ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-1-233-246

Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением[1]

Н. В. Максименко

Максименко Наталья Викторовна — аспирант кафедры алгебры и дискретной математики, Оренбургский государственный университет (г. Оренбург).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Аннотация

В теоретико-числовом методе приближенного анализа важную роль играют гиперболические дзета-функции решёток. Каждая такая гиперболическая дзета-функция решётки является рядом Дирихле по усеченному норменному спектру решётки. Поэтому возникает задача об аналитическом продолжении этого класса рядов Дирихле. Как показали Н. М. Добровольский и его соавторы для любой декартовой решётки такое аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость за исключением точки $\alpha = 1$, в которой полюс порядка s, существует. Вопрос о существовании аналитического продолжения для произвольных решёток остается открытым.

Поэтому, естественно, рассмотреть множество всевозможных рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой, и изучить свойства этого функционального пространства над полем комплексных чисел.

Алгебраические решётки и соответствующие алгебраические сетки вошли в науку в 1976 году в работах К. К. Фролова. Каждая такая решётка является решёткой, повторяющейся умножением, а её норменный спектр будет моноидом натуральных чисел. Поэтому можно рассмотреть алгебру рядов Дирихле, соответствующих этому моноиду натуральных чисел.

Такая постановка является новой и ранее не встречалась в литературе.

Принципиальный вопрос, который связан с такой постановкой, заключается в следующем: *Какими аналитическими свойствами обладают ряды Дирихле из соответствующего пространства и соответствующей алгебры?*

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение.

Библиография: 24 названия.

Для цитирования:
Н. В. Максименко. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток и алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 233–246.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020–21-1-233-246

The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication[2]

N. V. Maksimenko

Maksimenko Natalia Viktorowna — postgraduate student of the Department of algebra and discrete mathematics, Orenburg state University (Orenburg).
e-mail: white.background.invisible@mail.ru

Abstract

Hyperbolic Zeta functions of lattices play an important role in the numerical-theoretic method of approximate analysis. Each such hyperbolic Zeta function of the lattice is a Dirichlet series over the truncated normal spectrum of the lattice. Therefore, the problem of analytic continuation of this class of Dirichlet series arises. As shown by N. M. Dobrovolsky and his co-authors, for any Cartesian lattice, such an analytical continuation over the entire complex plane except for the point $\alpha = 1$, in which the pole of order s exists. The question of the existence of an analytic continuation for arbitrary lattices remains open.

Therefore, it is natural to consider the set of possible Dirichlet series generated by a given lattice, and to study the properties of this functional space over the field of complex numbers.

Algebraic lattices and corresponding algebraic grids entered science in 1976 in the works of K. K. Frolov. Each such lattice is a lattice repeated by multiplication, and its normal spectrum will be a monoid of natural numbers. Therefore, we can consider the algebra of Dirichlet series corresponding to this monoid of natural numbers.

This setting is new and has not been seen before in the literature.

The fundamental question that is associated with this statement is the following: *What analytical properties do Dirichlet series have from the corresponding space and the corresponding algebra?*

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product.

Bibliography: 24 titles.

For citation:
N. V. Maksimenko, 2020, "The space of Dirichlet series to multivariate lattices and the algebra of Dirichlet series of grids, repetitive multiplication" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 233–246.

1. Введение

Рассмотрим класс $\mathfrak{A}_s$ всех периодических функций $f(\vec{x})$ с периодом 1 по каждой переменной, у которых их ряд Фурье

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m},\vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m},\vec{x})} d\vec{x}$$

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

абсолютно сходится. Пространство $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})| < \infty$$

является сепарабельным банаховым пространством, изоморфным пространству l_1 — всех абсолютно суммируемых комплексно-значных последовательностей (см. [14]).

Н. М. Коробов ввёл в рассмотрение широкий класс периодических функций $E_s^\alpha(C)$ $(\alpha > 1)$ с быстро убывающими коэффициентами Фурье. Через $E_s^\alpha(C)$ обозначается множество функций из E_s^α с нормой, не превосходящей C, то есть шар в банаховом пространстве E_s^α радиуса C с центром в нуле.

Банахово пространство периодических функций $E_s^\alpha \subset \mathfrak{A}_s$ состоит из функций $f(x_1,\ldots,x_s)$, у которых для коэффициентов Фурье выполняется оценка[3]

$$C(\vec{m}) = O\left(\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\right).$$

Таким образом, эти функции удовлетворяют условиям

$$\sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s} |C(m_1,\ldots,m_s)|(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha = \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} < \infty. \tag{1}$$

Ясно, что для этих функций ряды Фурье сходятся абсолютно, так как

$$\|f(\vec{x})\|_{l_1} \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}(1+2\zeta(\alpha))^s,$$

а поэтому для любого $\alpha > 1$ они представляют непрерывные функции. Здесь и далее, как обычно, $\zeta(\alpha)$ — дзета-функция Римана.

О свойствах класса $E_s^\alpha(C)$ подробно можно узнать в [20] и [21] (так же см. [14]).

Для дальнейшего мы будем рассматривать класс $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$. Очевидно $E_s \subset \mathfrak{A}_s$. Ясно, что класс E_s незамкнут в пространстве $\mathfrak{A}_s$ относительно нормы $\|f(\vec{x})\|_{l_1}$, но является всюду плотным множеством.

Пространства E_s^α $(\alpha > 1)$ — несепарабельные банаховы пространства, изоморфные пространству $l_{s,\infty}$ — ограниченных комплекснозначных функций на фундаментальной решётке $\mathbb{Z}^s$, которое в силу счётности $\mathbb{Z}^s$ изоморфно пространству l_∞ — ограниченных последовательностей комплексных чисел.

Действительно, этот изоморфизм φ_α нормированных пространств E_s^α и $l_{s,\infty}$ задается равенствами для коэффициентов Фурье

$$C(\vec{m}) = \frac{c(\vec{m})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},\ \vec{m}\in\mathbb{Z}^s, \quad ||c(\vec{m})||_\infty = \sup_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}|c(m_1,\ldots,m_s)| < \infty.$$

Таким образом, если $\vec{x}\in\mathbb{R}^s$ — произвольная точка, а $c(\vec{m})\in l_{s,\infty}$, то значение функции $\varphi_\alpha(c(\vec{m}))$ в точке $\vec{x}$ задается с помощью ряда Дирихле

$$\varphi_\alpha(c(\vec{m}))(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s}\frac{c(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{x},\vec{m})}}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \sum_{n=1}^\infty \frac{a(\vec{x},n)}{n^\alpha},$$

где

$$a(\vec{x},n) = \sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s=n} c(\vec{m})e^{2\pi i(\vec{x},\vec{m})}.$$

[3]Здесь и далее для вещественных m полагаем $\overline{m} = \max(1,|m|)$.

Рассмотрим *квадратурную формулу с весами*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R_N[f]. \tag{2}$$

Здесь через $R_N[f]$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s$$

средним взвешенным значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, \ldots, N).$$

Совокупность M точек M_k называется *сеткой* M, а сами точки — *узлами квадратурной формулы*. Величины $\rho_k = \rho(M_k)$ называются весами квадратурной формулы. Будем использовать равноправные обозначения $|M| = N$. В этой работе будем везде предполагать, что все веса вещественнозначные.

Определение 1. *Тригонометрической суммой сетки с весами (M, ρ) для произвольного целочисленного вектора $\vec{m}$ называется выражение*

$$S(\vec{m}, (M, \rho)) = \sum_{\vec{x} \in M} \rho(\vec{x}) e^{2\pi i (\vec{m}, \vec{x})}, \tag{3}$$

а нормированной тригонометрической суммой сетки с весами —

$$S^*(\vec{m}, (M, \rho)) = \frac{1}{|M|} S(\vec{m}, (M, \rho)).$$

Справедлива следующая обобщенная теорема Коробова о погрешности квадратурных формул (см. [13]).[4]

Теорема 1. *Пусть ряд Фурье функции $f(\vec{x})$ сходится абсолютно, $C(\vec{m})$ — ее коэффициенты Фурье и $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ — тригонометрические суммы сетки с весами, тогда справедливо равенство*

$$\begin{aligned} R_N[f] &= C(\vec{0}) \left(\frac{1}{N} S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \frac{1}{N} \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) = \\ &= C(\vec{0}) \left(S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) - 1 \right) + \sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m}) \end{aligned} \tag{4}$$

и при $N \to \infty$ погрешность $R_N[f]$ будет стремиться к нулю тогда и только тогда, когда взвешенные узлы квадратурной формулы равномерно распределены в единичном s-мерном кубе.

В работе [15] дано следующее определение дзета-функции сетки M с весами $\vec{\rho}$.

[4] Здесь и далее $\sum'$ означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Определение 2. *Дзета-функцией сетки M с весами $\vec{\rho}$ называется функция $\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})$, заданная в правой полуплоскости $\alpha=\sigma+it$ $(\sigma>1)$ рядом Дирихле*

$$\zeta(\alpha|M,\vec{\rho})={\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}' \frac{|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S^*(M,\vec{\rho},n)}{n^\alpha}, \tag{5}$$

где

$$S^*(M,\vec{\rho},n)=\sum_{\vec{m}\in N(n)}|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})| \tag{6}$$

и $N(n)$ — норменная поверхность, заданная равенством $N(n)=\{\vec{m}\in\mathbb{Z}^s|\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s=n\}$.

Справедливы две обобщенные теоремы Коробова о погрешности квадратурных формул — это теорема 1 и следующая теорема:

Теорема 2. *Если $f(x_1,\ldots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы справедлива оценка*

$$|R_N[f]|\leq C\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\frac{C}{N}{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=C\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+C\cdot\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}), \tag{7}$$

где сумма $S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})$ определена равенством (3). На классе $E_s^\alpha(C)$ эту оценку нельзя улучшить.

Другими словами теорему 2 можно сформулировать так:

Для нормы $\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}$ линейного функционала погрешности приближенного интегрирования по квадратурной формуле (2) справедливо равенство

$$\|R_N[f]\|_{E_s^\alpha}=\left|\frac{1}{N}S_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\frac{1}{N}{\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}}'\frac{|S_{M,\vec{\rho}}(\vec{m})|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\left|S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0})-1\right|+\zeta(\alpha|M,\vec{\rho}). \tag{8}$$

Следуя К. И. Бабенко [1] и О. В. Локуциевскому [22], в работе [13] дано следующее определение ненасыщаемого алгоритма приближенного интегрирования на классе $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$.

Определение 3. *Будем говорить, что периодическая функция $f(\vec{x})$ из класса $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$ принадлежит конечному показателю $\alpha=\alpha(f(\vec{x}))$, если $f(\vec{x})\in E_s^\alpha$ и $f(\vec{x})\notin E_s^\beta$ для любого $\beta>\alpha$. В противном случае будем говорить, что периодическая функция из класса E_s принадлежит бесконечному показателю.*

Ясно, что бесконечному показателю принадлежит любой конечный тригонометрический полином. Если периодическая функция $f(\vec{x})\in E_s$ не является конечным тригонометрическим полиномом и принадлежит бесконечному показателю, то она будет бесконечно дифференцируемой функцией.

Определение 4. *Будем говорить, что алгоритм приближенного интегрирования $<M(j),\vec{\rho}(j),\Delta>$ $(j=1,2,\ldots)$ периодических функций из класса $E_s=\bigcup\limits_{\alpha>1}E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ,λ), если для любой периодической функции $f(\vec{x})$ конечного показателя $\alpha=\alpha(f(\vec{x}))$ и погрешности приближенного интегрирования выполняется равенство*

$$R_{N_j}[f(\vec{x})]=O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right). \tag{9}$$

Как известно (см. [21]), методом оптимальных коэффициентов Коробова можно построить ненасыщаемые алгоритмы типа $((s-1)\alpha, 1)$, а модифицированным методом Фролова — $((s-1), 1)$. Для случая равномерных сеток имеем тип $(0, \frac{1}{s})$.

Из теоремы 2 сразу следует, что если алгоритм приближенного интегрирования

$$< M(j), \vec{\rho}(j), \Delta > \ (j = 1, 2, \ldots)$$

периодических функций из класса $E_s = \bigcup\limits_{\alpha>1} E_s^\alpha$ ненасыщаемый типа (γ, λ), то

$$S^*_{M,\vec{\rho}}(\vec{0}) = 1, \quad \zeta(\alpha|M(j), \vec{\rho}(j)) = O\left(\frac{\ln^\gamma N_j}{N_j^{\lambda\cdot\alpha}}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Из предыдущего видно, что ряды Дирихле, порождённые решетками, естественно возникают в теоретико-числовом методе в приближенном анализе и играют в его развитии существенную роль.

Целью данной работы является изучение функционального пространства над полем комплексных чисел всевозможных рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой.

2. Пространство рядов Дирихле для многомерных решёток

Пусть Λ — произвольная s-мерная решётка в $\mathbb{R}^s$. Рядом Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ для решётки Λ будем называть произвольную функцию, заданную равенством

$$f(\alpha|\Lambda) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda} \frac{a(\vec{x})}{(\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} A(\lambda_k)\lambda_k^{-\alpha} \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_f \geqslant \sigma_f^*,$$

где σ_f — абсцисса абсолютной сходимости и σ_f^* — абсцисса сходимости, а λ_k — точки усечённого норменного спектра $Q_{sp}(\Lambda)$, который определяется равенством

$$Q_{sp}(\Lambda) = \{\lambda \mid \lambda = q(\vec{x}),\ \vec{x} \in \Lambda\backslash\{\vec{0}\}\}, \quad q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s$$

и

$$A(\lambda_k) = \sum_{\overline{x}_1\cdot\ldots\cdot\overline{x}_s = \lambda_k} a(\vec{x}).$$

Как хорошо известно [23, 24], для любых рядов Дирихле справедливо неравенство $\sigma_f \leqslant \sigma_f^* + 1$.

По теореме Абеля (см. [23], стр. 106)

$$f(\alpha|\Lambda) = \alpha \int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{A^*(t)}{t^{\alpha+1}} dt, \quad A^*(t) = \sum_{q(\vec{x})\leqslant t} a(\vec{x}).$$

Множество всех рядов Дирихле, порожденных заданной решёткой Λ, обозначим через $\mathbb{D}(\Lambda)$.

Далее мы будем следовать работе [19], подчёркивая отличия случая решётки от случая моноида.

Пусть $\mathbb{K}$ — произвольное числовое поле. Таким образом, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$. Если все коэффициенты $a(\vec{x}) \in \mathbb{K}$, то множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(\Lambda)_\mathbb{K}$ и оно является бесконечномерным линейным функциональным пространством над полем $\mathbb{K}$.

Выделим подпространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)_\mathbb{K}$ условием $\sup_{\vec{x}\in\Lambda} |a(\vec{x})| < \infty$. На $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)_\mathbb{K}$ зададим норму

$$\|f(\alpha|\Lambda)\| = \sup_{\vec{x}\in\Lambda} |a(\vec{x})|.$$

Относительно заданной нормы $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)_\mathbb{K}$ является несепарабельным пространством. Оно будет банаховым, если поле $\mathbb{K}$ — банахово пространство над полем $\mathbb{Q}$ относительно нормы, заданной абсолютной величиной числа из поля $\mathbb{K}$. Так как отсюда следует, что либо $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, то $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)_\mathbb{K}$ — банахово пространство, только для $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, либо $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Нетрудно понять, что пространство $\mathbb{D}^\infty(\Lambda)_\mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$ не является алгеброй, так как нет замкнутости относительно произведения рядов Дирихле.

Более того, для произвольной решётки Λ произведение двух рядов Дирихле $f(\alpha|\Lambda)$ и $g(\alpha|\Lambda)$, вообще говоря, не является рядом Дирихле $h(\alpha|\Lambda)$, так как для произвольной решётки Λ покоординатное произведение двух точек $\vec{x}$ и $\vec{y}$ из Λ не является точкой решётки Λ.

Принципиальное отличие пространства $\mathbb{D}(\Lambda)_\mathbb{K}$ от случая пространства $\mathbb{D}(M)_\mathbb{K}$, когда M — произвольный моноид натуральных чисел, в том, что усечённый норменный спектр $Q_{sp}(\Lambda)$ не является мультипликативным моноидом. Положение можно исправить, если рассмотреть мультипликативный моноид вещественных чисел $M(Q_{sp}(\Lambda))$, порожденный усечённым норменным спектром $Q_{sp}(\Lambda)$. Таким образом,

$$M(Q_{sp}(\Lambda))=\{\lambda=q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_n})|\vec{x_1},\ldots,\vec{x_n}\in\Lambda,n\geqslant 1\}.$$

Ясно, что $Q_{sp}(\Lambda)\subseteq M(Q_{sp}(\Lambda))$ и мультипликативный моноид $M(Q_{sp}(\Lambda))$ — дискретное множество. Действительно, для любого $\lambda\in M(Q_{sp}(\Lambda))$ имеем:

$$\lambda\geqslant 1,\quad \lambda=q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_n}),\quad 1\leqslant\overline{x}_{1,j},\ldots,\overline{x}_{s,j}\leqslant\lambda.$$

Отсюда следует, что $\vec{x_n}\in[-\lambda;\lambda]^s$. Так как любому s-мерному кубу принадлежит конечное число точек решётки Λ в силу её дискретности, то дискретность мультипликативного моноида $M(Q_{sp}(\Lambda))$ доказана.

Порядком точки λ усечённого норменного спектра называется количество точек $\vec{x}$ решётки Λ, для которых $q(\vec{x})=\lambda$. Порядок точки λ обозначается через $q(\lambda)$. Нетрудно понять, что величина

$$D(T|\Lambda)=\sum_{\lambda\in Q_{sp}(\Lambda),\,\lambda\leqslant T}q(\lambda)$$

— количество точек решётки Λ в гиперболическом кресте $K_s(T)=\{\vec{x}\mid q(\vec{x})\leqslant T\}$.

В работе [16] доказана асимптотическая формула

$$D(T|\Lambda)=\frac{2^sT\ln^{s-1}T}{(s-1)!\det\Lambda}+O\left(\frac{T\ln^{s-2}T}{\det\Lambda}\right).$$

Прежде чем идти дальше, сделаем принципиальное замечание. Вся теория, построенная в работе [19], относится к случаю мультипликативного моноида натуральных чисел, а введённый выше мультипликативный моноид $M(Q_{sp}(\Lambda))$ является, вообще говоря, мультипликативным моноидом вещественных чисел. Этот случай ближе к тематике работ Б. М. Бредихина [2]–[10], но они посвящены другим вопросам, которых мы в данной работе не касаемся.

Поэтому далее мы будем утверждения, аналогичные утверждениям из работы [19], приводить, как правило, без доказательств, кроме тех случаев, когда надо проводить дополнительные рассуждения, связанные со спецификой мультипликативного моноида вещественных чисел.

Рассмотрим произведение двух рядов Дирихле из $\mathbb{D}(\Lambda)_\mathbb{K}$:

$$f(\alpha|\Lambda)=\sum_{n\in Q_{sp}(\Lambda)}\frac{A(n)}{n^\alpha},\quad g(\alpha|\Lambda)=\sum_{n\in Q_{sp}(\Lambda)}\frac{B(n)}{n^\alpha}\quad A(n),B(n)\in\mathbb{K},$$

имеем:

$$f(\alpha|\Lambda)g(\alpha|\Lambda)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{C(n)}{n^{\alpha}},$$

где

$$C(n)=\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in Q_{sp}(\Lambda)}A(m)B\left(\frac{n}{m}\right)\in\mathbb{K}\qquad n\in M(Q_{sp}(\Lambda)).$$

Следовательно $f(\alpha|\Lambda)g(\alpha|\Lambda)\in\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$.

Для произведения двух произвольных рядов Дирихле из $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ имеем аналогичные формулы, но с некоторыми отличиями:

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{a(n)}{n^{\alpha}},\quad g(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{b(n)}{n^{\alpha}}\quad a(n),b(n)\in\mathbb{K},$$

$$f(\alpha)g(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{c(n)}{n^{\alpha}},$$

$$c(n)=\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in M(Q_{sp}(\Lambda))}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)\in\mathbb{K}\qquad n\in M(Q_{sp}(\Lambda))$$

и $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ является коммутативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

Хотя мультипликативный моноид $M(Q_{sp}(\Lambda))$, вообще говоря, не является мультипликативным моноидом натуральных чисел, но многие утверждения из [19] справедливы и в этом более общем случае. В частности, доказывается ассоциативность алгебры $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ над полем $\mathbb{K}$.

Если ряд Дирихле $f(\alpha)\in\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ имеет коэффициент $a(1)\neq 0$, то существует обратный ряд Дирихле $f^{-1}(\alpha)\in\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$, то есть такой ряд Дирихле

$$f^{-1}(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{b(n)}{n^{\alpha}},\quad\text{что}\quad f(\alpha)f^{-1}(\alpha)=1.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты $b(n)$ удовлетворяют соотношениям:

$$b(1)=\frac{1}{a(1)},\quad b(n)=-\frac{1}{a(1)}\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in M(Q_{sp}(\Lambda)),\,m>1}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)\quad n\in M(Q_{sp}(\Lambda)),n>1.$$

Множество всех обратимых рядов Дирихле из алгебры $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ обозначим через $\mathbb{D}^{*}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$. Ясно, что это мультипликативный моноид, но справедливо более сильное утверждение.

Теорема 3. *Множество $\mathbb{D}^{*}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ всех обратимых рядов Дирихле из алгебры $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ является бесконечной абелевой группой, состоящей из рядов, у которых первый коэффициент отличен от нуля.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы из [19]. □

Обозначим через A_f область аналитичности ряда Дирихле $f(\alpha)$, то есть максимальную область, куда ряд Дирихле $f(\alpha)$ аналитически продолжается. Через P_f — множество полюсов его аналитического продолжения, а через Z_f — множество его нулей. Очевидно, что для $f(\alpha)\in\mathbb{D}^{*}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ выполняются соотношения

$$A_{f^{-1}}=(A_f\setminus Z_f)\bigcup P_f.$$

3. Алгебра целых рядов Дирихле

Рассмотрим кольцо целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Ряд Дирихле

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{a(n)}{n^{\alpha}}\qquad a(n)\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}, n\in M(Q_{sp}(\Lambda))$$

будем называть целым рядом Дирихле над алгебраическим полем $\mathbb{K}$ для моноида $M(Q_{sp}(\Lambda))$. Множество всех таких рядов Дирихле будем обозначать через $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. Ясно, что $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}\subset\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$.

Нетрудно видеть, что множество целых рядов Дирихле, с одной стороны, является $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$-модулем, а с другой стороны, — алгеброй над целым алгебраическим кольцом $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Обозначим через $\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$ группу алгебраических единиц кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$ алгебраического поля $\mathbb{K}$. Через $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ обозначим подмножество целых рядов Дирихле из алгебры $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$, у которых $a(1)\in\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$.

Теорема 4. *Множество $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле является мультипликативной группой.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что множество $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ замкнуто относительно операции умножения рядов Дирихле. Действительно, если

$$f(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{a(n)}{n^{\alpha}},\quad g(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{b(n)}{n^{\alpha}}\quad a(n),b(n)\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}},\quad a(1),b(1)\in\mathbb{U}_{\mathbb{K}},$$

то

$$f(\alpha)g(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{c(n)}{n^{\alpha}},\quad c(n)=\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in M(Q_{sp}(\Lambda))}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}\quad n\in M(Q_{sp}(\Lambda)),$$
$$c(1)=a(1)b(1)\in\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$$

и замкнутость установлена.

Во-вторых, единичным элементом является ряд Дирихле $f(\alpha)\equiv 1$.

Наконец, для любого $f(\alpha)\in\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$ имеем:

$$f^{-1}(\alpha)=\sum_{n\in M(Q_{sp}(\Lambda))}\frac{b(n)}{n^{\alpha}},\quad b(1)=\frac{1}{a(1)},\quad b(n)=-\frac{1}{a(1)}\sum_{m|n,\,m,\,\frac{n}{m}\in M(Q_{sp}(\Lambda)),\,m>1}a(m)b\left(\frac{n}{m}\right)$$
$$n\in M(Q_{sp}(\Lambda)),n>1.$$

Ясно, что $b(1)\in\mathbb{U}_{\mathbb{K}}$. Далее индукцией[5] по n мы получаем, что для всех $n\in M(Q_{sp}(\Lambda))$, $n>1$ имеем $b(n)\in\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$, что доказывает $f^{-1}(\alpha)\in\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}$. Тем самым теорема полностью доказана. □

Если определить множество $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{1_{\mathbb{K}}}$ целых рядов Дирихле с $a(1)=1$, то нетрудно видеть, что это будет подгруппа: $\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{1_{\mathbb{K}}}\subset\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}}\subset\mathbb{D}^{*}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$.

[5]Индукция возможна, так как мультипликативный моноид $M(Q_{sp}(\Lambda))$ — дискретное множество.

4. Алгебра необратимых рядов Дирихле

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ определим его необратимую часть $f^*(\alpha)$ равенством $f^*(\alpha) = f(\alpha) - a(1)$. Ясно, что $f^*(\alpha) = f(\alpha)$ только для необратимых рядов Дирихле. Обозначим множество всех необратимых рядов Дирихле через $\mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$, а множество всех необратимых целых рядов Дирихле обозначим через $\mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$. Очевидно, что $\mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ — алгебра над полем $\mathbb{K}$, а $\mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ — алгебра над кольцом $\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}$.

Ясно, что справедливы следующие разложения в прямые суммы:

$$\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} \bigoplus \mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}, \qquad \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \bigoplus \mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}.$$

Кроме этого, справедливы равенства:

$$\mathbb{D}^*(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^* + \mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}, \qquad \mathbb{D}^*(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{Z}^*_{\mathbb{K}} + \mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}},$$
$$\mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{U}_{\mathbb{K}}} = \mathbb{U}_{\mathbb{K}} + \mathbb{D}^0(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}},$$

где $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и $\mathbb{Z}^*_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}_{\mathbb{K}} \setminus \{0\}$.

Для произвольного ряда Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ определим его дополнительную часть $f^{**}(\alpha)$ равенством $f^{**}(\alpha) = (1 + f^*(\alpha))^{-1} - 1$.

Если дан произвольный ряд Дирихле $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$, то его приведенным рядом Дирихле назовём ряд $f^{(p)}(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$, заданный равенством $f^{(p)}(\alpha) = 1 + f^*(\alpha)$. Очевидно, что для $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{1_{\mathbb{K}}}$ будет $f^{(p)}(\alpha) = f(\alpha)$.

Теорема 5. *Для любого* $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{K}}$ *справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)).$$

Доказательство. Дословно повторяет доказательство аналогичной теоремы из [19]. □

Следствие 1. *Для любого* $f(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$ *справедливо равенство*

$$f(\alpha) = f^{(p)}(\alpha)(a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha)),$$

где $f^{(p)}(\alpha), a(1) + f^*(\alpha) + f(\alpha)f^{**}(\alpha) \in \mathbb{D}(M(Q_{sp}(\Lambda)))_{\mathbb{Z}_{\mathbb{K}}}$.

Доказательство. Дословно повторяет доказательство аналогичного следствия из [19]. □

5. Алгебра рядов Дирихле решёток, повторяющихся умножением

Как было отмечено выше (см. стр. 239), усечённый норменный спектр $Q_{sp}(\Lambda)$ не является мультипликативным моноидом. Поэтому было введено понятие мультипликативного моноида вещественных чисел $M(Q_{sp}(\Lambda))$, порожденного усечённым норменным спектром $Q_{sp}(\Lambda)$.

Сама решётка Λ может быть замкнута относительно умножения, если это случай решётки, повторяющейся умножением (см. [12]). Но даже в этом случае отображение $q(\vec{x}) : \Lambda \to \mathbb{R}$ не является гомоморфизмом. Поясним сказанное на двух примерах.

Если F — чисто вещественное алгебраическое расширение степени s поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Z}_F$ — кольцо целых алгебраических чисел поля F, то s-мерной решёткой является множество $\Lambda(F)$, следующим способом образованное с помощью $\mathbb{Z}_F$:

$$\Lambda(F) = \{(\Theta^{(1)}, \ldots, \Theta^{(s)}) \mid \Theta^{(1)} \in \mathbb{Z}_F\}, \tag{10}$$

где $\Theta^{(1)},\dots,\Theta^{(s)}$ — система алгебраически сопряженных чисел, и если d — дискриминант поля F, то $\det\Lambda(F)=\sqrt{d}$.

Легко видеть, что $q(\vec{x})=1$ для $\vec{x}\in\Lambda(F)$ только для $\vec{x}=(1,\dots,1)$. С другой стороны, если $\varepsilon\in\mathbb{Z}_F$, то $q(\vec{\varepsilon})>1$, где $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon^{(1)},\dots,\varepsilon^{(s)})$, ε — алгебраическая единица поля F. Далее имеем: $\varepsilon_1=\varepsilon^{-1}$ — алгебраическая единица поля F, $\vec{\varepsilon_1}=((\varepsilon^{(1)})^{-1},\dots,(\varepsilon^{(s)})^{-1})$, $q(\vec{\varepsilon}\vec{\varepsilon_1})=q(\vec{1})=1<q(\vec{\varepsilon})q(\vec{\varepsilon_1})$.

Второй пример связан с приводимой решёткой, повторяющейся умножением, $\Lambda(\vec{m})=$ $=m_1\mathbb{Z}\times\ldots\times m_s\mathbb{Z}$, где $m_1,\dots,m_s$ — натуральные числа. Если $\vec{x}\in\Lambda$, то $\vec{x}=(m_1n_1,\dots,m_sn_s)$, $\vec{n}=(n_1,\dots,n_s)\in\mathbb{Z}^s$. Ясно, что для $q(\vec{x})$ справедливо равенство

$$q(\vec{x})=\prod_{n_\nu\neq0}m_\nu|n_\nu|.$$

Если $\vec{x}\vec{y}=(x_1y_1,\dots,x_sy_s)=\vec{0}$, $\vec{x}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$, то $q(\vec{x}\vec{y})=1<q(\vec{x})q(\vec{y})$, если $q(\vec{x})>1$, $q(\vec{y})>1$.

Теорема 6. *Для любого $\vec{m}\in\mathbb{N}^s$ справедливо равенство*

$$M(Q_{sp}(\Lambda(\vec{m})))=Q_{sp}(\Lambda(\vec{m})).$$

Доказательство. Чтобы доказать требуемое равенство, достаточно показать, что для любых $\vec{x_1},\dots,\vec{x_k}\in\Lambda(\vec{m})$, отличных от $\vec{0}$, найдётся $\vec{x}\in\Lambda(\vec{m})$ такой, что $q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_k})=q(\vec{x})$.

Пусть ν_0 — наименьшее ν такое, что $x_{j,\nu}\neq0$, тогда $m_{\nu_0}|q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_k})$. Определим $\vec{x}=(x_1,\dots,x_s)$ с помощью равенств

$$x_\nu=\begin{cases}0, & \text{при } \nu\neq\nu_0,\\ q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_k}), & \text{при } \nu=\nu_0,\end{cases}$$

тогда $\vec{x}\in\Lambda(\vec{m})$ и $q(\vec{x})=q(\vec{x_1})\cdot\ldots\cdot q(\vec{x_k})$, что доказывает утверждение теоремы. □

Из доказанной теоремы следует, что в случае приводимой решёткой, повторяющейся умножением, $\Lambda(\vec{m})$ пространство $\mathbb{D}(\Lambda(\vec{m}))_{\mathbb{K}}$ является коммутативной, ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{K}$.

6. Заключение

В данной статье заложены основы теории пространств и алгебр рядов Дирихле, порожденных s-мерными решётками. Показано, что пространство таких рядов Дирихле вкладывается в алгебру рядов Дирихле моноида вещественных чисел. Таким образом возникает более общий случай, чем в работе [19]. Этот более общий случай близок по объекту исследования с тем, что рассматривался в работах Б. М. Бредихина. Один из интересных вопросов связан с выделением в спектре $Q_{sp}(\Lambda)$ тех элементов, которые будут простыми элементами в мультипликативном моноиде вещественных чисел $M(Q_{sp}(\Lambda))$. Здесь возникают непростые вопросы о подходящем понятии плотности для моноида $M(Q_{sp}(\Lambda))$ и вида асимптотического закона распределения простых элементов в зависимости от решётки Λ. Мы предполагаем рассмотреть такие вопросы в дальнейших исследованиях.

Выражаю свою благодарность научному руководителю профессору Н. М. Добровольскому за постановку задачи и доценту Н. Н. Добровольскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

2. Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$”, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.

3. Б. М. Бредихин, “Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп”, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.

4. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

5. Б. М. Бредихин, “О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп”, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.

6. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.

7. Б. М. Бредихин, “Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией”, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.

8. Б. М. Бредихин , Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полу групп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.

9. Б. М. Бредихин , О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 — 612.

10. Б. М. Бредихин , О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой ба зой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.

11. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

12. Б. Н. Делоне, Д. К. Фаддеев Теория иррациональностей третьей степени // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1940. Т. 11. С. 3–340.

13. Добровольская Л. П., Добровольский Н. М., Симонов А. С. О погрешности приближенного интегрирования по модифицированным сеткам // Чебышевский сборник, 2008 Т. 9. Вып. 1(25). Тула, Из-во ТГПУ им. Л. Н. Толстого. С. 185–223.

14. Добровольский Н. М., Манохин Е. В. Банаховы пространства периодических функций // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Т. 4, вып. 3. Тула, 1998. С. 56–67.

15. Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. О непрерывности дзета-функции сетки с весами // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. — Тула, 2001. С. 82–86.

16. Н. М. Добровольский, А. Л. Рощеня, “О числе точек решетки в гиперболическом кресте”, Матем. заметки, 63:3 (1998). С. 363–369.

17. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

18. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о ”заградительном ряде” для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

19. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

20. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

21. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004. 288 с.

22. О. В. Локуциевский, М. Б. Гавриков Начала численного анализа / М.: ТОО "Янус" 1995

23. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

24. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

REFERENCES

1. Babenko, K.I. 1986, Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis], Nauka, Moscow, Russia.

2. Bredikhin, B.M., 1960, “The remainder term in the asymptotic formula for the function $\nu_G(x)$”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 6, pp. 40–49.

3. Bredikhin, B.M., 1960, “An elementary solution of inverse problems on bases of free semigroups”, matematicheskiy sbornik, 50(92):2, pp. 221–232.

4. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, Doklady Akademii nauk SSSR, 118:5, pp. 855–857.

5. Bredikhin, B.M., 1958, “On power densities of some subsets of free semigroups”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 3, pp. 24–30.

6. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, matematicheskiy sbornik, 46(88):2, pp. 143–158.

7. Bredikhin, B.M., 1956, “An example of a finite homomorphism with a bounded adder function”, UMN, 11:4(70), pp. 119–122.

8. Bredikhin, B.M., 1956, “Some questions of the theory of characters of commutative semigroups”, Trudy 3-go Vsesoyuznogo matematicheskogo s’yezda, vol. 1, Moskva, izdatel’stvo akademii nauk SSSR, no. 3.

9. Bredikhin, B.M., 1954, “On adder functions of characters of numerical semigroups”, DAN 94, pp. 609 – 612.

10. Bredikhin, B.M., 1953, “On the characters of numerical semigroups with a rather rare base”, DAN 90, pp. 707–710.

11. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

12. Delone B.N., Faddeev D.K., 1940, “Theory of Irrationalities of the Third Degree”, trudy matematicheskogo instituta imeni Steklova V.A., vol. 11., pp. 3–340.

13. Dobrovol’skaya, L. P., Dobrovol’skii, N. M. & Simonov, A.S. 2008, “On the error of approximate integration over modified grids”, Chebyshevskij sbornik, vol. 9, no. 1(25), pp. 185–223.

14. Dobrovol'skii, N. M. & Manokhin, E.V. 1998, "Banach spaces of periodic functions", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 4, no. 3, pp. 56–67.

15. Dobrovol'skii N.M., Manokhin E.V., Rebrova I. Yu., Roshchenya A.L., 2001, "On the continuity of the zeta function of a grid with weights", Izvestiya TulGU. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, vol. 7, no. 1, pp. 82–86.

16. N. M. Dobrovol'skii, A. L. Roshchenya, "Number of lattice points in the hyperbolic cross", Math. Notes, 63:3 (1998), 319–324.

17. N. N. Dobrovol'skii, 2019, "One model Zeta function of the monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 148–163.

18. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

19. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

20. Korobov, N.M. 1963, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], Fizmat-giz, Moscow, Russia.

21. Korobov, N.M. 2004, Teoretiko-chislovye metody v priblizhennom analize [Number-theoretic methods in approximate analysis], 2nd ed, MTSNMO, Moscow, Russia.

22. Lokutsievskij, O. V. & Gavrikov, M. B. 1995, Nachala chislennogo analiza [The beginning of numerical analysis], TOO "Yanus", Moscow, Russia.

23. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

24. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

Получено 11.01.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.