ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-213-220

**Интервалы малой длины, содержащие
алгебраическое число заданной высоты**

Н. И. Калоша, И. А. Корлюкова, Е. В. Гусева

Калоша Николай Иванович — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: kalosha@im.bas-net.by

Корлюкова Ирина Александровна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета довузовской подготовки, Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (г. Гродно).

e-mail: korlyukova_ia@grsu.by

Гусева Елена Васильевна — аспирант, Институт математики НАН Беларуси (г. Минск).

e-mail: elena.guseva.96@yandex.by

Аннотация

Рациональные числа распределены равномерно, хотя расстояния между соседними рациональными числами в последовательности Фарея могут сильно различаться. Для алгебраических чисел это свойство не выполняется. В 2013 г. Д. Коледа [6, 7] нашел функцию плотности распределения действительных алгебраических чисел любой степени при их естественном упорядочивании.

Можно доказать, что количество действительных алгебраических чисел α степени n и высоты $H(\alpha) \leq Q$ асимптотически равно $c_1(n)Q^{n+1}$. Недавно было доказано, что существуют интервалы длины $Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, свободные от алгебраических чисел α , $H(\alpha) \leq Q$, однако уже при $0 \leq \gamma < 1$ их не менее чем $c_2(n)Q^{n+1-\gamma}$.

В работе показано, что специальные интервалы длины $Q^{-\gamma}$ и при больших γ могут содержать алгебраические числа, однако их количество не превосходит $c_3Q^{n+1-\gamma}$. Ранее аналогичный результат был получен А. Гусаковой [16] лишь для случая $\gamma = \frac{3}{2}$.

Ключевые слова: алгебраические числа, диофантовы приближения, равномерное распределение, теорема Дирихле.

Библиография: 17 названий.

Для цитирования:

Н. И. Калоша, И. А. Корлюкова, Е. В. Гусева Интервалы малой длины, содержащие алгебраическое число заданной высоты // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 213–220.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.42

DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-213-220

**Intervals of small measure containing
an algebraic number of given height**

N. I. Kalosha, I. A. Korlyukova, E. V. Guseva

Kalosha Nikolai Ivanovich — Ph. D., researcher, Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk).

e-mail: kalosha@im.bas-net.by

Korlyukova Irina Alexandrovna — Ph.D., associate professor, Dean of the Faculty of Pre-University Training (Grodno).

e-mail: korlyukova_ia@grsu.by

Guseva Elena Vasilyevna — Ph. D. student, Institute of mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk).

e-mail: elena.guseva.96@yandex.by

Abstract

Rational numbers are uniformly distributed, even though distances between rational neighbors in a Farey sequence can be quite different. This property doesn't hold for algebraic numbers. In 2013 D. Koleda [6, 7] found the distribution function for real algebraic numbers of an arbitrary degree under their natural ordering.

It can be proved that the quantity of real algebraic numbers α of degree n and height $H(\alpha) \leq Q$ asymptotically equals $c_1(n)Q^{n+1}$. Recently it was proved that there exist intervals of length $Q^{-\gamma}$, $\gamma > 1$, free of algebraic numbers α , $H(\alpha) \leq Q$, however for $0 \leq \gamma < 1$ there exist at least $c_2(n)Q^{n+1-\gamma}$ algebraic numbers in such intervals.

In this paper we show that special intervals of length $Q^{-\gamma}$ may contain algebraic numbers even for large values of γ , however their quantity doesn't exceed $c_3Q^{n+1-\gamma}$. An earlier result by A. Gusakova [16] was proved only for the case $\gamma = \frac{3}{2}$.

Keywords: algebraic number, Diophantine approximation, uniform distribution, Dirichlet's theorem.

Bibliography: 17 titles.

For citation:

N. I. Kalosha, I. A. Korlyukova, E. V. Guseva, 2020, "Intervals of small measure containing an algebraic number of given height *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 213–220.

1. Введение

Распределение рациональных чисел является хорошо изученным. Математикам известно много фактов о распределении рациональных чисел, как в одномерном, так и в многомерном случаях. Многие из них следуют из свойств рядов Фарея [9] — например, теорема Дирихле, которая лежит в основе теории диофантовых приближений [5, 9].

Пусть $Q > 1$ — натуральное число, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qQ} \quad (1)$$

имеет решение в рациональных числах $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq Q$.

Из неравенства (1) нетрудно получить другое утверждение, которое также называют теоремой Дирихле.

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ неравенство

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2} \quad (2)$$

имеет бесконечное число решений в натуральных $q > 1$. Целое число p в (2) определяется однозначно, поскольку для $q \geq 2$ для правой части справедливо $q^{-2} < 1/2q^{-1}$.

Более того, используя ряды Фарея можно доказать теорему Гурвица [9]: для любого иррационального $\beta \in \mathbb{R}$ неравенство

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2} \quad (3)$$

имеет бесконечно много решений в $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; однако при любом $\varepsilon > 0$ и $q > q_0(\varepsilon)$ уже существуют $\beta_1 \in \mathbb{R}$, для которых верно неравенство

$$\left| \beta_1 - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(\sqrt{5} + \varepsilon)q^2}.$$

Например, можно взять $\beta_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Заметим, что неравенства (2), (3) значительно сильнее неравенств $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}$, справедливых для произвольного q и используемых в приближённых вычислениях.

Сделаем еще одно замечание о кажущейся простоте последовательностей Фарея. Существует теорема о том, что свойство “равномерности” рядов Фарея эквивалентно одной из самых знаменитых нерешенных проблем — проблеме о нулях дзета-функции Римана.

Задача приближения действительных чисел значительно усложняется, если в качестве приближающих элементов взять алгебраические числа. Рассмотрим неравенство, аналогичное (2):

$$|\xi - \alpha| < H(\alpha)^{-v}, \quad v > 0. \quad (4)$$

В неравенстве (4) число β — произвольное действительное число, α — алгебраическое число степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha)$. В 1961 году Вирзинг [15] сформулировал следующую проблему: имеет ли неравенство (4) бесконечное число решений в алгебраических числах α , $\deg \alpha \leq n$, при любом ξ и $v \leq n + 1$? Им была доказана лишь разрешимость неравенства (4) при $v = \frac{n}{2} + \gamma_n$, где $\gamma_n \rightarrow 2$, $n \rightarrow \infty$. Шмидт и Дэвенпорт доказали гипотезу Вирзинга при $n = 2$ [14]. Наилучшие до настоящего времени неравенства для v получены в работах белорусских математиков [1, 13]. Совсем недавно еще один белорусский математик Д. Бодягин в соавторстве с Й. Шлейшитцем [17] доказал гипотезу Вирзинга с $v = \frac{n}{\sqrt{3}} = 0,577n$.

2. Основная задача

Рассмотрим последовательность действительных алгебраических чисел α степени $\deg \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$, где $Q > 1$ — натуральное число. Малер предположил, что распределение такой последовательности стремится к равномерному распределению, о чем и написал в письме к Спринджуку в 1985 году. Однако эта гипотеза оказалась неверной. В 2013 году Д. Коледа нашел функцию распределения действительных алгебраических чисел при их естественном упорядочении, а затем получил несколько обобщений своего результата [6, 7].

Несколько результатов о распределении алгебраических чисел доказано в [2, 3]. При этом во всех результатах важна зависимость длины интервалов от высоты. Зависимость от степени выходит на второй план. Важно только, что эту зависимость можно вычислить.

ТЕОРЕМА 1. *Существуют интервалы I длины $|I| = 0,5Q^{-1}$, не содержащие алгебраических чисел α любой степени $n \geq 1$ при ограничении $H(\alpha) \leq Q$.*

ТЕОРЕМА 2. *При некотором $c_1 > c_0(n)$ интервал $I_1, |I_1| > c_1Q^{-v}, 0 \leq v < 1$, содержит c_2Q^{n+1-v} алгебраических чисел α , $\deg \alpha \leq n$, $H(\alpha) \leq Q$.*

Теорему 1 легко доказать, если рассмотреть интервалы вида $(\xi, \xi + 0,5Q^{-1})$, где ξ — рациональное число с малым знаменателем (например, $\xi = 0$).

Доказательство теоремы 2 заметно сложнее. Оно основано на современных результатах метрической теории диофантовых приближений — в частности, доказанной Спринджукон проблеме Малера [8]. С помощью принципа Дирихле можно доказать, что при любом $x \in \mathbb{R}$ и $Q > 1$ неравенство

$$|P(x)| < Q^{-n} \quad (5)$$

разрешимо в $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P \leq n$, $H(P) \leq Q$.

Добавим к (5) неравенство

$$|P'(x)| < \delta_0 Q. \quad (6)$$

Обозначим через $B_1 \subset I$ множество $x \in I$, для которых разрешима система неравенств (5), (6). Оказывается [9, 10], что при достаточно малом δ_0 верно неравенство

$$\mu B_1 < \frac{1}{4}|I|,$$

где μB_1 — мера Лебега множества B_1 . Поэтому для множества $B_2 = I \setminus B_1$ справедливо неравенство

$$\mu B_2 \geq \frac{3}{4}|I|. \quad (7)$$

ЛЕММА 1. [12, 8] *Если α_1 — ближайший к x корень многочлена $P_1(x)$, то справедливо неравенство*

$$|x - \alpha_1| < n|P(x)||P'(x)|^{-1} < n\delta_0^{-1}Q^{-n-1}.$$

Воспользуемся для $x_1 \in B_2$ леммой 1 и найдем алгебраическое число α_1 , $\deg \alpha_1 \leq n$, $H(\alpha_1) \leq Q$, на интервале I_1 длины $|I_1| = 2n\delta_0^{-1}Q^{-n-1}$. Исключим интервал I_1 из множества B_2 и обозначим $B_3 = I \setminus (B_1 \cup B_2)$. Возьмем $x_2 \in B_3$, для которого найдем алгебраическое число α_2 — корень полинома $P_2(x)$ из неравенства

$$|x_2 - \alpha_2| < n\delta_0^{-1}Q^{-n-1}. \quad (8)$$

Интервал (8) обозначим I_2 .

Этот процесс можно продолжать, пока мы не исчерпаем интервалами длины $n\delta_0^{-1}Q^{-n-1}$ все точки множества B_2 . Учитывая (7), можно построить не менее чем

$$\frac{3}{8}n^{-1}\delta_0Q^{n+1}|I| > 2^{-2}n^{-1}\delta_0Q^{n+1}|I|$$

алгебраических чисел α , $\deg \alpha \leq n$, $H(\alpha) \leq Q$.

При оценках сверху для количества алгебраических чисел на интервале I , $|I| = Q^{-\gamma}$, будем снова использовать принцип ящиков Дирихле. Если в данном интервале достаточно много алгебраических чисел, то можно построить полиномы небольшой степени, принимающие на I малые значения. Далее применим следующие леммы.

ЛЕММА 2. [4, 8] Пусть

$$P(x) = \prod_{j=1}^k T_j^{a_j}(x), \quad 1 \leq k \leq n, \quad -$$

разложение приводимого полинома $P(x)$ на степени неприводимых полиномов, и $H(T_j)$ — высоты полиномов $T_j(x)$. Тогда существуют положительные величины c и c' , зависящие только от n , такие что

$$cH(P) < \prod_{j=1}^k H(T_j)^{a_j} < c'H(P).$$

Лемма 2 утверждает, что высоты полиномов обладают почти мультипликативным свойством.

ЛЕММА 3. [11] Пусть $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — целочисленные полиномы без общих корней такие, что

$$\deg P_1 \leq n, \quad \deg P_2 \leq n, \quad H(P_1) \leq Q, \quad H(P_2) \leq Q.$$

Предположим, что для всех точек интервала I , $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$ выполняется неравенство

$$\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \quad \tau > 0.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ и достаточно большого $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta.$$

Когда все полиномы $P_j(x)$ имеют общий множитель, применение леммы 2 на определенном ранее интервале I сопряжено с некоторыми трудностями. Ниже будет показано, как их можно преодолеть.

Интервал I длины $|I| = Q^{-\gamma}$ будем называть (k, v) интервалом, если ему принадлежит алгебраическое число β степени $\deg \beta = k$, $1 \leq k \leq n$, и высоты $H(\beta) = Q^v$. Его минимальный многочлен обозначим $T(x)$. Обозначим через $\#\mathcal{P}_n(Q, \gamma)$ количество алгебраических чисел α — корней полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$.

ТЕОРЕМА 3. При условии

$$\gamma > v \frac{n^2}{n - k + 1} + 1$$

интервалу I принадлежит не более $cQ^{n+1-\gamma}$ алгебраических чисел α , $\deg \alpha = n$, $H(\alpha) \leq Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное:

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \gamma) > cQ^{n+1-\gamma},$$

где $c = c(n)$ — произвольно большая константа. Рассмотрим n -мерные кубы со стороной Q^{v_1} , $0 \leq v_1 \leq 1$, и покроем куб $[-Q, Q]^n$ объединением кубов

$$\bigcup_{k=1}^n \bigcup_{-Q^{1-v_1} \leq i_k \leq Q^{1-v_1}-1} S_{\overline{k}, \overline{i_k}} = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{-Q^{1-v_1} \leq i_k \leq Q^{1-v_1}-1} [i_k Q^{v_1}, (i_k + 1) Q^{v_1}].$$

Количество кубов $S_{\overline{k}, \overline{i_k}}$ не превосходит $(2Q^{1-v_1} + 1)^n < 2^{n+1} Q^{(1-v_1)n}$ при достаточно большом Q . Если

$$2^{n+1} Q^{(1-v_1)n} < cQ^{n+1-\gamma}, \quad (9)$$

то по принципу Дирихле найдется n -мерный куб S' со стороной Q^{v_1} и два полинома $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, коэффициенты которых $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ лежат в S' . Рассмотрим полином

$$R(x) = P_2(x) - P_1(x) \quad (10)$$

с коэффициентами $\bar{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$. Из (10) теперь следует, что $|b_j| \leq Q^{v_1}, 1 \leq j \leq n$. Разложим каждый из полиномов $P_i(x), i = 1, 2$, в ряд Тейлора на интервале I в окрестности своего корня $\alpha_i = \alpha_1(P_i)$:

$$P_i(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \sum_{j=2}^n P^{(j)}(\alpha_i)(x - \alpha_i)^j. \quad (11)$$

Так как в (11)

$$P(\alpha_1) = 0, \quad P'(\alpha_1) < n^2 Q, \quad |x - \alpha_1| < Q^{-\gamma},$$

то, оценив все слагаемые в разложении (11), получим оценку

$$|P_i(x)| < n^3 Q^{1-\gamma}, \quad |R(x)| < 2n^3 Q^{1-\gamma}. \quad (12)$$

Из (12) можно оценить и свободный коэффициент b_0 многочлена $R(x)$: $|b_0| < 2Q^{v_1}$, откуда

$$H(R) < 2Q^{v_1}. \quad (13)$$

Разрешим неравенство (13) относительно v_1 . Поскольку при $1 - v_1 = 1 + \frac{1-\gamma}{n}$ мы имеем $v_1 = \frac{\gamma-1}{n}$, то при достаточно большой величине s можно добиться выполнения неравенства

$$H(R) < cQ^v, \quad \frac{\gamma-1}{n} \leq v. \quad (14)$$

Многочлен $R(x)$ по лемме 1 не может иметь с многочленом $T(x)$ общих корней. Рассмотрим модуль результата полиномов $T(x)$ и $R(x)$ с корнями $\beta_1, \dots, \beta_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ и коэффициентами $b_k, \dots, b_0$ и $a_n, \dots, a_0$

$$1 \leq |\text{Res}(T, R)| = |a_n^k b_k^n| \prod_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} |\alpha_i - \beta_j| < cQ^{\frac{\gamma-1}{n}k + vn} |\alpha_1 - \beta|,$$

где β — корень многочлена $T(x)$, лежащий в I . По лемме 1 из неравенства (12) следует

$$|x - \alpha_1| < 2n^3 Q^{1-\gamma} a_n^{-1} < cQ^{1-\gamma-\frac{\gamma-1}{n}}.$$

Подставляя β вместо x , получаем следующую оценку для результата:

$$1 \leq |\text{Res}(T, R)| < cQ^{vn + \frac{\gamma-1}{n}k - \gamma + 1 - \frac{\gamma-1}{n}}.$$

Данное неравенство противоречиво при

$$\gamma > v \frac{n^2}{n+1-k} + 1, \quad (15)$$

что доказывает теорему. $\square$

В заключение отметим, что добиться выполнения условия (15) несложно: можно взять, например, $\gamma = 3, k = \frac{n}{2} + 1, v = n^{-1}$ или $\gamma = 10, k = \frac{n}{10} + 1, v = 0,8$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берник, В. И. Целочисленные многочлены с перепадами высот коэффициентов и гипотеза Вирзинга / В. И. Берник, К. И. Тищенко // Докл. АН Беларуси. — 1993. Т. 37. — №5. — С. 9–11.
2. Берник, В. И. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН Сер. матем. — 2014. Т. 79. — №1. — С. 21–42.
3. Берник, В. И. Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах (исправленный вариант) / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. — 2015 — Т. 79. — С. 21–42.
4. Гельфонд, А. О. Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов / А. О. Гельфонд. // УМН. — 1949. — Т.4. — №5. — С. 14–48.
5. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. — Москва: Изд-во Иностран. Литер., 1961. — 213 с.
6. Коледа, Д. В. О распределении действительных алгебраических чисел второй степени / Д. В. Коледа // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2013. — № 3. — С. 54–63.
7. Koleda, D. V. On the density function of the distribution of real algebraic numbers / D. V. Koleda // J. Théor. Nombres Bordeaux. — 2017. — Vol. 29, no. 1. — P. 179–200.
8. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. — Минск : Наука и техника. 1967. — 181 с.
9. Beresnevich, V. Rational Points near Manifolds and Metric Diophantine Approximation / V. Beresnevich // Annals of Mathematics, Second Series. — 2012. — Vol. 175, no. 1. — P. 187–235.
10. Beresnevich, V. V. Integral polynomials with small discriminants and resultants / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, F. Goetze // Adv. Math. — 2016. — Vol. 298. — P. 393–412.
11. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithmetica. — 1983. — № 42. — С. 219–253.
12. Dodson, M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds / M. M. Dodson, V. I. Bernik // Cambridge Tracts in Mathematics. — 1999. — №.137, 172 p.
13. Tishchenko, K. On approximation to real numbers by algebraic numbers / K. Tishchenko // Acta Arithmetica. — 2000. — №94 — Vol. 1. — P. 1–24.
14. Davenport, H. Dirichlet's theorem on diophantine approximation / H. Davenport, W. M. Schmidt // Symposia Mathematica. — 1970. — Vol. 4. — N. Y.—London. — P. 113–132.
15. Wirsing, E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades. / E. Wirsing // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1961. — Vol. 206. — P. 67–77.
16. Гетце, Ф. Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гетце, А. Г. Гусакова // Доклады Национальной академии наук Беларуси. — 2015. — Т. 59, № 4. — С. 11–16.
17. Badziahin, D. An improved bound in Wirsing's problem / D. Badziahin, J. Schleischitz // <https://arxiv.org/abs/1912.09013>.

REFERENCES

1. Берник, В. И., Тищенко К. И. 1993, “Целочисленные многочлены с перепадами высот коэффициентов и гипотеза Вирзинга”, *Докл. АН Беларуси.*, Т. 37, № 5, С. 9–11.
2. Берник, В. И., Гётце, Ф. 2014, “Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах”, *Изв. РАН Сер. матем.*, Т. 79, № 1, С. 21–42.
3. Берник, В. И., Гётце, Ф. 2015, “Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах” (исправленный вариант), *Изв. РАН. Сер. матем.*, Т. 79, № 1, С. 21–42.
4. Гельфонд, А. О. 1949, “Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов”, *УМН*, Т.4, № 5, С. 14–48.
5. Касселс, Дж. В. С. 1961, “Введение в теорию диофантовых приближений”, *Изд-во Иностран. Литер.*, Москва, 213 с.
6. Коледа, Д. В. 2013, “О распределении действительных алгебраических чисел второй степени”, *Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук*, № 3, С. 54–63.
7. Koleda, D. V. 2017 “On the density function of the distribution of real algebraic numbers”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, Vol. 29, no. 1 (2017), p. 179–200.
8. Спринджук, В. Г., 1967 “Проблема Малера в метрической теории чисел”, *«Наука» и техника*, Минск, 181 с.
9. Beresnevich, V. 2012 “Rational Points near Manifolds and Metric Diophantine Approximation.”, *Annals of Mathematics, Second Series*, Vol. 175, no. 1, p. 187-235.
10. Beresnevich, V. V., Bernik, V. I., Goetze, F. 2016 “Integral polynomials with small discriminants and resultants”, *Adv. Math.*, Vol. 298, p. 393–412.
11. Берник, В. И., 1983 “Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений”, *Acta Arithmetica*, № 42, С. 219–253.
12. Dodson, M. M., Bernik, V. I., 1999 “Metric Diophantine approximation on manifolds”, *Cambridge Tracts in Mathematics*, №.137, 172 p.
13. Tishchenko, K., 2000 “On approximation to real numbers by algebraic numbers”, *Acta Arithmetica*, №94, Vol. 1, p. 1–24.
14. Davenport, H., Schmidt, W.M., 1970 “Dirichlet’s theorem on diophantine approximation”, *Symposia Mathematica*, Vol. 4, N. Y.—London, p. 113–132.
15. Wirsing, E., 1961 “Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades” *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Vol. 206, p. 67–77.
16. Гетце, Ф., Гусакова, А. Г., 2015 “Алгебраические числа в коротких интервалах”, *Доклады Национальной академии наук Беларуси*, Т. 59, № 4, С. 11–16.
17. Badziahin, D. Schleischitz, J., 2019 “An improved bound in Wirsing’s problem”, <https://arxiv.org/abs/1912.09013>.

Получено 17.01.2020 г.

Принято в печать 20.03.2020 г.