ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-247-258

Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра[1]

И. А. Мартьянов

Мартьянов Иван Анатольевич — аспирант кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет (г. Тула).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Аннотация

В работе изучается константа Никольского (или константа Джексона–Никольского) для комплексных тригонометрических полиномов в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ при $p \geqslant 1$ с периодическим весом Гегенбауэра $|\sin x|^{2\alpha+1}$:

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_p},$$

где $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p_\alpha(\mathbb{T})}$. Д. Джексон (1933) доказал, что $\mathcal{C}_{p,-1/2}(n) \leqslant c_p n^{1/p}$ для всех $n \geqslant 1$. Задача нахождения $\mathcal{C}_{p,-1/2}(n)$ имеет долгую историю. Однако точные значения известны только при $p = 2$. При $p = 1$ задача имеет интересные приложения, например, в теории чисел. Отметим результаты Я. Л. Геронимуса, Л. В. Тайкова, Д. В. Горбачева, И. Е. Симонова, П. Ю. Глазыриной. Для $p > 0$ отметим результаты И. И. Ибрагимова, В. И. Иванова, Е. Левина, Д. С. Любинского, М. И. Ганзбурга, С. Ю. Тихонова, в весовом случае — В. В. Арестова, А. Г. Бабенко, М. В. Дейкаловой, А. Хорват.

Доказывается, что супремум здесь достигается на действительном четном тригонометрическом полиноме с максимумом модуля в нуле. Как следствие, установлена связь с алгебраической константой Никольского с весом $(1-x^2)^\alpha$, исследованная В. В. Арестовым и М. В. Дейкаловой (2015). Доказательство следует их методу и базируется на положительном операторе обобщенного сдвига в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ с периодическим весом Гегенбауэра. Этот оператор был построен и изучен Д. В. Чертовой (2009). Как приложение, предлагается подход к вычислению $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ на основе соотношений двойственности Арестова–Дейкаловой.

Ключевые слова: тригонометрический полином, алгебраический полином, константа Никольского, вес Гегенбауэра.

Библиография: 23 названий.

Для цитирования:
И. А. Мартьянов. Константа Никольского для тригонометрических полиномов с периодическим весом Гегенбауэра // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 247–258.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90152.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 517.5 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-247-258

Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight[2]

I. A. Martyanov

Martyanov Ivan Anatol'evich — graduate student, Department of Applied Mathematics and Computer Science, Tula State University (Tula).
e-mail: martyanow.ivan@yandex.ru

Abstract

We study the Nikolskii constant (or the Jackson–Nikolskii constant) for complex trigonometric polynomials in the space $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ for $p \geqslant 1$ with the periodic Gegenbauer weight $|\sin x|^{2\alpha+1}$:

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \sup_{T\in\mathcal{T}_n\setminus\{0\}} \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_p},$$

where $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p_\alpha(\mathbb{T})}$. D. Jackson (1933) proved that $\mathcal{C}_{p,-1/2}(n) \leqslant c_p n^{1/p}$ for all $n \geqslant 1$. The problem of finding $\mathcal{C}_{p,-1/2}(n)$ has a long history. However, sharp constants are known only for $p = 2$. For $p = 1$, the problem has interesting applications, e.g., in number theory. We note the results of Ja. L. Geronimus, L. V. Taikov, D. V. Gorbachev, I. E. Simonov, P. Yu. Glazyrina. For $p > 0$, we note the results of I. I. Ibragimov, V. I. Ivanov, E. Levin, D. S. Lubinsky, M. I. Ganzburg, S. Yu. Tikhonov, in the weight case — V. V. Arestov, A. G. Babenko, M. V. Deikalova, Á. Horváth.

It is proved that the supremum here is achieved on a real even trigonometric polynomial with a maximum modulus at zero. As a result, a connection is established with the Nikolskii algebraic constant with weight $(1-x^2)^\alpha$, investigated by V. V. Arestov and M. V. Deikalova (2015). The proof follows their method and is based on the positive generalized translation operator in the space $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ with the periodic Gegenbauer weight. This operator was constructed and studied by D. V. Chertova (2009). As an application, we propose an approach to computing $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ based on the Arestov–Deikalova duality relations.

Keywords: trigonometric polynomial, algebraic polynomial, the Nikolskii constant, the Gegenbauer weight.

Bibliography: 23 titles.

For citation:
I. A. Martyanov, 2020, "Nikolskii constant for trigonometric polynomials with periodic Gegenbauer weight", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 247–258.

1. Введение

Пусть $I \subset \mathbb{R}$, $v\colon I \to \mathbb{R}_+$ — некоторая весовая функция, $p \geqslant 1$, $L^p(I;v)$ — пространство Лебега функций $f\colon I \to \mathbb{C}$ с конечной относительно веса v нормой

$$\|f\|_{L^p(I;v)} = \left(\int_I |f(x)|^p\, v(x)\, dx\right)^{1/p}, \quad \|f\|_{L^\infty(I;v)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I} |f(x)|.$$

[2]The reported study was funded by RFBR, project number 19-31-90152.

Будем использовать сокращение $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p(I;v)}$, если это не вызывает недоразумений.

Пусть $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ — одномерный тор, $\alpha \geqslant -1/2$, $v_\alpha(x) = |\sin x|^{2\alpha+1}$ — периодический вес Гегенбауэра (см., например, [11]), $L^p_\alpha(\mathbb{T}) = L^p(\mathbb{T}; v_\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{T}_n$ — множество тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad b_0 = 0,$$

порядка не выше n с комплексными коэффициентами a_k, b_k.

В работе изучается точная константа Никольского разных метрик для периодического веса Гегенбауэра, определяемая равенством

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = \sup_{T \in \mathcal{T}_n \setminus \{0\}} \frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_p}, \quad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p_\alpha(\mathbb{T})}. \tag{1}$$

Часто она называется константой Джексона–Никольского в честь работы Д. Джексона [20].

Также введем константу Никольского для алгебраических полиномов $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$ степени не выше $n \in \mathbb{Z}_+$ с комплексными коэффициентами c_k, множество которых обозначим через $\mathcal{P}_n$. Пусть $\mathbb{I} = [-1, 1]$, $L^p_\alpha(\mathbb{I}) = L^p(\mathbb{I}; (1-x^2)^\alpha)$ — пространство Лебега с алгебраическим весом Гегенбауэра, $\alpha \geqslant -1/2$. Тогда

$$\mathcal{M}_{p,\alpha}(n) = \sup_{P \in \mathcal{P}_n \setminus \{0\}} \frac{\|P\|_\infty}{\|P\|_p}, \quad \|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L^p_\alpha(\mathbb{I})}.$$

Константа $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$ изучена в работе [12]. В ней доказано, что существует действительный экстремальный полином $P_*(x)$ степени n, такой что $\|P_*\|_p = 1$, $P_*(1) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$. Этот полином единственный при $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha > -1/2$ и с точностью до константы совпадает с полиномом, имеющим единичный старший коэффициент и наименее уклоняющимся от нуля в пространстве $L^p(\mathbb{I}; (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^\alpha)$. Все нули P_* простые и находятся на $(-1, 1)$ (см. раздел 6). В работе [13] данные результаты обобщены на случай веса Якоби.

2. Исторический обзор

Задача нахождения $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$ имеет долгую историю, особенно в безвесовом случае $\alpha = -1/2$. Однако даже в нем она вычислена только при $p = 2$. Для $\alpha = -1/2$, $p = 1$ отметим результаты Я. Л. Геронимуса [2] (где задача сведена к решению нелинейного уравнения), Л. В. Тайкова [9, 10] и Д. В. Горбачева [3] (где даны двусторонние оценки), оценки сверху при $p \geqslant 1$ получены в работах Д. Джексона [20], И. И. Ибрагимова [7]. Отметим работы E. Levin и D. S. Lubinsky [21], М. И. Ганзбурга и С. Ю. Тихонова [18], работу [6], где изучается предельное равенство между константами для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа. См. в данных работах более подробный обзор проблемы.

Алгебраическая весовая константа $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$ активно изучалась в работах В. В. Арестова и М. В. Дейкаловой [12, 13] (где в том числе даны двойственные соотношения), И. Е. Симонова и П. Ю. Глазыриной [22] (обобщение результатов Геронимуса) и других математиков из школы В. В. Арестова. Также см. работы [16, 17] о многомерной константе Никольского для сферических полиномов, где отмечается связь с алгебраическим случаем. В работе [6] дана связь тригонометрической и алгебраической констант в безвесовом случае $\alpha = -1/2$. Этот факт позволяет приближенно находить константы, используя соотношения двойственности Арестова–Дейкаловой и решение нелинейных систем уравнений. Здесь эти результаты обобщаются на случай $\alpha > -1/2$.

Для доказательства основного утверждения работы используется положительный оператор обобщенного сдвига в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$, построенный и изученный Д. В. Чертовой [11].

Она использовала его для доказательства точных неравенств Джексона в $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ при $1 \leqslant p \leqslant 2$. Эти результаты обобщают классические неравенства Н. И. Черных и других уральских математиков (см. библиографию в [11, 5]). В этом направлении стоит отметить работы М. Ш. Шабозова и его соавторов (см., например, [23]), а также результаты школы В. И. Иванова (см., например, обзор результатов в [5]), к которой принадлежит Д. В. Чертова. Неравенства разных метрик играют большую роль в теории приближений. Здесь необходимо отметить неоценимый вклад С. М. Никольского и его последовательной.

Константы Никольского в пространстве и родственные экстремальные задачи о минимальной L^1-норме находят приложения в теории чисел. Например, E. Carneiro, M. B. Milinovich и K. Soundararajan применили такие задачи в теории распределения простых чисел и дзета-функции Римана [15]. Можно упомянуть более ранний результат В. В. Арестов и В. П. Кондратьев [1], которые получили наилучшие оценки в задаче Валле-Пуссена–Ландау, связанной с нулями дзета-функции Римана и остаточным членом в асимптотической формуле для распределения простых чисел. Интересно сравнить этот подход, например, с классическими результатами школы А. А. Карацубы (см., например, [8]). Отметим в этом направлении проблему Берлинга–Сельберга, которая связана с односторонним приближением в L^1 целыми функциями экспоненциального типа.

3. Основной результат

Докажем следующее утверждение, аналогичное результатам работ [12, 13, 14, 4].

Теорема 1. *Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$. Тогда*

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = T_*(0),$$

где T_* — экстремальный действительный четный полином порядка n, такой что $\|T_*\|_{p,\alpha} = 1$. При $1 < p < \infty$ и $p = 1$, $\alpha > -1/2$ он единственный.

Кроме того,

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = 2^{-1/p}\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$$

и $T_*(x) = 2^{-1/p}P_*(\cos x)$.

Отметим, что в безвесовом случае $\alpha = -1/2$ теорема легко следует из инвариантности нормы $L^p_{-1/2}(\mathbb{T})$ и класса $\mathcal{T}_n$ относительно операции сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + t)$. При $\alpha > -1/2$ требуется использовать оператор обобщенного сдвига; см., например, работы [12, 13, 14, 4].

Было бы интересно узнать, является полином T_* единственным (с точностью до сдвигов аргумента) при $p = 1$, $\alpha = -1/2$. В статье [12] отмечается этот вопрос.

4. Оператор обобщенного сдвига

Пусть далее $x, t \in \mathbb{T}$. Для периодического веса Гегенбауэра нужный нам линейный положительный оператор обобщенного сдвига $\mathrm{T}^t = \mathrm{T}^t_\alpha$ в пространстве $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ был построен и изучен в работе [11]. Дадим его в интегральной форме. В [11] он вначале введен как мультипликатор в $L^2_\alpha(\mathbb{T})$.

При $\alpha = -1/2$ имеем

$$\mathrm{T}^t f(x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2},$$

а при $\alpha > -1/2$

$$\mathrm{T}^t f(x) = \frac{c_\alpha}{2}\int_0^\pi \big(f(\psi)(1+B) + f(-\psi)(1-B)\big)\sin^{2\alpha}\theta\, d\theta, \tag{2}$$

где

$$\psi = \psi_{x,t}(\theta) = \arccos(\cos x \cos t + \sin x \sin t \cos\theta) \in [0, \pi], \tag{3}$$

$$B = B_{x,t}(t) = \frac{\sin x \cos t - \cos x \sin t \cos\theta}{\sin\psi} \in [-1, 1], \quad 1 - B^2 \geqslant \frac{\sin^2 t \sin^2\theta}{\sin^2\psi}, \tag{4}$$

$$c_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)}, \quad \mathrm{T}^t 1 = 1.$$

Таким образом, T^t определен на всех интегрируемых функциях $f \in L^1_\alpha(\mathbb{T})$. Выражение (2) можно также записать в виде

$$\mathrm{T}^t f(x) = c_\alpha \int_0^\pi \bigl(f_e(\psi) + f_o(\psi)B\bigr) \sin^{2\alpha}\theta \, d\theta, \tag{5}$$

где

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

обозначают соответственно четную и нечетную компоненты функции f. Отсюда следует, что при $\alpha > -1/2$ на четных функциях f оператор T^t совпадает со сдвигом Гегенбауэра

$$f \mapsto c_\alpha \int_0^\pi f(\psi) \sin^{2\alpha}\theta \, d\theta \tag{6}$$

(при $\alpha = 0$ он также называется сдвигом Лежандра).

Следуя [11] введем в пространстве $L^2_\alpha(\mathbb{T})$ ортогональный базис, состоящий из следующих полиномов $\varphi_m = \varphi_{m,\alpha}$:

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_{2k}(x) = R_k^{(\alpha)}(\cos x), \quad \varphi_{2k-1}(x) = R_{k-1}^{(\alpha+1)}(\cos x) \sin x, \quad k \in \mathbb{N},$$

где $R_k^{(\alpha)}(t) = \frac{P_k^{(\alpha,\alpha)}(t)}{P_k^{(\alpha,\alpha)}(1)}$ — полиномы Гегенбауэра (Якоби). Тогда функция $f \in L^2_\alpha(\mathbb{T})$ раскладывается в периодический ряд Фурье–Гегенбауэра

$$f(x) = \sum_{m=0}^\infty f_m \varphi_m(x), \quad f_m = \frac{(f, \varphi_m)_\alpha}{(\varphi_m, \varphi_m)_\alpha}, \quad (f, g)_\alpha = \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{g(x)} \, v_\alpha(x) \, dx,$$

где, напомним, $v_\alpha(x) = |\sin x|^{2\alpha+1}$. Полиномы φ_{2k} и φ_{2k-1} — соответственно четные и нечетные действительные тригонометрические полиномы порядка k и система $\{\varphi_m\}_{m=0}^{2n}$ образует ортогональный базис в подпространстве $\mathcal{T}_n$.

Предложение 9 ([11]). *Пусть $\alpha \geqslant -1/2$, $f \in L^1_\alpha(\mathbb{T})$, $x, t \in \mathbb{T}$. Тогда*

$$\mathrm{T}^t \varphi_{2k}(x) = \varphi_{2k}(t)\varphi_{2k}(x), \quad \mathrm{T}^t \varphi_{2k-1}(x) = \varphi_{2k}(t)\varphi_{2k-1}(x),$$

$$\mathrm{T}^{-t} = \mathrm{T}^t, \quad \mathrm{T}^0 f(x) = f(x), \quad \mathrm{T}^t f \geqslant 0 \text{ для } f \geqslant 0,$$

$$(\mathrm{T}^t f, 1)_\alpha = (f, 1)_\alpha, \quad \|\mathrm{T}^t\|_{p\to p} = 1 \text{ для } 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

$$\mathrm{T}^t f(x) = \mathrm{T}^x f(t) \text{ для четной } f.$$

В отличие от обобщенного сдвига Гегенбауэра (6) оператор $(x, t) \mapsto \mathrm{T}^t f(x)$ при $\alpha > -1/2$ не является симметричным от x, t на всех f. Введем положительный оператор $(t, x) \mapsto \mathrm{S}^x f(t)$ равенством

$$\mathrm{S}^x f(t) = \mathrm{T}^t f(x).$$

При $\alpha = -1/2$ и на четных функциях эти операторы совпадают. Покажем, что норма S^x в $L^p_\alpha(\mathbb{T})$ также не превосходит единицы. Подобный факт известен, например, для положительного оператора обобщенного сдвига Данкля [19].

Лемма 1. (i) *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$, $x \in \mathbb{T}$. *Тогда*

$$\|\mathrm{S}^x\|_{p\to p} = 1.$$

(2) *Если* $p = 1$, $\alpha > -1/2$, $x \in \mathbb{T}$, f *— непрерывна и* $\|\mathrm{S}^x f\|_1 = \|f\|_1$, *то* $\pm f \geqslant 0$ *на* $\mathbb{T}$.

Доказательство. (i) Достаточно рассмотреть случай $\alpha > -1/2$. Вначале покажем, что

$$(\mathrm{S}^x f, 1)_\alpha = (f, 1)_\alpha, \quad f \in L^1_\alpha(\mathbb{T}). \tag{7}$$

Это равенство легко доказать для тригонометрических полиномов, представленных в виде

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 0}\big(f_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x) + f_{2k}\varphi_{2k}(x)\big),$$

(здесь и далее слагаемое с индексом -1 опускается), поскольку

$$\mathrm{S}^x f(t) = \mathrm{T}^t f(x) = \sum_{k\geqslant 0}\varphi_{2k}(t)\big(f_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x) + f_{2k}\varphi_{2k}(x)\big) \tag{8}$$

и в силу ортогональности

$$(\mathrm{S}^x f, 1)_\alpha = \sum_{k\geqslant 0}(\varphi_{2k}, 1)_\alpha\big(f_{2k-1}\varphi_{2k-1}(x) + f_{2k}\varphi_{2k}(x)\big) = (1,1)_\alpha f_0 = (f,1)_\alpha.$$

Теперь, чтобы расширить (7) на все интегрируемые функции, в силу плотности множества тригонометрических полиномов достаточно показать, что оператор $\mathrm{S}^x f$ ограничен в $L^1_\alpha(\mathbb{T})$. Это так, поскольку по (5), (4) и предложению 9

$$|\mathrm{S}^x f(t)| \leqslant c_\alpha\int_0^\pi\big(|f_e(\psi)| + |f_o(\psi)|\big)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta \leqslant 2c_\alpha\int_0^\pi |f|_e(\psi)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta = 2\mathrm{T}^x|f|_e(t)$$

и

$$\|\mathrm{S}^x f\|_1 \leqslant 2\|T^x|f|_e\|_1 \leqslant 2\||f|_e\|_1 \leqslant 2\|f\|_1.$$

Равенство (7) установлено. Из него и положительности оператора S^x следует, что

$$\|\mathrm{S}^x f\|_1 \leqslant \|\mathrm{S}^x|f|\|_1 = (\mathrm{S}^x|f|, 1)_\alpha = (|f|, 1)_\alpha = \|f\|_1. \tag{9}$$

Также имеем

$$|\mathrm{S}^x f(t)| = |\mathrm{T}^t f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \mathrm{T}^t 1 = \|f\|_\infty,$$

откуда получаем $\|\mathrm{S}^x f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Теперь по интерполяционной теореме Рисса–Торина заключаем, что $\|\mathrm{S}^x f\|_p \leqslant \|f\|_p$ для любого $p \geqslant 1$. При этом легко видеть, что на константах имеет место равенство. Поэтому $\|\mathrm{S}^x\|_{p\to p} = 1$.

(ii) Доказательство аналогично [12, лемма 3]. Пусть $\|\mathrm{S}^x f\|_1 = \|f\|_1$. Тогда из (9) следует, что для $t \in \mathbb{T}$

$$\left|\frac{c_\alpha}{2}\int_0^\pi\big(f(\psi)(1+B) + f(-\psi)(1-B)\big)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta\right| = \\ = \frac{c_\alpha}{2}\int_0^\pi\big(|f(\psi)|(1+B) + |f(-\psi)|(1-B)\big)\sin^{2\alpha}\theta\,d\theta.$$

В силу (4) почти всюду имеем $|B| < 1$, поэтому почти всюду при $\theta \in [0,\pi]$

$$f(\psi)(1+B) + f(-\psi)(1-B) = \pm\big(|f(\psi)|(1+B) + |f(-\psi)|(1-B)\big).$$

Отсюда вытекает, что $f(\psi)$ и $f(-\psi)$ не могут менять знак при изменении θ и t. При этом из (3) следует, что ψ покрывает $[0,\pi]$. Поэтому заключаем, что f не может менять знак на $\mathbb{T}$.

Лемма доказана. □

Также нам потребуется

Лемма 2. *Пусть* $T \in \mathcal{T}_n$, $x \in \mathbb{T}$, $\tilde{T}(t) = \mathrm{S}^x T(t)$. *Тогда* $\tilde{T} \in \mathcal{T}_n$ *и* $\tilde{T}(0) = T(x)$.

Эта лемма сразу следует из формулы (8).

5. Доказательство теоремы 1

Вначале покажем, что экстремум в (1) достигается на действительном четном тригонометрическом полиноме с максимумом модуля в нуле.

Подпространство тригонометрических полиномов $\mathcal{T}_n \subset L^p_\alpha(\mathbb{T})$ имеет конечную размерность $2n+1$, поэтому оно является множеством существования. Пусть $T \in \mathcal{T}_n$ — экстремальный полином, такой что

$$\frac{\|T\|_\infty}{\|T\|_p} = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n).$$

Имеем $\|T\|_\infty = \varepsilon T(x_0)$ для некоторой точки $x_0 \in \mathbb{T}$, $\varepsilon = \pm 1$. Как в лемме 2 положим $\tilde{T}(t) = \varepsilon \mathrm{S}^{x_0} T(t)$. Тогда $\tilde{T} \in \mathcal{T}_n$ — четный полином, для которого

$$\tilde{T}(0) = \varepsilon T(x_0) = \|T\|_\infty$$

и по лемме 1 (i)

$$\|\tilde{T}\|_p = \|\mathrm{S}^{x_0} T\|_p \leqslant \|T\|_p.$$

Отсюда

$$\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) \leqslant \frac{\|\tilde{T}\|_\infty}{\|\tilde{T}\|_p}.$$

Следовательно, здесь равенство и $T_* = \tilde{T}$ — экстремальный полином.

Если полином $\tilde{T}$ комплекснозначный, то его можно представить в виде $\tilde{T} = \tilde{T}_1 + i\tilde{T}_2$, где $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2 \in \mathcal{T}_n$ — четные действительные полиномы и $\tilde{T}(0) = \tilde{T}_1(0)$. Теперь можно взять полином $\tilde{T}_1$, для которого, очевидно, $|\tilde{T}_1| \leqslant |\tilde{T}|$ на $\mathbb{T}$, и, следовательно, $\|\tilde{T}_1\|_p \leqslant \|\tilde{T}\|_p$. Поэтому $\tilde{T}_1$ экстремальный.

Полином $T_* = \tilde{T}_1$ можно нормировать условием $\|T_*\|_{p,\alpha} = 1$. Тогда $T_*(0) = \mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$. Его единственность при $1 < p < \infty$ вытекает из строгой нормированности пространства $L^p_\alpha(\mathbb{T})$.

Для доказательства единственности T_* при $p = 1$, $\alpha > -1/2$ вначале установим равенство $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n) = 2^{-1/p}\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$ и связь экстремальных полиномов $T_*(x) = 2^{-1/p} P_*(\cos x)$. Это легко следует из четности тригонометрического полинома T_*, которая позволяет представить его в виде $T_*(x) = P(\cos x)$, $P \in \mathcal{P}_n$. Осталось воспользоваться интегральной формулой

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P(\cos x)|^p \, |\sin x|^{2\alpha+1}\, dx = 2\int_{-1}^{1} |P(x)|^p \, (1-x^2)^\alpha \, dx.$$

Как было сказано при постановке задачи, P_* — единственный при $p = 1$, $\alpha > -1/2$ и он меняет знак на $(-1, 1)$. Поэтому четный тригонометрический полином также будет единственным и меняющим знак. Если же найдется экстремальный полином T_*, не являющийся четным, то как и выше рассмотрим четный экстремальный полином $\tilde{T}_*(t) = \varepsilon \mathrm{S}^{x_0} T_*(t)$. Для него $\|\mathrm{S}^{x_0} T_*\|_1 = \|T_*\|_1$. Отсюда по лемме 1 (ii) находим, что T_*, а, следовательно, и $\tilde{T}_*$ не меняют знак на $\mathbb{T}$. Получили противоречие.

Теорема доказана.

6. Применение соотношений двойственности Арестова–Дейкаловой

Укажем в качестве приложения теоремы 1 как можно приближенно вычислять константу $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$, а, значит, и $\mathcal{C}_{p,\alpha}(n)$. Это можно сделать на основе соотношения двойственности из работы [12] (см. (10)). Для случая $\alpha = -1/2$ предлагаемый метод был применен в работе [6].

Пусть $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha \geqslant -1/2$, $h_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha$ и $H_\alpha(x) = (1-x)h_\alpha(x)$ — весовые функции. Тогда [12]

$$\mathcal{M}_{p,\alpha}(n) = \frac{\|\rho_n\|^{p-1}_{L^p(\mathbb{I};h_\alpha)}}{I(n,p)},$$

где

$$I(n,p) = \int_{-1}^{1} |\rho_n(x)|^{p-1} \operatorname{sign} \rho_n(x)\, h_\alpha(x)\, dx > 0$$

и ρ_n — полином, наименее уклоняющийся от нуля в пространстве $L^p(\mathbb{I}; H_\alpha)$:

$$\rho_n = \operatorname{argmin}\bigl\{\|\rho\|_{L^p(\mathbb{I};H_\alpha)} \colon \rho(x) = x^n + Q(x),\ Q \in \mathcal{P}_{n-1}\bigr\}.$$

Он единственный в этой проблеме, имеет вид

$$\rho_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_{ni}), \quad -1 < x_{n1} < \ldots < x_{nn} < 1,$$

и характеризуется соотношением ортогональности

$$\int_{-1}^{1} Q(x) |\rho_n(x)|^{p-1} \operatorname{sign} \rho_n(x)\, H_\alpha(x)\, dx = 0, \quad \forall\, Q \in \mathcal{P}_{n-1}. \tag{10}$$

Кроме того, экстремальный полином $P_* \in \mathcal{P}_n$, такой что $\|P_*\|_p = 1$ и $P_*(1) = \mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$, равен

$$P_* = \frac{\rho_n}{\|\rho_n\|_p}.$$

Из приведенных выше соотношений следует, что константа $\mathcal{M}_{p,\alpha}(n)$ определяется корнями x_{ni} полинома ρ_n. Для их вычисления запишем соотношение ортогональности (10) на базисных в подпространстве $\mathcal{P}_{n-1}$ функциях. Можно взять ортогональный базис в $L^2(\mathbb{I}; H_\alpha)$, который образуют полиномы Якоби

$$\psi_k(x) = \frac{P_k^{(\alpha+1,\alpha)}(x)}{P_k^{(\alpha+1,\alpha)}(1)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда, полагая $x_{n0} = -1$, $x_{n,n+1} = 1$, получаем

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \int_{x_{ni}}^{x_{n,i+1}} \psi_j(x) \rho_n^{p-1}(x)\, H_\alpha(x)\, dx = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Для произвольного p решение данных нелинейных n уравнений относительно n неизвестных $x_{ni} \in (-1, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, является непростой задачей. Формулы значительно упрощаются в важном случае $p = 1$. Тогда имеем

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \int_{x_{ni}}^{x_{n,i+1}} \psi_j(x)\, H_\alpha(x)\, dx = 0.$$

Как известно, первообразные $\Psi_j(x) = \int_{-1}^{x} \psi_j(t)\, H_\alpha(t)\, dt$ могут быть выражены через полиномы Якоби. Поэтому в этом случае получаем систему нелинейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \bigl(\Psi_j(x_{n,i+1}) - \Psi_j(x_{ni})\bigr) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}\Psi_j(x_{ni}) = 2^{-1}\Psi_j(1),$$

где $\Psi_j(1) = 0$ при $j \geqslant 1$ в силу ортогональности ψ_j. Приближенно эту систему можно эффективно решить методом Ньютона. Вычисления ускоряет эмпирический факт, что нули последовательных экстремальных полиномов перемежаются. Решение системы единственное, поскольку полином ρ_n единственный.

7. Заключение

В работе доказано, что экстремум в задаче о весовой константа Никольского с весом Гегенбауэра достигается на действительном четном тригонометрическом полиноме с максимумом модуля в нуле. Это позволило установить связь с алгебраической константой Никольского с ультрасферическим весом, которая была исследована В. В. Арестовым и М. В. Дейкаловой. Доказательство следует их методу и базируется на положительном операторе обобщенного сдвига, построенным и изученным Д. В. Чертовой. Как приложение, предложен подход к вычислению весовой константы Никольского на основе соотношений двойственности Арестова–Дейкаловой. Детали реализации и развитие данного подхода к приближенному вычислению констант Никольского планируется привести в последующих работах.

Автор благодарит Д. В. Горбачева за помощь при подготовке работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арестов В. В., Кондратьев В. П. Об одной экстремальной задаче для неотрицательных тригонометрических полиномов // Матем. заметки. 1990. Том 47, № 1. С. 15–28.

2. Геронимус Я. Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1938. Том 2, вып. 4. С. 445–456.

3. Горбачев Д. В. Интегральная задача Конягина и (C, L)-константы Никольского // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Том 11, № 2. С. 72–91.

4. Горбачев Д. В., Добровольский Н. Н. Константы Никольского в пространствах $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 67–79.

5. Горбачев Д. В., Иванов В. И. Точное неравенство Джексона в $L_p(\mathbb{R}^d)$ с весом Данкля // Матем. заметки. 2019. Том 105, № 5. С. 666–684.

6. Горбачев Д. В., Мартьянов И. А. О взаимосвязи констант Никольского для тригонометрических полиномов и целых функций экспоненциального типа // Чебышевский сборник. 2018. Том 19, № 2. С. 80–89.

7. Ибрагимов И. И. Экстремальные задачи в классе тригонометрических полиномов // Докл. АН СССР. 1958. Том 121, № 3. С. 415–417.

8. Рахмонов З. Х. Оценка плотности нулей дзета-функции Римана // УМН. 1994. Том 49, № 2(296). С. 161–162

9. Тайков Л. В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // УМН. 1965. Том 20, № 3. С. 205–211.

10. Тайков Л. В. О наилучшем приближении ядер Дирихле // Матем. заметки. 1993. Том 53, № 6. С. 116–121.

11. Чертова Д. В. Теоремы Джексона в пространствах L_p, $1 \le p < 2$, с периодическим весом Якоби // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 1. С. 5–27.

12. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 4. P. 689–708.

13. Arestov V., Deikalova M. Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval // Analysis Math. 2016. Vol. 42, no. 2. P. 91–120.

14. Arestov V., Babenko A., Deikalova M., Horváth Á. Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line // Anal. Math. 2018. Vol. 44, no. 1. P. 21–42.

15. Carneiro E., Milinovich M. B., Soundararajan K. Fourier optimization and prime gaps // Comment. Math. Helv. 2019. Vol. 94. P. 533–568.

16. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere // J. d'Analyse Math. 2019 (to appear); arXiv:1708.09837. 2017. 21 p.

17. Dai F., Gorbachev D., Tikhonov S. Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials // arXiv:1907.03832. 2019. 27 p.

18. Ganzburg M. I., Tikhonov S. Yu. On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, no. 3. P. 449–466.

19. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2019. Vol. 49, no. 3. P. 555–605.

20. Jackson D. Certain problems of closest approximation // Bull. Am. Math. Soc. 1933. Vol. 39. P. 889–906.

21. Levin E., Lubinsky D. Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle // Comput. Methods Funct. Theory. 2015. Vol. 15, no. 3. P. 459–468.

22. Simonov I. E., Glazyrina P. Y. Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight // J. Approx. Theory. 2015. Vol. 192. P. 69–81.

23. Шабозов М. Ш., Фарозова А. Д. Точное неравенство Джексона–Стечкина с неклассическим модулем непрерывности // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Том 22, № 4. С. 311–319.

REFERENCES

1. Arestov, V., Babenko, A., Deikalova, M. & Horváth, Á. 2018. "Nikol'skii inequality between the uniform norm and integral norm with Bessel weight for entire functions of exponential type on the half-line", *Anal. Math.*, vol. 44, no. 1, pp. 21–42.

2. Arestov, V. & Deikalova, M. 2015. "Nikol'skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with ultraspherical weight of algebraic polynomials on an interval", *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 4, pp. 689–708.

3. Arestov, V. & Deikalova, M. 2016. “Nikol’skii inequality between the uniform norm and L_q-norm with Jacobi weight of algebraic polynomials on an interval”, *Analysis Math.*, vol. 42, no. 2, pp. 91–120.

4. Arestov, V. V. & Kondrat’ev, V. P. 1990. “Certain extremal problem for nonnegative trigonometric polynomials”, *Math. Notes*, vol. 47, no. 1, pp. 10–20.

5. Carneiro, E., Milinovich, M. B. & Soundararajan, K. 2019. “Fourier optimization and prime gaps”, *Comment. Math. Helv.*, vol. 94, pp. 533–568.

6. Chertova, D. V. 2009. “Jackson theorems in L_p-spaces, $1 \leqslant p \leqslant 2$, with periodic Jacobi weight”, *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, no. 1, pp. 5–27. (in Russian)

7. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2017. “Nikolskii constants for polynomials on the unit sphere”, *arXiv:1708.09837*, 21 p.

8. Dai, F., Gorbachev, D. & Tikhonov, S. 2019. “Estimates of the asymptotic Nikolskii constants for spherical polynomials”, *arXiv:1907.03832*, 27 p.

9. Ganzburg, M. I. & Tikhonov S. Yu. 2017. “On sharp constants in Bernstein–Nikolskii inequalities”, *Constr. Approx.*, vol. 45, no. 3, pp. 449–466.

10. Geronimus, J. 1938. “Sur un problème extrémal de Tchebycheff”, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, vol. 2, no. 4, pp. 445–456. (in Russian)

11. Gorbachev, D. V., Ivanov, V. I. & Tikhonov, S. Yu. 2019. “Positive L^p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications”, *Constr. Approx.*, vol. 49, no. 3, pp. 555–605.

12. Gorbachev, D. V. 2005. “An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol’skii”, *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl.*, vol. 2, pp. S117–S138.

13. Gorbachev, D. V. & Dobrovolskii, N. N. 2018. “Nikolskii constants in $L^p(\mathbb{R}, |x|^{2\alpha+1}\,dx)$ spaces”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 67–79. (in Russian)

14. Gorbachev, D. V. & Ivanov, V. I. 2019. “A sharp Jackson inequality in $L_p(\mathbb{R}^d)$ with Dunkl weight”, *Math. Notes*, vol. 105, no. 5, pp. 657–673.

15. Gorbachev, D. V. & Martyanov, I. A. 2018. “On interrelation of Nikolskii constants for trigonometric polynomials and entire functions of exponential type”, *Chebyshevskii Sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 80–89. (in Russian)

16. Ibragimov, I. I. 1958. “Extremum problems in the class of trigonometric polynomials”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 121, no. 3, pp. 415–417. (in Russian)

17. Jackson, D. 1933. “Certain problems of closest approximation”, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 39, pp. 889–906.

18. Levin, E. & Lubinsky, D. 2015. “Asymptotic behavior of Nikolskii constants for polynomials on the unit circle”, *Comput. Methods Funct. Theory*, vol. 15, no. 3, pp. 459–468.

19. Rakhmonov, Z. Kh. 1994. “Estimate of the density of the zeros of the Riemann zeta function”, *Uspekhi Mat. Nauk. Russian Math. Surveys*, vol. 49, no. 2, pp. 168–169.

20. Simonov, I. E. & Glazyrina, P. Y. 2015. “Sharp Markov–Nikolskii inequality with respect to the uniform norm and the integral norm with Chebyshev weight”, *J. Approx. Theory*, vol. 192, pp. 69–81.

21. Taikov, L. V. 1965. “A group of extremal problems for trigonometric polynomials”, *Uspekhi Mat. Nauk*, vol. 20, no. 3(123), 205—211. (in Russian)

22. Taikov, L. V. 1993. “On the best approximation of Dirichlet kernels”, *Math. Notes*, vol. 53, no. 6, pp. 640–643.

23. Shabozov, M. Sh. & Farozova, A. D. 2016. “The Jackson–Stechkin inequality with nonclassical modulus of continuity”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, vol. 22, no. 4, pp. 311–319.

Получено 25.11.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.