ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-200-212

О линейных приближающих формах

П. Л. Иванков

Иванков Павел Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (г. Москва).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Аннотация

Обобщенная гипергеометрическая функция определяется суммой степенного ряда, коэффициентами которого являются произведения значений некоторой дробной рациональной функции. Взятые со знаком минус корни числителя и знаменателя этой рациональной функции называются параметрами соответствующей гипергеометрической функции. Для исследования арифметической природы значений гипергеометрических функций и их производных (включая производные по параметру) часто используют метод Зигеля. Соответствующее рассуждение, как правило, начинается с построения функциональной линейной приближающей формы. Если параметры гипергеометрической функции рациональны, то для построения этой формы можно применить принцип Дирихле. При этом построение возможно не только для самих гипергеометрических функций, но и для произведений их степеней. Этим объясняется общность результатов, получаемых таким методом. Если, однако, среди параметров имеются иррациональные числа, то применение принципа Дирихле невозможно, и для проведения соответствующего исследования приходится привлекать дополнительные соображения.

Одним из способов преодоления затруднения, связанного с наличием иррациональных чисел среди параметров гипергеометрической функции является применение эффективного построения линейной приближающей формы, с которой начинается рассуждение. Первоначально эффективные конструкции построения таких приближений появились для функций специального вида (числитель рациональной функции, с помощью которой определяются коэффициенты гипергеометрической функции должен был равняться единице). Изучение свойств этих приближений показало, что они могут оказаться полезными и в случае рациональных параметров: получаемые с помощью эффективных методов количественные результаты оказались точнее их аналогов, полученных методом Зигеля. В дальнейшем методы эффективного построения линейной приближающей формы обобщались в различных направлениях.

В данной работе предлагается новая эффективная конструкция линейной приближающей формы для случая, когда для гипергеометрических функций рассматриваются также и производные по параметру. Эта конструкция используется для уточнения оценки снизу меры линейной независимости значений соответствующих функций.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, линейная независимость, дифференцирование по параметру, оценки линейных форм.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
П. Л. Иванков. О линейных приближающих формах // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 200–212.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.361 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-200-212

On linear approximating forms

P. L. Ivankov

Ivankov Pavel Leonidovich — doctor of physical and mathematical sciences, Professor, Bauman Moscow State Technical University (Moscow).
e-mail: ivankovpl@mail.ru

Abstract

Generalized hypergeometric function is defined as a sum of the power series whose coefficients are the products of the values of some fractional rational function. Taken with a minus sign roots of a numerator and denominator of this rational function are called parameters of the corresponding hypergeometric function. For the investigation of the arithmetic nature of the values of hypergeometric functions and their derivatives (including derivatives with respect to parameter) one often makes use of Siegel's method. The corresponding reasoning begins as a rule by the construction of the functional linear approximating form. If parameters of the hypergeometric function are rational one is able to use pigeonhole principle for the construction of this form. In addition the construction is feasible not only for the hypergeometric functions themselves but also for the products of their powers. By this is explained the generality of results obtained by such method. But if there are irrational numbers among the parameters the application of a pigeonhole method is impossible and for carrying out the corresponding investigation it is necessary to employ some additional considerations.

One of the methods of surmounting the difficulty connected with the irrationality of some parameters of a hypergeometric function consists in the application of the effective construction of the linear approximating form from which the reasoning begins. Primarily effective constructions of such approximations appeared for the functions of a special kind (the numerator of the rational function by means of which the coefficients of hypergeometric functions are defined was to be equal to unity). The investigation of the properties of these approximations revealed the fact that they can be useful in case of rational parameters as well for the quantitative results obtained by effective methods turned out to be more precise than their analogs obtained by Siegel's method. Subsequently the methods of effective construction of linear approximating forms were generalized in diverse directions.

In this paper we propose a new effective construction of approximating form in case when for the hypergeometric functions derivatives with respect to parameter are also considered. This construction is made use of for the sharpening of the lower estimates of the linear independence measure of the values of corresponding functions.

Keywords: hypergeometric functions, linear independence, differentiation with respect to parameter, estimates of linear forms.

Bibliography: 25 titles.

For citation:

P. L. Ivankov, 2020, "On linear approximating forms" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 200–212.

1. Введение

Для исследования арифметической природы значений гипергеометрических функций с рациональными параметрами часто применяют метод Зигеля. При этом рассуждение начинается с построения с помощью принципа Дирихле функциональной линейной приближающей формы, имеющей достаточно высокий порядок нуля в начале координат. Для продифференцированных по параметру функций этот метод также применим; соответствующие примеры см. в [1, глава 7]. Отметим также работы [2]–[17].

Если функциональная линейная приближающая форма строится эффективно, то возможности метода Зигеля расширяются: удается исследовать значения функций с иррациональными параметрами, и уточняются соответствующие количественные результаты. Примеры исследований такого рода см. в [18]–[21]. В данной работе предлагается эффективная конструкция линейной приближающей формы для функций вида (1), и затем с помощью этой конструкции уточняется оценка меры линейной независимости значений этих функций в ненулевой рациональной точке.

2. Результаты

Пусть t, $\tau_1, \ldots, \tau_t$ — натуральные числа. Рассмотрим функции

$$F_{kl_kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \chi_{kj}(\nu) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\lambda_k + x)(A - \lambda_k + x)}\,, \tag{1}$$

где $k = 1, \ldots, t$, $l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1$, $j = 1, \ldots, m+2$; $a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r)$, $b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m)$, $0 \leqslant r \leqslant m+1$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$, A, $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — некоторые рациональные числа, причем $a(x)b(x)(x+\lambda_k)(x+A-\lambda_k) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$;

$$\chi_{kj}(\nu) = \prod_{u=1}^{j-1} (\nu + \beta_u),\ k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m+1,\ \chi_{k,m+2}(\nu) = (\nu + \lambda_k)\chi_{k,m+1}(\nu). \tag{2}$$

Предположим, что

$$\alpha_i - \beta_j,\ \alpha_i - \lambda_k,\ \alpha_i + \lambda_k - A,\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, t,$$

не являются целыми числами; предположим также, что целыми числами не являются

$$\lambda_k - \lambda_{k'},\ \lambda_k + \lambda_{k'} - A,\ 2\lambda_k - A,\ k, k' = 1, \ldots, t,\ k \neq k'.$$

Положительная постоянная γ, встречающаяся в приведенных ниже теоремах, зависит от параметров функций (1) и от числа ξ; в дальнейшем такие постоянные будем обозначать $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Предположим также, что функции (1) линейно независимы вместе с функцией, тождественно равной единице, над полем рациональных дробей. Тогда для любого отличного от нуля рационального числа ξ и для любого нетривиального набора целых чисел*

$$h_{kl_kj},\ k = 1, \ldots, t,\ l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1,\ j = 1, \ldots, m+2, \tag{3}$$

при любом целом h_0 выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \sum_{j=1}^{m+2} h_{kl_kj} F_{kl_kj}(\xi) \right| > H^{-T(m+2) - \frac{\gamma}{\ln\ln(H+2)}}\,,$$

где H есть максимум модулей чисел (3), $T = \tau_1 + \cdots + \tau_t$, а положительная постоянная γ не зависит от H.

Аналогичная теорема справедлива и в однородном случае.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены все перечисленные выше условия, и пусть* $b(0)=0$. *Тогда*

$$\Big|\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{m+2} h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\Big| > H^{1-T(m+2)-\frac{\gamma}{\ln\ln(H+2)}},$$

где T, h_{kl_kj}, H *определяются, как в теореме 1.*

3. Вспомогательная функция

Будем считать, что условия теоремы 1 выполнены. Пусть $n\geqslant 1$ и $\nu\geqslant 0$ — целые числа. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\nu)=\frac{(n!)^m}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+x)(A-\zeta-N_1+x)}\times$$
$$\times\frac{(A-\zeta-N_1+N_2)\prod_{x=1}^{N_2-1}(\zeta+x)(A-\zeta-N_1+x)}{\prod_{k=1}^{t}\prod_{\sigma=0}^{N_1}((\zeta-\lambda_k+\sigma)(\zeta-A+\lambda_k+\sigma))^{\tau_k}}d\zeta\,, \quad (4)$$

где $N_1=(m+2)(n+1)-1$, $N_2=n+T(m+2)(n+1)-1$, Γ — положительно ориентированный простой замкнутый кусочно гладкий контур, внутри которого лежат все особые точки подынтегральной функции вида

$$\lambda_k-\sigma \ \text{ и } \ A-\lambda_k-\sigma,\ k=1,\ldots,t,\ \sigma=0,1,\ldots,N_1\,, \quad (5)$$

и при этом все другие особые точки подынтегральной функции лежат в его внешности. Такой контур существует при всех $n\geqslant\gamma_1$. При $\tau_1=\cdots=\tau_t=1$ и $A=0$ аналогичная вспомогательная функция использовалась в [22].

Лемма 1. *Функция* $\Phi(\nu)$ *обладает при* $n\geqslant\gamma_1$ *следующими свойствами:*

1) $\Phi(\nu)=0$ *при* $\nu=n+1,\ldots,N_2-1$;
2) $\Phi(N_2)\neq 0$;

$$3)\ \Phi(\nu)=\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}B_{kl_k}(\nu)\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}, \quad (6)$$

где

$$B_{kl_k}(\nu)=\frac{(n!)^m}{l_k!(\tau_k-l_k-1)!}\sum_{\sigma=0}^{N_1}\bigg(\frac{\partial^{\tau_k-l_k-1}}{\partial\zeta^{\tau_k-l_k-1}}\Big(Q_\sigma(\nu,\zeta)(\zeta+A-\lambda_k-\sigma)^{\tau_k}\Big)\Big|_{\zeta=\lambda_k-\sigma}+$$
$$+(-1)^{l_k}\frac{\partial^{\tau_k-l_k-1}}{\partial\zeta^{\tau_k-l_k-1}}\Big(Q_\sigma(\nu,\zeta)(\zeta-A+\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}\Big)\Big|_{\zeta=A-\lambda_k-\sigma}\bigg), \quad (7)$$

$$Q_\sigma(\nu,\zeta)=\prod_{x=1}^{\sigma}\frac{\zeta+\nu+x}{\zeta+x}\prod_{x=1}^{N_1-\sigma}\frac{A-\zeta-N_1+\nu+x}{A-\zeta-N_1+x}\times$$
$$\times\frac{(A-\zeta-N_1+N_2)\prod_{x=1}^{N_2-1}(\zeta+x)(A-\zeta-N_1+x)}{\prod_{k'=1}^{t}\prod_{\sigma'=0}^{N_1}((\zeta-\lambda_{k'}+\sigma')(\zeta-A+\lambda_{k'}+\sigma'))^{\tau_{k'}}}$$

Доказательство. Первое свойство справедливо потому, что при указанных значениях ν контур Γ охватывает все полюсы подынтегральной функции, и при этом степень знаменателя более чем на две единицы превосходит степень числителя. Для доказательства второго свойства достаточно заметить, что при $\nu = N_2$ правая часть (4) равна (с точностью до знака) вычету подынтегральной функции при $\zeta = -N_2$; этот вычет отличен от нуля, что проверяется непосредственно.

Докажем третье свойство. При выполнении условий теоремы 1 особые точки (5) подынтегральной функции являются полюсами кратности τ_k; все прочие особые точки лежат во внешности Γ.

При каждом σ, $0 \leqslant \sigma \leqslant N_1$, подынтегральную функцию можно записать в виде

$$\prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{(\zeta+\sigma+x)(A-\zeta-\sigma+x)} \cdot Q_\sigma(\zeta,\nu)\,.$$

После применения теоремы о вычетах получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\nu) = \sum_{k=1}^{t} \frac{1}{(\tau_k-1)!}&\times\\ \times\sum_{\sigma=0}^{N_1}\biggl(&\frac{\partial^{\tau_k-1}}{\partial\zeta^{\tau_k-1}}\Bigl(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+\sigma+x)(A-\zeta-\sigma+x)}Q_\sigma(\nu,\zeta)(\zeta-\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}\Bigr)\Big|_{\zeta=\lambda_k-\sigma}+\\ &+\frac{\partial^{\tau_k-1}}{\partial\zeta^{\tau_k-1}}\Bigl(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+\sigma+x)(A-\zeta-\sigma+x)}Q_\sigma(\nu,\zeta)(\zeta-A+\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}\Bigr)\Big|_{\zeta=A-\lambda_k-\sigma}\biggr)\,.\end{aligned}$$

Последнее выражение преобразуем, используя правило дифференцирования произведения. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^l}{\partial\zeta^l}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+x)(A-\zeta+x)} = \sum_{\substack{k_1+\dots+k_\nu=l,\\ k_x\geqslant 0,\, x=1,\dots,\nu}} \frac{l!}{k_1!\dots k_\nu!}&\times\\ \times\prod_{x=1}^{\nu}\frac{k_x!}{A+2x}\Bigl(\frac{(-1)^{k_x}}{(\zeta+x)^{k_x+1}}+\frac{1}{(A-\zeta+x)^{k_x+1}}\Bigr)&\,.\end{aligned}$$

Отсюда следуют равенства

$$\frac{\partial^l}{\partial\zeta^l}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+\sigma+x)(A-\zeta-\sigma+x)}\Big|_{\zeta=\lambda_k-\sigma} = \frac{\partial^l}{\partial\lambda_k^l}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\,,$$

и

$$\frac{\partial^l}{\partial\zeta^l}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\zeta+\sigma+x)(A-\zeta-\sigma+x)}\Big|_{\zeta=A-\lambda_k-\sigma} = (-1)^l\frac{\partial^l}{\partial\lambda_k^l}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\,,$$

справедливые при $l = 0,1,\dots$. Применим эти равенства и в результате получим требуемое. Лемма доказана. □

4. Тождество

Определим в дополнение к многочленам (2) многочлены

$$\chi_{k,m+3}(\zeta) = (\zeta+A-\lambda_k)\chi_{m+2}(\zeta),\ k=1,\dots,t\,.$$

Далее, определим при $k=1,\ldots,t$ числа $c_{k1},\ldots,c_{k,m+2}$ так, чтобы тождественно по ζ выполнялось равенство

$$a(\zeta)=c_{k1}\chi_{k1}(\zeta-1)+\cdots+c_{k,m+2}\chi_{k,m+2}(\zeta-1)\,,$$

и пусть

$$V_{kjs}(\zeta)=\begin{cases} a(\zeta+1),\ s=0,\ j=1,\ldots,m+2,\\ c_{k1}\chi_{k1}(\zeta)+\cdots+c_{kj}\chi_{kj}(\zeta),\ s=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m+2.\end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $W(\nu)$ — многочлен степени не выше N_1. Тогда при выполнении условий теоремы 1 для чисел*

$$w_{kjs}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{V_{kjs}(\zeta-s)}{\chi_{k,\,j+1}(\zeta-s)}\times \\ \times\frac{W(\zeta)\,d\zeta}{\prod_{x=0}^{s-1}b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)(\zeta+A-\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s+1}a(\zeta-n+x)} \qquad (8)$$

тождественно по ν выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{m+2}\sum_{s=0}^{n}w_{kjs}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)=W(\nu)\,. \qquad (9)$$

Простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур Γ в правой части (8) выбирается так, что он охватывает все нули многочлена от переменной ζ

$$\prod_{x=0}^{n}b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)(\zeta+A-\lambda_k-x)$$

и точку ν, а все нули многочлена от переменной ζ

$$\prod_{x=1}^{n}a(\zeta-n+x)$$

лежат в его внешности.

Доказательство. Приведем лишь схему доказательства; подробное доказательство аналогичной леммы дано в [23]. Существование контура Γ из правой части (8) с указанными свойствами обеспечивается условиями теоремы 1. Доказательство леммы 2 основано на использовании тождества

$$\frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)}{a(\zeta-n+x)}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+2}\frac{V_{kjs}(\zeta-s)\,\chi_{kj}(\nu-s)}{\chi_{k,\,j+1}(\zeta-s)}\times \\ \times\prod_{x=0}^{s-1}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)(\zeta+A-\lambda_k-x)}\frac{\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)}{\prod_{x=1}^{n-s+1}a(\zeta-n+x)}+ \\ +\frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)(\zeta+A-\lambda_k-x)}\,, \qquad (10)$$

которое является обобщением известного тождества из теории интерполирования (см., например, [24, формула (4.4:7), с. 450]). Чтобы получить (10), следует записать [23, равенство (2.21)] при $q=n$ для случая, когда фигурирующий там многочлен $b(z)$ заменен на

$b(z)(z+\lambda_k)(z+A-\lambda_k)$. Для доказательства (9) надо умножить (10) на $W(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрировать получившееся равенство по контуру Г. Т. к.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{W(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)}{a(\zeta-n+x)}\,d\zeta=W(\nu)\,,$$

$$\text{и}\qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{W(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)(\zeta+A-\lambda_k-x)}\,d\zeta=0\,,$$

то отсюда получим (8) и (9). Из двух последних равенств первое очевидно (поскольку контур интегрирования содержит лишь один полюс $\zeta=\nu$ подынтегральной функции), а второе справедливо потому, что контур интегрирования охватывает все полюсы подынтегральной функции, и при этом степень многочлена $W(\zeta)$ не превышает N_1. □

Рассмотрим многочлены

$$P_{kl_kj}(z)=\sum_{s=0}^{n}p_{kl_kjs}z^s,\ k=1,\dots,t,\ l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\ j=1,\dots,m+2, \tag{11}$$

с неопределенными коэффициентами. Пусть

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{m+2}P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu z^\nu. \tag{12}$$

Лемма 3. *При $\nu\geqslant n$ справедливо равенство*

$$C_\nu=\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}G_{kl_k}(\nu)\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\,, \tag{13}$$

где

$$G_{kl_k}(\nu)=\sum_{\mu=l_k}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+2}\binom{\mu}{l_k}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\times$$
$$\times\frac{\partial^{\mu-l_k}}{\partial\lambda_k^{\mu-l_k}}\Bigl(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\Bigr) \tag{14}$$

Доказательство. Запишем и преобразуем выражение для C_ν, $\nu\geqslant n$, которое непосредственно вытекает из (1), (11) и (12); имеем

$$C_\nu=\sum_{k=1}^{t}\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+2}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda_k^\mu}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}=$$
$$=\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\sum_{k=1}^{t}\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+2}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\times$$
$$\times\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda_k^\mu}\Bigl(\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\Bigr).$$

Последнюю частную производную заменим выражением

$$\sum_{l_k=0}^{\mu}\binom{\mu}{l_k}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\frac{\partial^{\mu-l_k}}{\partial\lambda_k^{\mu-l_k}}\Bigl(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\Bigr),$$

полученным с помощью правила Лейбница. После этого перегруппируем слагаемые, заменив $\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{l_k=0}^{\mu}$ на $\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{\mu=l_k}^{\tau_k-1}$. В результате получим требуемое. Лемма доказана. $\square$

Подберем теперь коэффициенты p_{kl_kjs} многочленов (11) так, чтобы тождественно по ν выполнялись равенства

$$B_{kl_k}(\nu)=G_{kl_k}(\nu),\ k=1,\dots,t,\ l_k=0,1,\dots,\tau_k-1; \tag{15}$$

многочлены, входящие в эти равенства, определяются соответственно формулами (7) и (14). Выполнения (15) можно добиться, рассуждая по индукции с использованием леммы 2. Зафиксируем k и определим сначала коэффициенты многочленов $P_{k,\tau_k-1,j}(z)$ с помощью равенства

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{k,\tau_k-1,js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)=$$
$$=B_{k,\tau_k-1}(\nu)\,,$$

которое должно выполняться тождественно по ν. Из леммы 2 следует, что требуемые коэффициенты существуют, и их можно записать в виде интегралов (8), в которых следует $W(\zeta)$ заменить на $B_{k,\tau_k-1}(\zeta)$. В результате получим, учитывая (14) при $l_k=\tau_k-1$, что при таком выборе коэффициентов $p_{k,\tau_k-1,js}$ требуемое равенство $B_{k,\tau_k-1}(\nu)=G_{k,\tau_k-1}(\nu)$ выполняется. Пусть теперь $0\leqslant l_k<\tau_k-1$, и пусть уже определены коэффициенты многочленов $P_{k,\tau_k-1,j}(z),\dots,P_{k,l_k+1,j}(z)$, $j=1,\dots,m+2$ так, что (15) выполняется при $l_k=\tau_k-1,\dots,\mu+1$. Потребуем, чтобы тождественно по ν выполнялось равенство

$$B_{k\mu}(\nu)-\sum_{l_k=\mu+1}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{s}\sum_{s=0}^{n}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\binom{l_k}{\mu}\times$$
$$\times\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\biggl(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\biggr)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+2}p_{k\mu js}\chi_j(\nu-s)\times$$
$$\times\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)(\nu+A-\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\,.$$

Все коэффициенты p_{kl_kjs}, входящие в левую часть, определены по индуктивному предположению, а коэффициенты $p_{k\mu js}$ из правой части определяются с помощью леммы 2. Таким образом, все неопределенные коэффициенты многочленов (11) определены с помощью индукции.

Из (15), (13) и (6) следует, что

$$C_\nu=\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\Phi(\nu)\,, \tag{16}$$

при условии, что коэффициенты многочленов (11) определены указанным выше способом.

5. Доказательства теорем

В предыдущем разделе мы подобрали многочлены (11) так, что коэффициент при z^ν, $\nu=n+1,\dots,N_2-1$, в разложении по степеням z линейной формы (12) равен нулю. Это следует из (16) и первого свойства функции $\Phi(\nu)$ из леммы 1. Рассмотрим неоднородную линейную форму

$$R(z)=P_0(z)+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z)\,, \tag{17}$$

причем зададим многочлен $P_0(z)=\sum_{\nu=0}^n p_{0\nu}z^\nu$ так, чтобы эта форма имела при $z=0$ порядок нуля, равный N_2. Для этого, очевидно, следует положить

$$p_{0\nu}=-\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{m+2}\sum_{s=0}^{\nu}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{1}{(\lambda_k+x)(A-\lambda_k+x)}\,. \tag{18}$$

При этом получившаяся линейная форма не будет равняться нулю тождественно, поскольку коэффициент при z^{N_2} отличен от нуля в силу второго свойства функции $\Phi(\nu)$ из леммы 1. Таким образам, мы имеем эффективно построенную функциональную линейную приближающую форму для функций (1), имеющую при $z=0$ порядок нуля, лишь на константу отличающийся от максимально возможного. Для дальнейшего важно получить оценку сверху модуля неоднородной линейной формы (17), а также оценку сверху модулей многочленов $P_{kl_kj}(z)$ при $z=\xi$; для многочленов $P_0(z)$ и $P_{kl_kj}(z)$ потребуется еще и оценка сверху общего наименьшего знаменателя их коэффициентов. Получение таких оценок является стандартной вычислительной процедурой, основанной на равенстве (16) и на указанных выше явных формулах для коэффициентов рассматриваемых многочленов. Приведем здесь лишь окончательные результаты:

$$|R(\xi)|\leqslant e^{\gamma_2 n}(n!)^{-T(m+2)(m+2-r)}\,;\;\;|P_{kl_kj}(\xi)|\leqslant e^{\gamma_3 n}(n!)^{m+2-r}\,.$$

При получении оценки сверху общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов основным моментом является рациональность параметров функций (1); при выполнении этого условия указанный общий наименьший знаменатель не превосходит $e^{\gamma_4 n}$.

Дальнейшие рассуждения скопируем с доказательства первой основной теоремы из [1, с. 91]. Для этого заметим сначала, что функции (1) при $j=1$, $l_k=0$, $k=1,\dots,t$, удовлетворяют уравнению

$$(\delta+\lambda_k)(\delta+A-\lambda_k)b(\delta)y=a(\delta)zy+\lambda_k(A-\lambda_k)b(0),\quad\text{где}\quad\delta=z\frac{d}{dz}\,.$$

Дифференцируя последнее соотношение по λ_k, получим уравнения, которым удовлетворяют функции (1) при различных значениях l_k. Добавим к функциям (1) функцию, тождественно равную единице, и занумеруем получившиеся функции в произвольном порядке, обозначив их

$$f_1(z),\dots,f_M(z), \tag{19}$$

$M=T(m+2)+1$. Из сказанного следует, что функции (18) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y'_v=\sum_{i=1}^{M}q_{vi}y_i,\quad v=1,\dots,M,\quad q_{vi}\in\mathbb{C}(z).$$

Обозначим через $q=q(z)$ общий наименьший знаменатель рациональных функций $Q_{vi}(z)$. В нашем случае $q(z)$ есть некоторая степень z. Новые обозначения введены для того, чтобы было удобнее следовать рассуждениям, доказывающим первую основную теорему из [1, с. 91]. Мы имеем форму (16), которую запишем в виде

$$R(z)=R_1(z)=\sum_{i=1}^{M}P_{1i}(z)f_i(z).$$

Далее, как и при доказательстве упомянутой первой основной теоремы из [1], положим

$$R_k=qR'_{k-1},\quad k=2,3,\dots\,.$$

В результате получим совокупность приближающих линейных форм для функций (18). Из леммы 9, [1, с. 106] следует, что определитель

$$\Delta(z) = |P_{vi}(z)|_{v,i=1,\ldots,M}$$

отличен от тождественного нуля и имеет вид

$$\Delta(z) = z^{Mn-\gamma_5}\Delta_1(z),$$

причем определитель $\Delta_1(z)$ не равен нулю тождественно. При доказательстве этого утверждения существенно используется линейная независимость функций (18) над полем рациональных дробей. Затем осуществим переход к числовым формам. Из леммы 10, [1, с. 107] следует, что матрица

$$(P_{vi}(\xi))_{\substack{v=1,\ldots,M+\gamma_6\\ i=1,\ldots,M}}$$

имеет ранг M. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, доказывающие лемму 16 из [1, с. 118-119], получаем аналог этой леммы для нашего случая.

Лемма 4. *Существуют целые числа g_{vi}, $v,i = 1,\ldots,M$, такие, что выполняются следующие условия*

1) определитель $|g_{vi}|_{v,i=1,\ldots,M}$ отличен от нуля;

2) $\left|\sum_{i=1}^{M} g_{vi}f_i(\xi)\right| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^{-T(m+2)(m+2-r)}$, $v = 1,\ldots,M$;

3) $|g_{vi}| \leqslant e^{\gamma_7 n}(n!)^{m+2-r}$, $v,i = 1,\ldots,M$.

Пользуясь последней леммой, нетрудно доказать теорему 1. Оценка получится точнее, чем в упомянутой теореме из [1]. Причина этого заключается в том, что построенная эффективно линейная приближающая форма (17) имеет более высокий порядок нуля при $z = 0$, чем построенная с помощью принципа Дирихле приближающая форма, используемая при доказательстве теоремы 1 из [1, с. 354].

Доказательство теоремы 2 мало отличается от доказательства теоремы 1. Поэтому ограничимся лишь указанием основных отличий. Рассмотрим вспомогательную функцию вида (4), но число N_2, входящее в правую часть формулы (4), заменим на $T(m+2)(n+1)-1$. Функциональной линейной приближающей формой здесь служит (12), а не (17), и в связи с этим возникает еще одно отличие, состоящее в том, что если $0 \leqslant \nu \leqslant n$, то при вычислении коэффициентов линейной формы (12) индекс s изменяется от нуля до ν; см. левую часть равенства (14). Однако после вынесения за знаки суммирования произведения $\prod_{x=1}^{\nu}(b(x))^{-1}$ это ν можно заменить на n, используя условие $b(0) = 0$. В остальном доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Заключение

Эффективно построенную в данной работе приближающую функциональную форму можно применить и для решения других задач, относящихся к арифметической природе значений функций (1). Можно, например, применить эту конструкцию для функций вида (1), не все параметры которых рациональны. При этом, по-видимому, придется заменить многочлен $a(x)$ на тождественную единицу и ввести другие ограничения. Не исключено также, что в неоднородном случае потребуется привлечь сведения из теории делимости в полях алгебраических чисел, как это сделано в работе [25].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шидловский А. Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.

2. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых Е-функций // Вестник МГУ. Сер. 1: Математика, механика. 1967. № 2. С. 55–62.

3. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений Е-функций одного класса // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14. № 1. С. 16–35.

4. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов. Ученые записки МГУ. 1959, вып. 186. Математика, 9. С. 11-70.

5. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых функций // Труды Московского матем. общества. 1959. Т. 8. С. 283-320.

6. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов // ДАН СССР. 1954. Т. 96, № 4. С. 697-700.

7. Шидловский А. Б. О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, удовлетворяющих линейным неоднородным дифференциальным уравнениям второго порядка // ДАН СССР. 1966. Т. 169, № 1. С. 42-45.

8. Шидловский А. Б. Об алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 18, № 4. С. 55-64.

9. Белогривов И. И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых гипергеометрических E-функций // ДАН СССР. 1967. Т. 174, № 2. С. 267-270.

10. Чирский В. Г. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами // Вестник МГУ. Серия 1, математика, механика. 1978, № 5. С. 3-8.

11. Салихов В. Х. Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithm. 1990. **53**:5. P. 453-471.

12. Черепнев М. А. Об алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций // Математические заматки. 1995. **57**:6. С. 896-912.

13. Салихов В. Х. Критерий алгебраической независимости значений гипергеометрических E-функций (четный случай) // Математические заматки. 1998. **64**:2. С. 273-284.

14. Горелов В. А. Об алгебраической независимости значений обобщенных гипергеометрических функций // Математические заматки. 2013. **94**:1. С. 94-108.

15. Горелов В. А. Об алгебраических свойствах решений неоднородных гипергеометрических уравнений // Математические заматки. 2016. **99**:5. С. 658-672.

16. Mahler K. Application of a theorem by A.B.Shidlovski // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1968. V. 305. P. 149-173.

17. Väänänen K. On the algebraic independence of the values of some E-functions. // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math. 1975. V. 1. P. 93–109.

18. Иванков П. Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру // Фундаментальная и прикладная математика. 2010. Т. 16, вып. 6 С. 91–94.

19. Иванков П. Л. О дифференцировании по параметру // Чебышевский сборник. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 285–294.

20. Иванков П. Л. О дифференцировании по параметру некоторых функций // Наука и образование. Электронное научно-техническое издание 2012, № 5. С. 141 – 154. DOI: 10.7463/0512.0398478.

21. Иванков П. Л. О значениях продифференцированных по параметру гипергеометрических функций // Чебышевский сборник 2012. Т. 13, вып. 2. С. 64–70.

22. Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами // Математические заметки. 1992. Т. 52, выпуск 6. С. 25-31.

23. Иванков П. Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций // Математический сборник. 1991. Т. 182, № 2. С. 283–302.

24. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 1. М.: Наука, 1967.

25. Галочкин А. И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирский матем. журнал. 1976. Т. 17, № 6. С. 1220-1235.

REFERENCES

1. Shidlovskii, A. B. 1987, "Transcendentnye chisla"[Transcendental numbers] *"Nauka"*, 448 pp. (Russian).

2. Belogrivov, I. I. 1967, "Transcendentality and algebraic independence of values of certain E-functions *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Math. Mech.*, vol. 22, no. 2, pp. 55-62. (Russian).

3. Belogrivov, I. I. 1973, "The transcendence and algebraic independence of the values of a certain class of E-functions *Sibirsk. Math. Zh.*, vol. 14, pp. 16-35. (Russian).

4. Shidlovskii, A. B. 1959, "Transcendence and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Moskov. Gos. Univ. Uch. Zap.*, no. 186, pp. 11-70. (Russian).

5. Shidlovskii, A. B. 1959, "On transcendence and algebraic independence of the values of certain functions *Trudy Moskov. Math. Obsh.*, vol. 8, pp. 283-320. (Russian).

6. Shidlovskii, A. B. 1954, "On transcendentality and algebraic independence of the values of entire functions of certain class *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 96, № 4. pp. 697-700. (Russian).

7. Shidlovskii, A. B. 1954, "Transcendence and algebraic independence of values of E-functions satisfying linear nonhomogeneous differential equations of the second order *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* vol. 169, № 1. pp. 42-45. (Russian).

8. Shidlovskii, A. B. 1968, "Algebraic independence of the values of certain hypergeometric E-functions *Trudy Moskov. Mat. Obsh.*, vol. 18, № 4. pp. 55-64. (Russian).

9. Belogrivov I.I., 1967, "On transcendence and algebraic independence of values of certain hypergeometric E-functions *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 174, № 2. pp. 267-270. (Russian).

10. Chirsky V.G., 1978, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with irrational parameters *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. 1. Mat. Meh. no. 5, pp. 3-8.

11. Salikhov V.Kh., 1990, "Irreducibility of hypergeometric equations and algebraic independence of values of E-functions 1990, *Acta Arithm.*, **53**:5, pp. 453-471.

12. Cherepnev M.A., 1995, "On algebraic independence of values of hypergeometric E-functions *Mat. Zametki*, vol. 57, no. 6, pp. 896-912.

13. Salikhov V.Kh., 1998, "Criterion for the algebraic independence of the values of hypergeometric E-functions (even case) *Mat. Zametki*, vol. 64, no. 2, pp. 273-284.

14. Gorelov V.A., 2013, "On algebraic independence of the values of hypergeometric functions *Mat. Zametki*, vol. 94, no. 1, pp. 94-108.

15. Gorelov V.A., 2016, "On algebraic properties of the solutions of nonhomogeneous hypergeometric equations *Mat. Zametki*, vol. 99, no. 5, pp. 658-672.

16. Mahler, K. 1968, "Application of a theorem by A. B.Shidlovskii *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, v. 305, pp. 149-173.

17. Väänänen, K. 1975, "On the algebraic independence of the values of some E-functions *Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. Math.*, v. 1. pp. 93-109.

18. Ivankov, P. L. 2010, "On differentiation of a hypergeometric function with respect to parameter *Fundamentalnaya i Pricladnaya Matematica*, v. 18, issue 6, pp. 91-94. (Russian).

19. Ivankov, P. L. 2015, "On differentiation with respect to parameter", *Chebyshev. Sbornik*, v. 16, issue 3, pp. 285-294. (Russian).

20. Ivankov, P. L. 2012, "On differentiation with respect to parameter of certain functions *Science and Education of the Bauman MSTU*, no. 5, pp. 285-294. DOI: 10.7463/0512.0398478 (Russian).

21. Ivankov, P. L. 2012, "On the values of the differentiated with respect to parameter hypergeometric functions *Chebyshevsky Sbornik*, v. 13, issue 2, pp. 64-70. (Russian).

22. Ivankov, P. L. 1992, "Arithmetic properties of the values of hypergeometric functions with different parameters *Mathematical Notes*, vol. 52, no. 6, pp. 1188-1192.

23. Ivankov, P. L. 1991, "On arithmetic properties of the values of hypergeometric functions *Math. Sbornik*, v. 182, no. 2, pp. 283-302. (Russian).

24. Markushevich, A.I. 1967, "Theory of analytic functions v. I. *"Nauka"*, 486 pp. (Russian).

25. Galochkin, A.I. 1976, "On arithmetic properties of the values of certain entire hypergeometric functions *Sibirsk. Matem. Zhurnal*, v. 17, no. 6, pp. 1220-1235. (Russian).

Получено 23.01.2019 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.