ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-186-199

Об элементарных теориях алгебраически замкнутых групп

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина

Дурнев Валерий Георгиевич — доктор физико-математических наук, профессор, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Зеткина Оксана Валерьевна — кандидат экономических наук, доцент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Зеткина Алена Игоревна — ассистент, Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова (г. Ярославль).
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Аннотация

В статье доказана алгоритмическая неразрешимость позитивных $\forall^2\exists^{24}$-теории и $\forall^3\exists^2$-теории любой алгебраически замкнутой группы и класса всех алгебраически замкнутых групп. Установлена разрешимость в любой алгебраически замкнутой группе G каждого уравнения вида

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — непустое несократимое групповое слово от неизвестных x_1, ..., x_n, а g — произвольный элемент группы G.

Ключевые слова: алгебраически замкнутая группа, позитивная теория, уравнение.

Библиография: 8 названий.

Для цитирования:
В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина. Об элементарных теориях алгебраически замкнутых групп // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 186–199.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 512+512.5+512.54+512.54.03 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-186-199

On elementary theories of algebraically closed groups

V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina

Durnev Valery Georgievch — doctor of phisics and mathematics, professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: durnev@uniyar.ac.ru
Zetkina Oksana Valerievna — candidate of economic sciences, associate professor, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru
Zetkina Alena Igorevna — assistent, P. G. Demidov Yaroslavl' University (Yaroslavl').
e-mail: ovzetkina@yandex.ru

Abstract

In paper for any algebraically closed group G, as well as for the class of the algebraically closed groups, we prove algorithmic undecidability of the positive $\forall^2\exists^{24}$-theory and $\forall^3\exists^2$-theory. For an arbitrary $g \in G$, we also prove the decidability of the equation of the type

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

where $w(x_1, \ldots, x_n)$ is a non-empty irreducible word in the unknowns $x_1, \ldots x_n \in G$.

Keywords: algebraically closed group, positive theory, equation.

Bibliography: 8 titles.

For citation:
V. G. Durnev, O. V. Zetkina, A. I. Zetkina, 2020, "On elementary theories of algebraically closed groups" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 186–199.

1. Введение

Понятие *алгебраически замкнутая группа* было введено в работе У. Скотта [1]: группа G называется *алгебраически замкнутой* (*algebraically closed*), если любая система уравнений и неравенств над этой группой

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) = e \& \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) \neq e,$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k)$ $(j = 1, \ldots, p)$ — групповые слова от переменных x_1, ..., x_n и произвольных элементов g_1, ..., g_k группы G, имеющая решение в некотором расширении этой группы, имеет решение уже в самой группе G. В работе А. Макинтайра [3] такие группы называются *экзистенционально замкнутыми.*

Изучение алгебраически замкнутых групп было начато в работах У. Скотта [1] и Б. Неймана [2]. Особую роль в этих исследованиях сыграла работа А. Макинтайра [3]. Еще в работе Б. Неймана было установлено, что любая алгебраически замкнутая группа является *простой*, поэтому, в частности, *любая нетривиальная вербальная подгруппа алгебраически замкнутой группы совпадает со всей группой.*

В работе У. Скотта [1] наряду с понятием *алгебраически замкнутая группа* (*algebraically closed group*) было введено понятие *слабо алгебраически замкнутая группа* (*weakly algebraically closed group*):

группа G называется *слабо алгебраически замкнутой* (*weakly algebraically closed*), если любая система уравнений над этой группой

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) = e,$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — групповые слова от переменных x_1, ..., x_n и произвольных элементов g_1, ..., g_k группы G, имеющая решение в некотором расширении $G \leq H$ этой группы, имеет решение уже в самой группе G.

Б. Нейман в работе [2] доказал, что *любая нееденичная слабо алгебраически замкнутая группа является алгебраически замкнутой*, т. е. *экзистенционально замкнутой.* При доказательстве Б. Нейман рассматривал достаточно сложную систему уравнений над группой G. Используя результаты работы А. Макинтайра [3], мы предлагаем более прозрачное, на наш взгляд, доказательство этого результата Б. Неймана.

2. Простое доказательство теоремы Б. Неймана

В работе А. Макинтайра [3] доказано, что если G — произвольная группа, а h и g — любые два ее элемента, то

$$G \models (h = e \longrightarrow g = e) \Longleftrightarrow \text{существует такое расширение} H \text{ группы } G$$
$$(G \le H), \text{в котором для подходящих элементов } x \text{ и } y$$
$$\text{выполняется равенство } g = xhx^{-1} \cdot yhy^{-1}.$$

Пусть G — произвольная неединичная *слабо алгебраически замкнутая группа*, а g — ее неединичный элемент.

Рассмотрим произвольную систему Ψ уравнений и неравенств над этой группой

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) = e \& \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) \neq e,$$

где $w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k)$ $(j = 1, \ldots, p)$ — групповые слова от переменных x_1, ..., x_n и произвольных элементов g_1, ..., g_k этой группы. Полагаем

$$\Psi^+ = \mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) = e, \quad \Psi^- = \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) \neq e.$$

Тогда $\Psi = \Psi^+ \& \Psi^-$.

Полагаем

$$\overline{\Psi} = \Psi^+ \& \overline{\Psi^-},$$

где

$$\overline{\Psi^-} = \mathop{\&}_{j=1}^{p} (y_j u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) y_j^{-1}) \cdot (z_j u_j(x_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, g_k) z_j^{-1}) = g.$$

Предположим, что в некотором расширении $G \le H$ группы G система Ψ имеет решение h_1, h_2, ..., h_n. Тогда

$$H \models \mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_k) = e \& \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(h_1, \ldots, x_n, g_1, \ldots, h_k) \neq e.$$

В силу указанного выше результата из работы [3] А. Макинтайра существует такое расширение $H \le S$ группы H и элементы s_1, l_1, ..., s_p и l_p, что

$$S \models \mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_k) = e \&$$
$$\mathop{\&}_{j=1}^{p} (s_j u_j(h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_k) s_j^{-1}) \cdot (l_j u_j(h_1, \ldots, h_n, g_1, \ldots, g_k) l_j^{-1}) = g.$$

Т.е. в расширении $G \le S$ группы G система равенств $\overline{\Psi}$ имеет решение h_1, ..., h_n, s_1, l_1, ..., s_p и l_p. В силу слабой алгебраической замкнутости группы G система равенств $\overline{\Psi}$ имеет решение h'_1, ..., h'_n, s'_1, l'_1, ..., s'_p и l'_p в самой группе G. Значит

$$G \models \mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(h'_1, \ldots, h'_n, g_1, \ldots, g_k) = e \&$$
$$\mathop{\&}_{j=1}^{p} (s'_j u_j(h'_1, \ldots, h'_n, g_1, \ldots, g_k)(s'_j)^{-1}) \cdot (l'_j u_j(h'_1, \ldots, h'_n, g_1, \ldots, g_k)(l'_j)^{-1}) = g.$$

Так как g — неединичный элемент группы G, то

$$G \models \mathop{\&}_{i=1}^{m} w_i(h'_1, \ldots, h'_n, g_1, \ldots, g_k) = e \& \mathop{\&}_{j=1}^{p} u_j(h'_1, \ldots, h'_n, g_1, \ldots, g_k) \neq e.$$

Значит h'_1, ..., h'_n — решение системы уравнений и неравенств Ψ в G. Поэтому группа G является алгебраически замкнутой по У. Скотту или экстенционально замкнутой по А. Макинтайру.

Доказательство использованного выше утверждения в работе А. Макинтайра [3] проводится в рамках комбинаторной теории групп путем рассмотрения нескольких случаев, определяемых возможными порядками элементов g и h. Для предложенного нами выше доказательства результата Б. Неймана достаточно более слабого утверждения: если G — произвольная группа, а h и g — любые два ее неединичных элемента, то *существует такое расширение H группы G ($G \leq H$), в котором для подходящих элементов x, y и z выполняется равенство* $g = xhx^{-1} \cdot yhy^{-1} \cdot zhz^{-1}$.

Для полноты изложения приведем простое доказательство этого факта из монографии Р. Линдона и П. Шуппа [4]. В свободном произведении $G * \langle\langle u \rangle\rangle$ группы G и бесконечной циклической группы $\langle\langle u \rangle\rangle$ элементы

$$guhu^{-1} \text{и } huhu^{-1}$$

имеют бесконечный порядок. Поэтому группа

$$H = \langle\langle G * \langle\langle u \rangle\rangle, t | guhu^{-1} = t \cdot huhu^{-1} \cdot t^{-1} \rangle\rangle$$

является HNN расширением группы $G * \langle\langle u \rangle\rangle$, а значит группа H — расширение группы G. В группе H выполняется требуемое равенство

$$g = (tht^{-1}) \cdot ((tu)h(tu)^{-1}) \cdot (uhu^{-1}).$$

3. Универсальные формулы на алгебраически замкнутых группах

Для произвольной конечно определенной группы

$$G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e \rangle\rangle$$

и любого группового слова $w(a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ справедлива эквивалентность

$$w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow G \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Поэтому, если для конечно определенной группы G алгоритмически неразрешима проблема равенства, то неразрешима и ее $\forall$-теория (универсальная теория), а значит и $\exists$-теория (экзистенциональная теория). Однако позитивная теория этой группы может быть разрешима. Например, если GN — конечно определенной группа с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства, а F_2 — свободная группа ранга 2, то для конечно определенной группы $GN * F_2$, свободного произведения группы GN и F_2, проблема равенства алгоритмически неразрешима, а значит неразрешима и ее $\forall$-теория. Однако, так как среди гомоморфных образов этой группы есть свободная группа F_2, то из известного результата Ю.И. Мерзлякова [7] следует, что позитивная теория этой группы совпадает с позитивной теорией класса всех групп и с позитивной теорией любой свободной нециклической группы, которая, как доказал Г.С. Маканин [5] является алгоритмически разрешимой. Используя результат работы Г.С. Сакердота

[8] вместо конечно определенной группы $GN * F_2$ можно взять и конечно определенную группу $GN * \langle\langle a | a^2 = e\rangle\rangle$ — свободное произведение группы GN и циклической группы второго порядка $\langle\langle a | a^2 = e\rangle\rangle$. Если группа GN имеет задание

$$GN = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e\rangle\rangle,$$

то группа $GN * \langle\langle a | a^2 = e\rangle\rangle$ имеет "почти такое же" задание:

$$GN * \langle\langle a | a^2 = e\rangle\rangle = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n, a | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e, a^2 = e\rangle\rangle.$$

Покажем, что *универсальная теория любой алгебраически замкнутой группы GAC совпадает с универсальной теорией класса всех групп*, которая, как хорошо известно, алгоритмически неразрешима. Это достаточно доказать для универсальных формул Φ вида

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) = e \vee \mathop{\vee}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) \neq e),$$

так как для любой группы G справедлива эквивалентность:

$$G \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} \Psi_i) \Longleftrightarrow \mathop{\wedge}_{i=1}^{m} G \models (\forall x_1, \ldots, x_n)\Psi_i.$$

Универсальную формулу Φ вида

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) = e \vee \mathop{\vee}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) \neq e)$$

будем для краткости называть *$\forall^n$-формулой типа (p, q)*. Часто эти формулы записываются в равносильной форме

$$(\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e \longrightarrow \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Напомним, что *$\forall^n$-формулы типа $(1, q)$* называются *квазитождествами*.

Достаточно доказать, что если универсальная формула истинна на алгебраически замкнутой группе GAC, то она истинна и на любой группе.

Предположим противное, т. е. что некоторая универсальная формула указанного вида истинна на алгебраически замкнутой группе GAC, но ложна на некоторой группе G. Тогда

$$G \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) \neq e \& \mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Значит

$$G * GAC \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) \neq e \& \mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Но $G * GAC$ — расширение алгебраически замкнутой группы GAC, поэтому

$$GAC \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) \neq e \& \mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e),$$

т. е. на группе GAC истинна формула Ψ и ее отрицание $\neg\Psi$. Полученное противоречие показывает, что *универсальная теория любой алгебраически замкнутой группы GAC совпадает с универсальной теорией класса всех групп*. Значит *универсальная теория любой алгебраически замкнутой группы GAC алгоритмически неразрешима*.

Отметим, что мы показали справедливость следующего используемого в дальнейшем утверждения: *если G — произвольная группа, GAC — алгебраически замкнутая группа, а*

$(\exists x_1, \ldots, x_n)\Psi$ *— замкнутая формула* (Ψ *— бескванторная часть) и* $G \models (\exists x_1, \ldots, x_n)\Psi$, *то* $GAC \models (\exists x_1, \ldots, x_n)\Psi$.

Покажем, что для произвольной конечно определенной группы

$$G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e\rangle\rangle,$$

любого группового слова $w(a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и любой алгебраически замкнутой группы GAC справедлива эквивалентность

$$w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow GAC \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Если $w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e$ и h_1, ..., h_n — такие элементы алгебраически замкнутой группы GAC, для которых

$$GAC \models \mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(h_1, \ldots, x_n) = e,$$

то подгруппа $gr(h_1, \ldots, h_n)$ группы GAC, порожденная элементами h_1, ..., h_n, является гомоморфным образом группы G относительно отображения φ, задаваемого равенствами

$$\varphi(a_1) = h_1, \ldots, \varphi(a_n) = h_n.$$

Поэтому из равенства $w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e$ следует равенство $w(h_1, \ldots, h_n) \underset{GAC}{=} e$. Значит

$$GAC \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Если же $w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{\neq} e$, то

$$G \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \& w(x_1, \ldots, x_n) \neq e).$$

Но тогда, как отмечалось выше,

$$GAC \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \& w(x_1, \ldots, x_n) \neq e).$$

Значит формула

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e)$$

ложна на группе GAC.

Взяв в качестве группы G группу

$$GN = \langle\langle a_1, a_2 | R_1(a_1, a_2) = e, \ldots, R_m(a_1, a_2) = e\rangle\rangle$$

с неразрешимой проблемой равенства, получим *для любой алгебраически замкнутой группы* GAC *алгоритмически неразрешима ее* $\forall^2$*-теория, а значит и* $\exists^2$*-теория.*

Покажем, что для любой алгебраически замкнутой группы GAC справедлива эквивалентность:

$$GAC \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e \longrightarrow \bigvee_{i=1}^{p} w_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\bigvee_{i=1}^{p} GAC \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1, \ldots, x_n) = e \longrightarrow w_i(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Предварительно установим для произвольной алгебраически замкнутой группы GAC эквивалентность:

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)=e) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(a_1,\ldots,a_n)=e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{p} \langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models w_i(a_1,\ldots,a_n)=e.$$

Предположим, что

$$\langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(a_1,\ldots,a_n)=e.$$

Тогда при некотором i_0

$$\langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models w_{i_0}(a_1,\ldots,a_n)=e.$$

Поэтому

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow w_{i_0}(x_1,\ldots,x_n)=e),$$

а значит,

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)=e).$$

Для доказательства обратного предположим, что

$$\langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models \neg(\mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(a_1,\ldots,a_n)=e).$$

Тогда

$$\langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models$$
$$(\exists x_1,\ldots,x_n)((\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e)\&(\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)\neq e)).$$

Значит

$$GAC \models (\exists x_1,\ldots,x_n)((\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e)\&(\mathop{\&}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)\neq e),$$

т. е.

$$GAC \models \neg(\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)=e).$$

В итоге получаем для произвольной алгебраически замкнутой группы GAC цепочку эквивалентностей:

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)=e \vee \mathop{\vee}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)\neq e) \quad \Longleftrightarrow$$

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow \mathop{\vee}_{i=1}^{p} w_i(x_1,\ldots,x_n)=e) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{p} \langle\langle a_1,\ldots,a_n | u_1(a_1,\ldots,a_n)=e,\ldots,u_q(a_1,\ldots,a_n)=e\rangle\rangle \models w_i(a_1,\ldots,a_n)=e \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{p} GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow w_i(x_1,\ldots,x_n)=e) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{p} GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(w_i(x_1,\ldots,x_n)=e \vee (\mathop{\vee}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)\neq e)) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\mathop{\vee}_{i=1}^{p} GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\mathop{\&}_{j=1}^{q} u_j(x_1,\ldots,x_n)=e \longrightarrow w_i(x_1,\ldots,x_n)=e).$$

Заметим, $\forall^n$-формулы типа $(1,0)$ — это тождества, а $\forall^n$-формулы типа $(1,q)$ при $q \geq 1$ — это квазитождества. В силу классического результата В. Магнуса [4] о разрешимости проблемы равенства для групп с одним определяющим соотношением *существует алгоритм, позволяющий по произвольной* $\forall^n$*-формуле типа* $(1,1)$ *определить, истинна ли она на произвольной алгебраически замкнутой группе*, в тоже время в силу результата В. В. Борисова [6] о существовании 2-порожденной группы с 12 определяющими соотношениями и с неразрешимой проблемой равенства *для* $\forall^n$*-формул типа* $(1,12)$ *такой алгоритм построить невозможно.*

4. Позитивные формулы на алгебраически замкнутых группах

Хорошо известно [3], что $\forall^\infty\exists^\infty$-теории любых двух алгебраически замкнутых групп совпадают.

Так как любая алгебраически замкнутая группа является *полной*, т. е. для любого ее элемента g и произвольного натурального числа n уравнение $x^n = g$ разрешимо в этой группе, то на любой алгебраически замкнутой группе GAC истинна, например, простая позитивная формула $(\forall y)(\exists x)y = x^2$, которая, конечно, ложна на некоторых группах.

Покажем, что *позитивная* $\forall^2\exists^{24}$*-теория любой алгебраически замкнутой группы* GAC *алгоритмически неразрешима.*

Выше было установлено, что для произвольной конечно определенной группы

$$G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e\rangle\rangle,$$

любого группового слова $w(a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и любой алгебраически замкнутой группы GAC справедлива эквивалентность

$$w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow GAC \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Возьмем в качестве группы G группу

$$GN = \langle\langle a_1, a_2 | R_1(a_1, a_2) = e, \ldots, R_{12}(a_1, a_2) = e\rangle\rangle$$

с двумя образующими и двенадцатью определяющими соотношениями [6] с неразрешимой проблемой равенства и воспользуемся доказанным в работе [3] А. Макинтайра утверждением:

если G *— произвольная группа, а* h_1, h_2, ..., h_n *и* g *— любые ее элементы, то*

$$G \models ((\mathop{\&}_{i=1}^{n} h_i = e) \longrightarrow g = e) \Longleftrightarrow$$

существует такое расширение H группы G $(G \leq H)$,

в котором для подходящих элементов u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n v_n

выполняется равенство $g = \prod_{i=1}^{n} u_i h u_i^{-1} \cdot v_i h v_i^{-1}$

получим, что для любой алгебраически замкнутой группы GAC и любого группового слова $w(a_1, a_2)$ в алфавите $\{a_1, a_2\}$ справедлива эквивалентность

$$w(a_1, a_2) \underset{GN}{=} e \Longleftrightarrow$$

$$GAC \models (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists u_1, v_1, \ldots, u_{12}, v_{12})(w(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{12} u_i R_i(x_1, x_2) u_i^{-1} \cdot v_i R_i(x_1, x_2) v_i^{-1}).$$

Из этой эквивалентности следует справедливость теоремы.

Теорема 1. *Позитивная $\forall^2\exists^{24}$-теория любой алгебраически замкнутой группы и класса всех алгебраически замкнутых групп алгоритмически неразрешима.*

В рассматриваемых в предыдущей теореме позитивных формулах одна перемена кванторов, а общее число кванторов 26. Следующая теорема уменьшает общее число кванторов до 5 сохраняя позитивность формул и одну перемену кванторов. При этом уменьшается число кванторов существования с 24-х до 2-х, но число кванторов общности увеличивается с 2-х до 3-х.

Теорема 2. *Позитивная $\forall^3\exists^2$-теория любой алгебраически замкнутой группы и класса всех алгебраически замкнутых групп алгоритмически неразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся доказанной выше эквивалентностью: для произвольной конечно определенной группы

$$G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e\rangle\rangle,$$

любого группового слова $w(a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и любой алгебраически замкнутой группы GAC справедлива эквивалентность

$$w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow GAC \models (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \longrightarrow w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Покажем, что для произвольной конечно определенной группы

$$G = \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_n | R_1(a_1, \ldots, a_n) = e, \ldots, R_m(a_1, \ldots, a_n) = e\rangle\rangle,$$

любого группового слова $w(a_1, \ldots, a_n)$ в алфавите $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и любой алгебраически замкнутой группы GAC справедлива эквивалентность

$$\begin{aligned} &w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow \\ &\quad GAC \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\forall y)(\exists u, v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(x_1, \ldots, x_n)u^{-1}) \cdot (vR_i(x_1, \ldots, x_n)v^{-1}))\vee \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad w(x_1, \ldots, x_n) = e). \end{aligned}$$

Заметим, что для любой алгебраически замкнутой группы GAC

$$GAC \models (\forall x)(\exists u, v)((uxu^{-1}) \cdot (vxv^{-1}) = e).$$

Если g — произвольный элемент алгебраически замкнутой группы GAC, то так как элементы g и g^{-1} имеют одинаковый порядок, то на HNN-расширении

$$\langle\langle GAC, t | tgt^{-1} = g^{-1}\rangle\rangle$$

группы GAC истинна формула $(\exists u, v)(ugu^{-1}) \cdot (vgv^{-1}) = e$, значит

$$GAC \models (\exists u, v)((ugu^{-1}) \cdot (vgv^{-1}) = e).$$

Так как g — произвольный элемент алгебраически замкнутой группы GAC, то

$$GAC \models (\forall x)(\exists u, v)((uxu^{-1}) \cdot (vxv^{-1}) = e).$$

Кроме того справедлива эквивалентность

$$g \underset{GAC}{\neq} e \Longleftrightarrow GAC \models (\forall y)(\exists u, v) y = (ugu^{-1}) \cdot (vgv^{-1}).$$

Предположим, что $w(a_1,\ldots,a_n) \underset{G}{=} e$. Покажем, что тогда

$$GAC \models (\forall x_1,\ldots,x_n)(\forall y)(\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(x_1,\ldots,x_n)u^{-1})\cdot(vR_i(x_1,\ldots,x_n)v^{-1}))\vee w(x_1,\ldots,x_n)=e).$$

Пусть g_1, ..., g_n — произвольные элементы группы GAC. Покажем, что

$$GAC \models (\forall y)(\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_i(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}))\vee w(g_1,\ldots,g_n)=e).$$

Рассмотрим произвольный элемент g группы GAC. Покажем, что

$$GAC \models (\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} g = (uR_i(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_i(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}))\vee w(g_1,\ldots,g_n)=e).$$

Если $g=e$, то

$$GAC \models (\exists u,v) e = (uR_1(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_1(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}),$$

а значит и

$$GAC \models (\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} e = (uR_i(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_i(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}))\vee w(g_1,\ldots,g_n)=e).$$

Пусть $g\neq e$. Если при некотором j выполняется неравенство $R_j(g_1,\ldots,g_n)\neq e$, то

$$GAC \models (\exists u,v) g = (uR_j(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_j(g_1,\ldots,g_n)v^{-1})),$$

поэтому

$$GAC \models (\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} g = (uR_i(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_i(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}))\vee w(g_1,\ldots,g_n)=e).$$

Если же при любом i выполняется равенство $R_i(g_1,\ldots,g_n)=e$ в группе GAC, то тогда в этой группе, как уже отмечалось выше, выполняется и равенство $w(g_1,\ldots,g_n)=e)$. Значит и в этом случае

$$GAC \models (\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} g = (uR_i(g_1,\ldots,g_n)u^{-1})\cdot(vR_i(g_1,\ldots,g_n)v^{-1}))\vee w(g_1,\ldots,g_n)=e).$$

Для доказательства обратного, предположим, что $w(a_1,\ldots,a_n) \underset{G}{\neq} e$ и покажем, что тогда

$$GAC \models \neg(\forall x_1,\ldots,x_n)(\forall y)(\exists u,v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(x_1,\ldots,x_n)u^{-1})\cdot(vR_i(x_1,\ldots,x_n)v^{-1}))\vee w(x_1,\ldots,x_n)=e),$$

т. е.

$$GAC \models (\exists x_1,\ldots,x_n)(\exists y)(\forall u,v)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} y \neq (uR_i(x_1,\ldots,x_n)u^{-1})\cdot(vR_i(x_1,\ldots,x_n)v^{-1}))\& w(x_1,\ldots,x_n)\neq e),$$

Так как

$$G \models (\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(a_1,\ldots,a_n)=e)\& w(a_1,\ldots,a_n)\neq e),$$

то

$$G \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \& w(x_1, \ldots, _n) \neq e).$$

Поэтому, как отмечалось выше,

$$GAC \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(x_1, \ldots, x_n) = e) \& w(x_1, \ldots, x_n) \neq e).$$

Пусть g_1, ..., g_n — такие элементы группы GAC, что

$$GAC \models (\mathop{\&}_{i=1}^{m} R_i(g_1, \ldots, g_n) = e) \& w(g_1, \ldots, g_n) \neq e),$$

а g — неединичный элемент группы GAC. Тогда

$$GAC \models (\forall u, v)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} g \neq (uR_i(g_1, \ldots, g_n)u^{-1}) \cdot (vR_i(g_1, \ldots, g_n)v^{-1})) \& w(g_1, \ldots, g_n) \neq e).$$

Поэтому

$$GAC \models (\exists x_1, \ldots, x_n)(\exists y)(\forall u, v)((\mathop{\&}_{i=1}^{m} y \neq (uR_i(x_1, \ldots, x_n)u^{-1}) \cdot (vR_i(x_1, \ldots, x_n)v^{-1})) \& \\ w(x_1, \ldots, x_n) \neq e),$$

а значит

$$GAC \models \neg(\forall x_1, \ldots, x_n)(\forall y)(\exists u, v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(x_1, \ldots, x_n)u^{-1}) \cdot (vR_i(x_1, \ldots, x_n)v^{-1})) \vee \\ w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Это завершает доказательство эквивалентности

$$w(a_1, \ldots, a_n) \underset{G}{=} e \Longleftrightarrow \\ GAC \models (\forall x_1, \ldots, x_n)(\forall y)(\exists u, v)((\bigvee_{i=1}^{m} y = (uR_i(x_1, \ldots, x_n)u^{-1}) \cdot (vR_i(x_1, \ldots, x_n)v^{-1})) \vee \\ w(x_1, \ldots, x_n) = e).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно применить доказанную эквивалентность к конечно определенной группе

$$GN = \langle\langle a_1, a_2 | R_1(a_1, a_2) = e, \ldots, R_{12}(a_1, a_2) = e\rangle\rangle$$

с двумя образующими и двенадцатью определяющими соотношениями [6] с неразрешимой проблемой равенства

$$w(a_1, a_2) \underset{GN}{=} e \Longleftrightarrow \\ GAC \models (\forall x_1, x_2)(\forall y)(\exists u, v)((\bigvee_{i=1}^{12} y = (uR_i(x_1, x_2)u^{-1}) \cdot (vR_i(x_1, x_2)v^{-1})) \vee \\ w(x_1, x_2) = e).$$

□

5. Уравнения специального вида в алгебраически замкнутых группах

Хорошо известно, что любая алгебраически замкнутая группа является *полной*, т. е. для любого ее элемента g и произвольного натурального числа n уравнение $x^n = g$ разрешимо в этой группе.

Нетрудно показать, что для произвольного элемента g любой алгебраически замкнутой группы GAC в этой группе разрешимо уравнение $[x, y] = g$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y, т. е. любой элемент алгебраически замкнутой группы является коммутатором. Нам не встречались явные упоминания этого факта в доступной литературе. Приведем простое доказательство. Так как в группе $GAC * \langle\langle a, b\rangle\rangle$ элементы ag и $b^{-1}ab$ имеют бесконечный порядок, то группа

$$\langle\langle GAC * \langle\langle a, b\rangle\rangle, t | ag = t^{-1}(b^{-1}ab)t\rangle\rangle$$

является HNN-расширением группы GAC и в ней выполняются равенства

$$g = a^{-1}(bt)^{-1}a(bt) = [a, bt],$$

значит в группе GAC разрешимо уравнение

$$g = x^{-1}y^{-1}xy = [x, y].$$

Следующая теорема существенно усиливает эти утверждения.

Теорема 3. *В любой алгебраически замкнутой группе GAC каждое уравнение вида*

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g, \tag{1}$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — непустое несократимое групповое слово от неизвестных x_1, ..., x_n, а g — произвольный элемент группы GAC, имеет решение.

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

1) g — элемент бесконечного порядка алгебраически замкнутой группы GAC. В этом случае $w(x_1, \ldots, x_n)$ и g — элементы бесконечного порядка группы $GAC * \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle$. Поэтому группа GAC является подгруппой HNN-расширения

$$\langle\langle GAC * \langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle, t | tw(x_1, \ldots, x_n)t^{-1} = g\rangle\rangle,$$

в котором выполняется равенство $w(tx_1t^{-1}, \ldots, tx_nt^{-1}) = g$. Поэтому уравнение (1) разрешимо в группе GAC.

2) g — элемент конечного порядка m алгебраически замкнутой группы GAC.

В свободной группе $\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle$ элемент $w(x_1, \ldots, x_n)$ равен элементу вида $u^k(x_1, \ldots, x_n)$, где k — натуральное число, а $u(x_1, \ldots, x_n)$ не является собственной степенью в этой группе. Тогда $u(x_1, \ldots, x_n)$ — элемент порядка km [4] в группе

$$\langle\langle x_1, \ldots, x_n | u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1\rangle\rangle.$$

Поэтому $u^k(x_1, \ldots, x_n)$ и g — элементы порядка m в группе

$$GAC * \langle\langle x_1, \ldots, x_n | u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1\rangle\rangle.$$

Значит группа GAC является подгруппой группы

$$\langle\langle G * \langle\langle x_1, \ldots, x_n | u^{km}(x_1, \ldots, x_n) = 1\rangle\rangle, t | tu^k(x_1, \ldots, x_n)t^{-1} = g,$$

в которой выполняется равенство $w(tx_1t^{-1}, \ldots, tx_nt^{-1}) = g$. Поэтому уравнение (1) разрешимо в группе GAC. □

Доказанная теорема означает, что в алгебраически замкнутой группе ширина любой вербальной подгруппы равна единице. Конечно, каждая вербальная подгруппа группы GAC совпадает со всей группой, так как GAC — простая группа.

6. Заключение

Установлена алгебраическая неразрешимость “достаточно простых” фрагментов элементарной теории любой алгебраически замкнутой группы и класса всех алгебраически замкнутых групп — доказана алгоритмическая неразрешимость позитивной $\forall^2\exists^{24}$-теории и позитивной $\forall^3\exists^2$-теории любой алгебраически замкнутой группы и класса всех алгебраически замкнутых групп. Установлена разрешимость в любой алгебраически замкнутой группе GAC каждого разрешенного относительно неизвестных уравнения, по другой терминологии — бескоэффициентного уравнения, т. е. уравнения вида

$$w(x_1, \ldots, x_n) = g,$$

где $w(x_1, \ldots, x_n)$ — непустое несократимое групповое слово от неизвестных x_1, ..., x_n, а g — произвольный элемент группы GAC.

В связи с полученными в работе результатами представляет интерес вопрос о разрешимости позитивной $\forall\exists^\infty$-теории и позитивной $\exists\forall^\infty$-теории произвольной алгебраически замкнутой группы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Scott W. R. Algebraically closed groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1951. Vol. 2. P. 118-121.
2. Neumann B. H. A note on algebraically closed groups // J. London. Math. Soc. 1952. Vol. 27. P. 227-242.
3. Macintyre A. On algebraically closed groups // Ann. of Math. 1972. Vol. 96. P. 53-97.
4. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
5. Маканин Г. С. Разрешимость универсальной и позитивной теорий свободной группы // Изв. АН СССР. Серия матем. 1984. № 4. С. 735-749.
6. Борисов В. В. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой тождества // Матем. заметки. 1969. Т. 6. Вып. 5. С. 521-532.
7. Мерзляков Ю. И. Позитивные формулы на свободных группах // Алгебра и логика. 1966. Т. 5, № 4. С. 25-42.
8. Sacerdote G. S. Almost all free products of groups have the same positive theory // J. Algebra. 1973. Vol. 27, № 3. P. 475-485.

REFERENCES

1. Scott, W. R. 1951, “Algebraically closed groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 2, pp. 118-121.
2. Neumann, B. H. 1952, “A note on algebraically closed groups”, *J. London. Math. Soc.* vol. 27. pp. 227-242.
3. Macintyre, A. 1972, “On algebraically closed groups”, *Ann. of Math.* vol. 96. pp. 53-97.
4. Lyndon, R. C. & Schupp, P. E. Combinatorial group theory. Springer, 2015.
5. Makanin, G. S. 1984, “Decidability of the universal and positive theories of a free group”, *Math. USSR-Izv.*, vol. 25, no. 1, pp. 75-88.

6. Borisov, V. V. 1969, "Simple examples of groups with unsolvable word problem", *Math. Notes.*, vol. 6, no. 5, pp. 768-775.

7. Merzlyakov, Yu. I. 1966, "Positive formulae over free groups", *Algebra i logika.*, vol. 5, no. 4, pp. 25-42 (in Russian).

8. Sacerdote, G. S. 1973, "Almost all free products of groups have the same positive theory", *J. Algebra.*, vol. 27, no. 3, pp. 475-485.

Получено 21.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.