа матрицы  $M_{n,m}$ ; они вещественны, поскольку матрица ганкелева, и её элементы — вещественные числа. Мы будем считать, что нумерация такова, что

$$|\mu_{n,m,1}| \leq \dots \leq |\mu_{n,m,k}| \leq |\mu_{n,m,k+1}| \leq \dots \leq |\mu_{n,m,m}|. \quad (32)$$

На рис. 1 собственные числа (31) для  $n = 1$  изображены следующим образом: число  $\mu_{1,m,k}$  представлено точкой с координатами  $(\ln(|\mu_{1,m,k}|), m)$ , причём точка имеет белый цвет, если  $\mu_{1,m,k} < 0$ , и чёрный в противоположном случае (изображения собственных чисел  $\mu_{n,m,k}$  для  $n > 1$ , можно найти в [5, 6, 7, 8]; в [7] приведены также изображения соответствующих собственных векторов).

На рис. 1 видно, что наименьшие (по абсолютной величине) собственные числа расположены вдоль почти прямолинейных “траекторий”. Автор высказал следующую гипотезу про их параметры.

**Предположение А [6, 7, 8].** Для всех  $n$  и  $k$  существует рациональное число  $A_{n,k}$  такое, что при  $m \rightarrow \infty$

$$\mu_{n,m,k} = (-1)^{n+k} (Y_{n,k} + o(1)) (-w_{n+k})^m, \quad (33)$$

где

$$Y_{n,k} = A_{n,k} \left. \frac{d}{dw} \tilde{\zeta}(w) \right|_{w=w_{n+k}}. \quad (34)$$

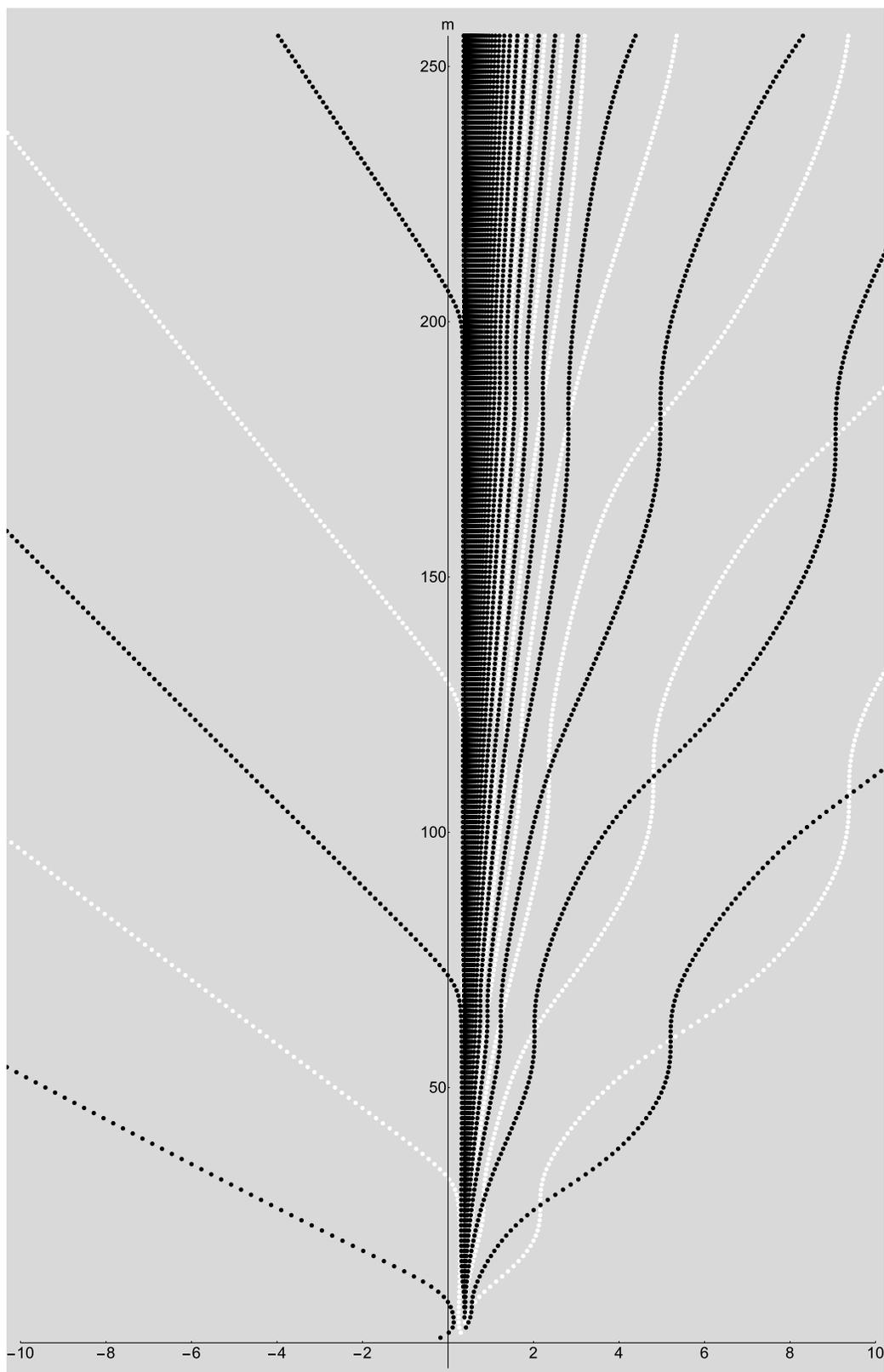
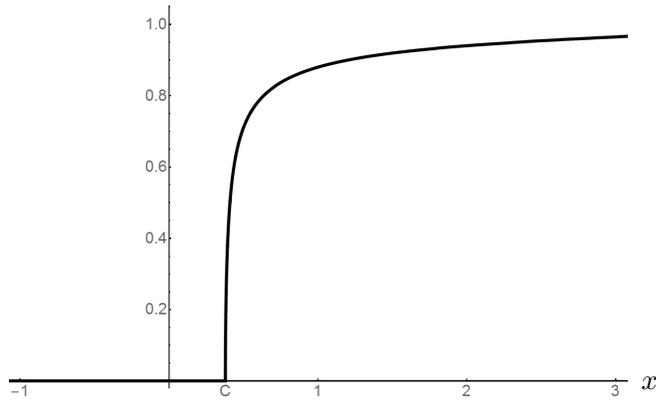


Рис. 1: Логарифмы модулей собственных чисел матриц (15) при  $m = 1, \dots, 256$ ,  $k = 1, \dots, m$ .

Рис. 2: Ожидаемый график  $F(x)$ 

Для  $n = 0$  ожидается, что

$$A_{0,k} = (w_k^2 - 1) \prod_{j=1}^{k-1} \frac{w_j w_k - 1}{(w_j - w_k)^2}. \quad (35)$$

При  $n > 0$  предполагаемую величину  $A_{n,k}$  удалось указать лишь для отдельных значений  $n$  и  $k$  (см. [8, 7]).

На рис. 1 также видно, что собственные числа имеют точку сгущения при  $\ln(|\mu_{1,m,k}|) \approx 0.4$ . По-другому это можно увидеть следующим образом.

Условие (28) можно переписать в логарифмическом виде:

$$\frac{1}{m} \ln(|\det(M_{n,m})|) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \ln(|\mu_{n,m,k}|) \rightarrow \ln(W_n). \quad (36)$$

Положим, что каждое собственное число  $\mu_{n,m,k}$  имеет вес  $1/m$  и рассмотрим соответствующую функцию распределения:

$$F_{n,m}(x) = \sum_{\ln(|\mu_{n,m,k}|) \leq x} \frac{1}{m}. \quad (37)$$

Графики распределений  $F_{n,m}$  для небольших значений  $n$  и  $m$  можно найти в [5, 7].

Используя  $F_{n,m}$  условие (28) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{m} \ln(|\det(M_{n,m})|) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{n,m}(x) \rightarrow \ln(W_n). \quad (38)$$

Вычисления позволили автору высказать гипотезу о наличии предельного распределения.

**Предположение С [8].** Существует непрерывная функция  $F(x)$  такая, что для каждого  $n$  и каждого  $x$  при  $m \rightarrow \infty$

$$F_{n,m}(x) \rightarrow F(x), \quad (39)$$

причём  $F(x) = 0$  при  $x < C_0$  и  $F(x) > 0$  при  $x > C_0$ , где

$$C_0 = \ln(f(1)) = \ln(-\zeta(1/2)) = 0.378679220... \quad (40)$$

Ожидаемый вид  $F(x)$  показан на рис. 2. Удивительным представляется то обстоятельство, что  $F(x)$  не зависит от  $n$ , хотя предельные значения интегралов в (38) от этого параметра зависят.

#### 4. Наименьшее собственное число

В этом и в следующем параграфах мы рассмотрим модельный случай функции, имеющей лишь один нуль,

$$g(z) = 1 - \frac{z}{z_1}. \tag{41}$$

На роль функции  $f(w)$  мы возьмём функцию, получающуюся из  $g(z)$  применением замены переменной (24):

$$f(w) = g\left(\frac{w}{1+w}\right) = 1 - \frac{w}{z_1(1+w)}; \tag{42}$$

эта функция имеет единственный нуль

$$w_1 = \frac{z_1}{1-z_1}.$$

Так определённая функция  $f(w)$  имеет разложение

$$f(w) = 1 - \frac{1}{z_1}w + \frac{1}{z_1}w^2 - \frac{1}{z_1}w^3 + \dots, \tag{43}$$

и, соответственно, ганкелевы матрицы (15) при  $n = 0$  имеют вид

$$M_{0,m} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{z_1} & \frac{1}{z_1} & \dots & \frac{(-1)^{m-1}}{z_1} & (-1)^m \\ \frac{1}{z_1} & \dots & \dots & (-1)^m & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(-1)^{m-1}}{z_1} & (-1)^m & \dots & \dots & 0 \\ (-1)^m & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

На рис. 3 изображены собственные числа матриц (44) для  $z_1 = -100$ . Видно, что первые (наименьшие по абсолютной величине) собственные числа расположены вдоль почти прямолинейной траектории аналогично рис. 1. Для них можно указать первые три члена асимптотики (считая, что  $w_1$  мало):

$$\begin{aligned} \mu_{0,m,1} = & (w_1 - 1)(-w_1)^{m-1} + \\ & + (-m + w_1 + mw_1 - w_1^2 + mw_1^2 - mw_1^3)(-w_1)^{3m-2} + \\ & + \frac{1}{2}(m - 5m^2 + 5mw_1 + 5m^2w_1 - 2w_1^2 - 6mw_1^2 + 10m^2w_1^2 + 2w_1^3 - 6mw_1^3 - \\ & - 10m^2w_1^3 + 5mw_1^4 - 5m^2w_1^4 + mw_1^5 + 5m^2w_1^5)(-w_1)^{5m-3} + \\ & + O(w_1^{7m}). \end{aligned} \tag{45}$$

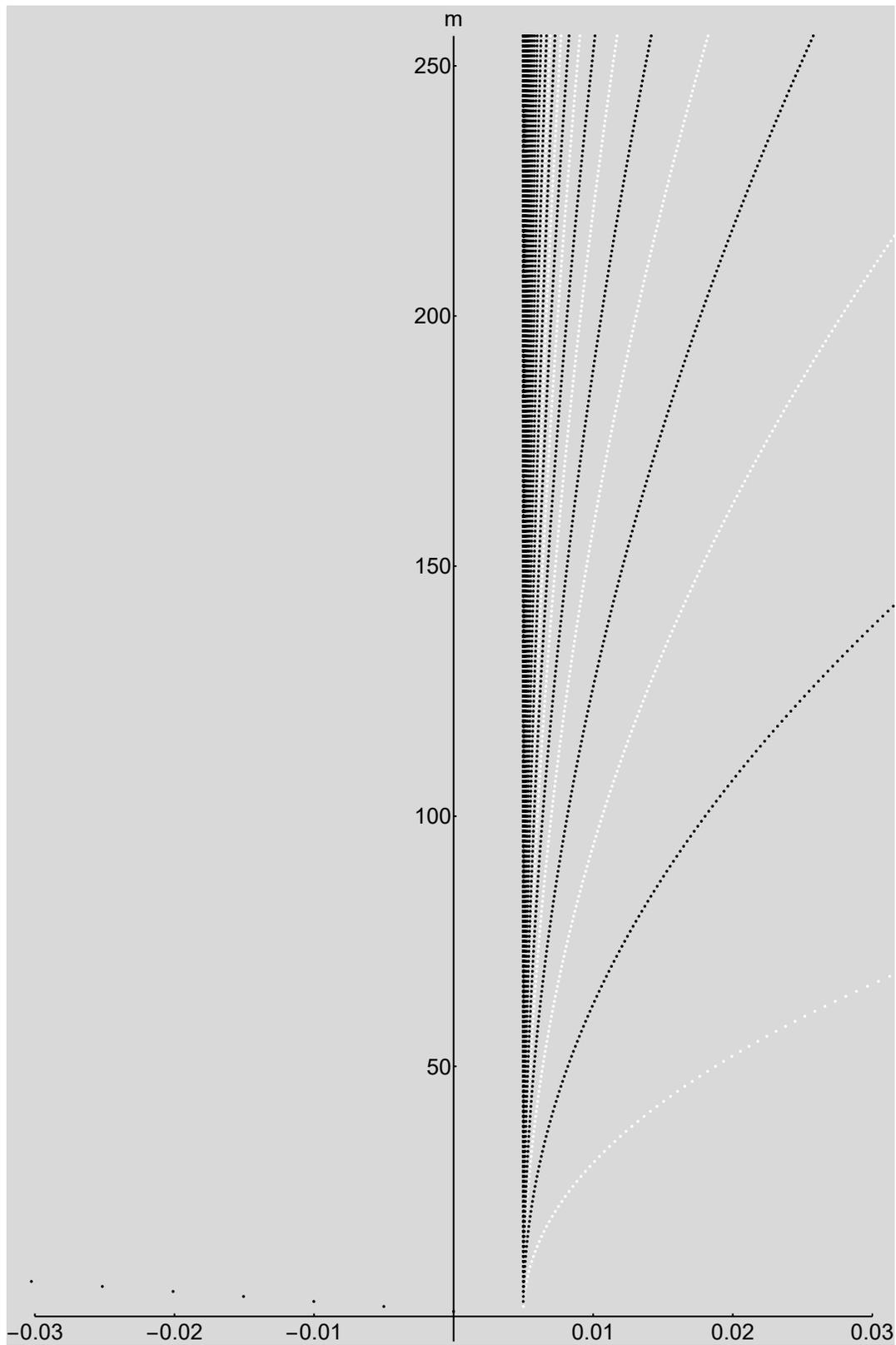


Рис. 3: Логарифмы модулей собственных чисел матриц (44) при  $z_1 = -100$ ,  $m = 1, \dots, 256$  и  $k = 1, \dots, m$ .

Асимптотика для  $j$ -го элемента собственного вектора, соответствующего первому собственному числу, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left(2w_1^{j+2} - 2w_1^{3-j}\right)w_1^m + \\
 & \left(\left(-2j(w_1^2 - 1)w_1^2 - 2w_1^2(2m(w_1^2 - 1) + 1)\right)w_1^{-j} + \right. \\
 & \quad \left.(2w_1(2m(w_1^2 - 1) + w_1^2) - 2jw_1(w_1^2 - 1)w_1^j\right)w_1^{3m} + \\
 & + \left(\left(jw_1(w_1^2 - 1)^2 - j^2w_1(w_1^2 - 1)^2\right)w_1^{-j} + \right. \\
 & \quad \left.+(j^2(w_1^2 - 1)^2 - j(w_1^2 - 1)^2)w_1^j\right)w_1^{5m} + O(w_1^{7m}). \tag{46}
 \end{aligned}$$

Главный член разложения в (45), а именно,  $(w_1 - 1)(-w_1)^{m-1}$ , согласуется с (35) для  $n = 0$ ,  $k = 1$ : в этом случае (35) и (34) дают значения

$$A_{0,1} = w_1^2 - 1 \quad \text{и} \quad Y_{0,1} = A_{0,1} \left. \frac{d}{dw} f(w) \right|_{w=w_1} = 1 - \frac{1}{w_1} \tag{47}$$

соответственно.

Асимптотические разложения (45) и (46) первоначально были найдены на основе анализа численных данных для матриц (44) с разными значениями  $z_1$  и  $m$ . Формальное доказательство затем было получено посредством символьных вычислений в системе МАТНЕМАТИСА.

## 5. Точка сгущения и предельная функция распределения

В этом параграфе мы рассмотрим асимптотическое поведение собственных чисел матриц (44), отличных от самых маленьких (рассматривавшихся в предыдущем параграфе); при этом мы будем считать, что  $z_1$  велико (по абсолютной величине). В этих условиях при  $k \geq 1$

$$(-1)^k \mu_{0,m,k+1} = 1 - \frac{1}{2}z_1^{-1} + \frac{\tau_k}{8}z_1^{-2} + \tag{48}$$

$$+ \left( \frac{\tau_k}{16} + \frac{-\frac{\tau_k}{16} - \frac{\tau_k^2}{16}}{m} \right) z_1^{-3} +$$

$$+ \left( \frac{\tau_k}{32} - \frac{\tau_k^2}{128} + \frac{-\frac{\tau_k}{16} - \frac{\tau_k^2}{16}}{m} + \frac{\frac{3\tau_k}{128} + \frac{\tau_k^2}{16} + \frac{5\tau_k^3}{128}}{m^2} \right) z_1^{-4} +$$

$$+ \left( \frac{\tau_k}{64} - \frac{3\tau_k^2}{256} + \frac{-\frac{3\tau_k}{64} - \frac{13\tau_k^2}{384} + \frac{5\tau_k^3}{384}}{m} + \frac{\frac{9\tau_k}{256} + \frac{3\tau_k^2}{32} + \frac{15\tau_k^3}{256}}{m^2} + \frac{-\frac{\tau_k}{128} - \frac{31\tau_k^2}{768} - \frac{23\tau_k^3}{384} - \frac{7\tau_k^4}{256}}{m^3} \right) z_1^{-5} +$$

$$+ O(z_1^{-6}), \tag{49}$$

где

$$\tau_k = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi k}{2m} \right) = \frac{\pi^2 k^2}{4m^2} + O(m^{-6}). \tag{50}$$

У собственного вектора, соответствующего этому собственному числу,  $j$ -ый элемент асимптотически равен

$$\sin\left(\frac{\pi k}{m}(j-1/2)\right) + \quad (51)$$

$$\begin{aligned} &+ \left(1/4 \left((-1)^k + \sec^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi k}{m}(j-1/2)\right) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{8m} \left((7 + (-1)^k) \sec\left(\frac{\pi k}{2m}\right) - 6\right) \sin\left(\frac{\pi k}{m}(j-1/2)\right) + \\ &\quad \left. + 2(j-1/2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi k}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi k}{m}(j-1/2)\right)\right) z_1^{-1} + O(z_1^{-2}). \end{aligned} \quad (52)$$

Приведённые асимптотические выражения хорошо согласуются с численными данными, полученными для дзета-функции. А именно, если ограничиться первыми тремя членами (48), то видно, что значение

$$C_1 = \ln(f(1)) = \ln\left(1 - \frac{1}{2z_1}\right) \quad (53)$$

является точкой сгущения логарифмов модулей собственных чисел, что аналогично (40). При этом, согласно определению (37), функция распределения  $F_{0,m}(x)$  имеет вид

$$F_{0,m}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < C_1, \\ \frac{1}{m} \left[ \frac{m}{\pi} \arctan(\sqrt{2(x-C_1)}) \right], & \text{в противоположном случае,} \end{cases} \quad (54)$$

так что при возрастании  $m$

$$F_{0,m}(x) \rightarrow F_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < C_1, \\ \frac{1}{\pi} \arctan(\sqrt{2(x-C_1)}), & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \quad (55)$$

График  $F_0(x)$  очень похож на представленный на рис. 1 график ожидаемого предельного распределения для дзета-функции.

В разложении (52) его основной член, а именно, (51), зависит от  $j$  синусоидально, что визуально хорошо согласуется (при небольших значениях  $k$ ) с численными данными, полученными для случая дзета-функции Римана (см. [7]).

Аналогично (45) и (46), асимптотические разложения (49) и (52) первоначально были найдены на основе анализа численных данных для матриц (44), а затем формальное доказательство было получено в системе МАТНЕМАТИСА.

## 6. Заключение

Приведённые асимптотические выражения для собственных чисел и собственных векторов матриц (44) показывают, что уже для простейшей функции, имеющей лишь один нуль, проявляются качественные и количественные свойства, численно обнаруженные ранее для дзета-функции Римана.

Интересным направлением дальнейших исследований представляется нахождение собственных чисел и векторов матриц (15), порожденных другими функциями с конечным количеством нулей. Шаги в этом направлении уже были сделаны в работах [2, 12]. А именно, там указаны собственные числа и собственные вектора матриц (3) для специальных случаев антиленточных ганкедовых матриц; в наших обозначениях это соответствует тому, что все, кроме конечного количества, элементы последовательности (2) равны нулю, то есть случаю, когда  $f(w)$  — это многочлен.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*. М., Мир, 1986.
2. Fonseca C. The eigenvalues of some anti-tridiagonal Hankel matrices // Kuwait J. Sci., Vol. 45:1, pp 1–6, 2018.
3. Jacobi, C. G. J. Über die Darstellung einer Reihe Gegebner Werthe durch eine Gebrochne Rationale Function. // J. Reine Angew. Math., Bd 30, S. 127–156, 1846.
4. Matiyasevich, Yu. *Hidden Life of Riemann's Zeta Function 2. Electrons and Trains*. <http://arxiv.org/abs/0709.0028>, 2007.
5. Matiyasevich, Yu. Riemann's zeta function: Some computations and conjectures. // In Proceedings of Conference on Algorithmic Number Theory (Turku, 2007), A.-M. Ernvall-Hytönen, M. Jutila, J. Karhumäki and A. Lepsitö, Eds., TUCS General Publication Series 46, pp. 87–112, Turku, 2007, 978-952-12-2014-2.  
[http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/turku2007/Matiyasevich\\_2007.pdf](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/turku2007/Matiyasevich_2007.pdf),  
<http://tucs.fi/publications/attachment.php?fname=G46.pdf> (весь том).
6. Matiyasevich, Yu. V. The Riemann hypothesis and eigenvalues of related Hankel matrices. I. // Preprint POMI 14-03, 2014. <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2014/14-03.html>
7. Matiyasevich, Yu. V. *Structure of eigenvalues and eigenvectors of certain almost triangular Hankel matrices*. // Выступление на 7-ой Петербургской конференции по спектральной теории, 4 июля 2015г. [http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/birman\\_2015](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/birman_2015)
8. Ю. В. Матиясеви́ч. Гипотеза Римана в терминах собственных чисел специальных ганкелевых матриц // Совр. пробл. матем., Том 23, С. 871–101, 2016. DOI: 10.4213/spm64.
9. de Montessus de Ballore, R. Sur le fraction continues algébriques. // Bull. Soc. Math. France, Vol.30, 28–36, 1902.
10. Riemann, B. Über die Anzhal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. // Monatsberichte der Berliner Akademie, November, 1859. Included into: Riemann, B. *Gesammelte Werke*. Teubner, Leipzig, 1892; reprinted by Dover Books, New York, 1953,  
[http://www.claymath.org/millennium/Riemann\\_Hypothesis/1859\\_manuscript/zeta.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/1859_manuscript/zeta.pdf).  
English translation:  
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf>.
11. Saff E. B. An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions // J. Approximation Theory, vol. 6:1, pp. 63–67, 1972.
12. Lita da Silva J. *Spectral properties of anti-heptadiagonal persymmetric Hankel matrices*. <http://arxiv.org/abs/1907.00260>

## REFERENCES

1. Baker G. A., Jr., Graves-Morris P. R., *Padé Approximations, Vols. 1 and 2*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vols. 13 and 14, Addison Wesley, Reading, Mass., 1981.
2. Fonseca C. The eigenvalues of some anti-tridiagonal Hankel matrices // Kuwait J. Sci., 45:1, pp 1–6, 2018.

3. Jacobi, C. G. J. Über die Darstellung einer Reihe Gegebner Werthe durch eine Gebrochne Rationale Function. // J. Reine Angew. Math., Bd 30, 127–156, 1846.
4. Matiyasevich, Yu. *Hidden Life of Riemann's Zeta Function 2. Electrons and Trains*.  
<http://arxiv.org/abs/0709.0028>, 2007.
5. Matiyasevich, Yu. Riemann's zeta function: Some computations and conjectures. // In Proceedings of Conference on Algorithmic Number Theory (Turku, 2007), A.-M. Ernvall-Hytönen, M. Jutila, J. Karhumäki and A. Lepsitö, Eds., TUCS General Publication Series 46, pp. 87–112, Turku, 2007, 978-952-12-2014-2.  
[http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/turku2007/Matiyasevich\\_2007.pdf](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/zetahiddenlife/talks/turku2007/Matiyasevich_2007.pdf),  
<http://tucs.fi/publications/attachment.php?fname=G46.pdf> (whole volume).
6. Matiyasevich, Yu. V. The Riemann hypothesis and eigenvalues of related Hankel matrices. I. Preprint POMI 14-03, 2014. <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2014/14-03.html>
7. Matiyasevich, Yu. V. *Structure of eigenvalues and eigenvectors of certain almost triangular Hankel matrices*. // Talk given at 7th St.Petersburg Conference in Spectral Theory on July 4, 2015. [http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/birman\\_2015](http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/talks/birman_2015)
8. Yu. V. Matiyasevich. Riemann's hypothesis in terms of the eigenvalues of special Hankel matrices // Proc. Steklov Inst. Math., 296, suppl. 2, (2017), 78–91, 2017. DOI: 10.1134/S0081543817030099.
9. de Montessus de Ballore, R. Sur le fraction continues algébriques. // Bull. Soc. Math. France, Vol. 30, 28–36, 1902.
10. Riemann, B. Über die Anzhal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. // Monatsberichte der Berliner Akademie, November, 1859. Included into: Riemann, B. *Gesammelte Werke*. Teubner, Leipzig, 1892; reprinted by Dover Books, New York, 1953,  
[http://www.claymath.org/millennium/Riemann\\_Hypothesis/1859\\_manuscript/zeta.pdf](http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/1859_manuscript/zeta.pdf).  
English translation:  
<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf>.
11. Saff E. B., An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions // J. Approximation Theory, Vol. 6:1, pp. 63–67, 1972.
12. Lita da Silva J. *Spectral properties of anti-heptadiagonal persymmetric Hankel matrices*. <http://arxiv.org/abs/1907.00260>.

Получено 18.01.2019 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.