ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 14 Выпуск 2 (2013)

УДК 519.14

О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ СУММЫ ВЕЙЛЯ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

А. В. Кокорев (г. Орел)

Аннотация

Настоящее сообщение автор посвящает светлой памяти Архипова Геннадия Ивановича.

В работе Архипова Геннадия Ивановича [1] получена оценка среднего значения тригонометрической суммы Вейля в поле рациональных чисел. В настоящей работе найдена оценка среднего значения тригонометрической суммы по вещественным алгебраическим числам.

Ключевые слова: теорема о среднем значении, тригонометрические суммы.

THE MEAN VALUE FOR WEYL SUM OVER THE RING OF ALGEBRAIC INTEGERS

A. V. Kokorev (Orel)

Abstract

The estimates of the mean value trigonometrical Weyl sum in a rational number field are given in the paper [1] of Arkhipov G.I. The estimates of the mean value trigonometrical sum in real algebraic numbers is found in the present article.

Keywords: the mean value theorem, trigonometrical sums.

Пусть K поле алгебраических чисел 2 степени, полученное как расширение поля рациональных чисел присоединением $\sqrt{2}$. Обозначим через ν область, состоящую из целых алгебраических чисел поля K вида $a+b\sqrt{2}$, где $a, b \in [1; P] \in \mathbb{N}, P \in \mathbb{N}$.

Пусть n — натуральное число. Рассмотрим следующую систему

$$\left\{\begin{array}{c} \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = \mu_1 + \ldots + \mu_k + \sigma_1, \\ \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_k^2 = \mu_1^2 + \ldots + \mu_k^2 + \sigma_2, \\ \cdots \\ \lambda_1^n + \ldots + \lambda_k^n = \mu_1^n + \ldots + \mu_k^n + \sigma_n, \end{array}\right. \qquad (1)$$

где $\lambda_i, \mu_i, \sigma_i \in \nu, i = \overline{1, n}$.

Обозначим через $I(P, n, k, \overline{\sigma})$, $\overline{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_n)$ число целых решений этой системы уравнений. Для доказательства основной теоремы 2 о среднем используем следующую:

Теорема 1. *Пусть $n \geqslant 3$, $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$, тогда существует такое простое p, принадлежащее отрезку $(P^{\frac{1}{n}}; 2P^{\frac{1}{n}}]$, что выполняется следующее неравенство:*

$$I\left(P; n, k\right) \leqslant 4k^n p^{n(n-1)+4k-4n} P^{2n} I\left(P_1; n, k-n\right) + (4n)^{kn} P^{2k}, \textit{ где } P_1 = \frac{P}{p}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы см. [2].

Приступим к доказательству основной теоремы о среднем.

Теорема 2. *Пусть $n, k, \tau \in \mathbb{N}$. Тогда, при $k \geqslant n\tau$, $P \geqslant 1$ для числа I решений системы уравнений (1) имеет место оценка*

$$I = I\left(P; n, k\right) \leqslant n^{4n\delta(\tau)} 2^{4\chi(\tau)} k^{4n\tau} P^{4k-2\delta(\tau)}, \tag{2}$$

где $\delta(\tau) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\tau}$, $\chi(\tau) = 4n^2\tau + n\tau^2$.

Доказательство.

Проведем доказательство по индукции. Пусть $k = n\tau$. Используя неравенство Бернулли $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \leqslant \left(1 - \frac{m}{n}\right)$, получим

$$\delta(m) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \leqslant \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{m}{n}\right) \leqslant \frac{n}{2}(m+1) \leqslant nm. \tag{3}$$

При $\tau = 1$ получаем $\delta(1) = n, \chi(1) = 2n^2 + 2n$ и доказываемое неравенство (2) принимает следующий вид

$$I = I(P; n, k) \leqslant n^{4n^2} 2^{4(2n^2+n)} k^{4n} P^{4k-2n},$$

что даже слабее более простой оценки $I \leqslant n! P^{4k-2n}$.

Предположим теперь, что теорема справедлива при $\tau = m + 1$. Применим к величине $I(P; n, n(m+1))$ теорему 1:

$$I \leqslant 4k^{2n} p^{n(n-1)+4k-4n} P^{2n} I(P_1; n, k-n) + (4n)^{kn} P^{2k}, \tag{4}$$

где $k = n(m+1)$.

Для оценки $I(P_1; n, k-n)$ воспользуемся теоремой 2 при $\tau = m$:

$$I = I(P_1; n, k-n) \leqslant n^{4n\delta(\tau)} 2^{4\chi(\tau)} k^{4n\tau} P_1^{4(k-n)-2\delta(\tau)}, \tag{5}$$

где

$$\delta(m) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m,$$
$$\chi(m) = 2n^2m + nm^2.$$

Подставим неравенство (5) в (4) и покажем, что полушившаяся оценка не хуже, чем оценка теоремы 2 при $\tau = m+1$. Получим

$$I(P;n,n(m+1)) \leqslant \\ \leqslant 4k^{2n}p^{n(n-1)+4k-4n}P^{2n}n^{4n\delta(\tau)}2^{4\chi(\tau)}k^{4n\tau}P_1^{4k-4n-2\delta(\tau)} + \\ + (4n)^{kn}P^{2k}. \quad (6)$$

Можно считать, что $P > k^2$, так как, если $P \leqslant k^2$, то используя, что

$$\delta(\tau) \leqslant n\tau, k-\tau = n\tau - \tau = \tau(n-1) \geqslant 0 \Rightarrow k \geqslant \tau,$$

получаем

$$P^{4k} \leqslant (k^2)^{2k}P^{2k} \leqslant k^{4k}P^{2k}P^{2k-2\delta(\tau)},$$
$$P^{4k} \leqslant k^{4k}P^{2k}P^{2k-2\delta(\tau)},$$
$$1 \leqslant k^{4k}P^{-2\delta(\tau)}.$$

Это невозможно, так как понижение по P в оценке теоремы меньше, чем один из множителей. Итак, $P > k^2$. Тогда

$$pP^{-1} \leqslant 2P^{\frac{1}{n}-1} \leqslant 2P^{\frac{1}{3}-1} < 2P^{-\frac{1}{2}} < 2(k^2)^{-\frac{1}{2}} < \frac{2}{k}.$$

Поэтому, так как $P_1 = Pp^{-1}$, имеем

$$P_1^{4k-4n-2\delta(m)} = (Pp^{-1}+1)^{4k-4n-2\delta(m)} < \\ = P^{4k-4n-2\delta(m)}p^{-4k+4n+2\delta(m)}(1+P^{-1}p)^{4k-4n-2\delta(m)} < \\ < P^{4k-4n-2\delta(m)}p^{-4k+4n+2\delta(m)}(1+\frac{2}{k})^{4k} < \\ < P^{4k-4n-2\delta(m)}p^{-4k+4n+2\delta(m)}e^8.$$

Тогда первое слагаемое (6) не превосходит

$$4(n(m+1))^{2n}p^{n(n-1)+4k-4n}P^{2n}n^{4n\delta(m)}2^{\chi(m)}(mn)^{4nm} * \\ * P_1^{4k-4n-2\delta(m)} \leqslant \\ \leqslant 4(n(m+1))^{2n}p^{n(n-1)+2\delta(m)}n^{4n\delta(m)}2^{\chi(m)}(mn)^{4nm}P^{4k-2n-2\delta(m)} \leqslant \\ \leqslant 4(n(m+1))^{4nm}n^{4n\delta(m)}2^{\chi(m)}\left(2P^{\frac{1}{n}}\right)^{n(n-1)+2\delta(m)}P^{4k-2n-2\delta(m)} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}(n(m+1))^{4nm}n^{4n\delta(m)}2^{\chi(m)+n(n-1)+2\delta(m)}P^{4k+\frac{2\delta(m)}{n}+(n-1)-2n-2\delta(m)}.$$

Покажем, что

$$\delta(m+1) = \delta(m) - \frac{\delta(m)}{n} + \frac{n+1}{2}, \tag{7}$$

$$\chi(m+1) > \chi(m) + n(n-1) + 2\delta(m). \tag{8}$$

Действительно,

$$\frac{\delta(m)}{n} = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m,$$

$$\delta(m) - \frac{\delta(m)}{n} + \frac{n+1}{2} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m - \frac{n+1}{2} + \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m + \frac{n+1}{2} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m + \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m,$$

$$\delta(m+1) = \frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{m+1} = \frac{n+1}{2} - \frac{n(n-1)}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^m.$$

Докажем неравенство (8).

$$\chi(m+1) = 2n^2(m+1) + n(m+1)^2 = 2n^2m + 2n^2 + nm^2 + 2nm + n,$$

$$\chi(m) + n(n-1) + 2\delta m = 2n^2 + nm^2 + n(n-1) + n(n+1) - n^2(1 - \frac{1}{n})^m <$$
$$< 2n^2 + nm^2 + 2n^2 < \chi(m+1).$$

Учитывая (7) и (8), получаем оценку для первого слагаемого

$$\frac{1}{2} n^{2n\delta(m+1)} 2^{4\chi(m+1)} (n(m+1))^{4n(m+1)} P^{4k-2\delta(m+1)}.$$

Приступим к оценке второго слагаемого (6). Можно считать, что $P > (16n)^{2n}$. Действительно, если $P \leqslant (16n)^{2n}$, то

$$P^{2\delta(\tau)} \leqslant (16n)^{4n\delta(\tau)} \leqslant 16^{4n\delta(\tau)} n^{4\delta(\tau)} < 2^{4\chi(\tau)} n^{4\delta(\tau)},$$

так как из (3) $16n\delta(\tau) \leqslant 16n^2\tau \leqslant 4(4n^2\tau + n\tau^2) \leqslant \chi(\tau)$. В противном случае понижение по P в оценке теоремы меньше, чем первые множители и утверждение становится тривиальным. Итак,

$$P > (16n)^{2n}; (P(16n)^{-2n}) > 1; (P(16n)^{-2n})^{2k-2\delta(m+1)} \geqslant 1;$$
$$(16n)^{4nk} P^{2k} (P(16n)^{-2n})^{2k-2\delta(m+1)} \geqslant (16n)^{4nk} P^{2k};$$
$$(4n)^{nk} P^{2k} \leqslant (16n)^{4nk-4nk+4n\delta(m+1)} P^{4k-2\delta(m+1)} \leqslant$$
$$\leqslant (16n)^{4n\delta(m+1)} P^{4k-2\delta(m+1)}.$$

Осталось доказать следующую оценку второго слагаемого (4)

$$(4n)^{nk}P^{2k} \leqslant \frac{1}{2}n^{4n\delta(m+1)}2^{\chi(m+1)}(6k)^{4n(m+1)}P^{4k-2\delta(m+1)}.$$

Но это так, ибо

$$(16n)^{4n\delta(m+1)} \leqslant 16^{4nn(m+1)} \leqslant 2^{16n^2(m+1)} \leqslant \frac{1}{2}2^{4\chi(m+1)}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н. Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

2. Кокорев А. В. Теорема о среднем значении тригонометрических сумм в поле алгебраических чисел 2 степени // Ученые записки Орловского гос. ун-та. 2012. № 3(47). С. 29—38.

Орловский государственный университет
Поступило 23.05.2013