ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК

Том 21. Выпуск 1.

УДК 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-165-185

Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых[1]

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский

Добровольский Николай Николаевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет; доцент кафедры алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com

Реброва Ирина Юрьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, декан факультета математики, физики и информатики, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: i_rebrova@mail.ru

Добровольский Николай Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой алгебры, математического анализа и геометрии, Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, г. Тула.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Аннотация

В работе для произвольного моноида $M(PE)$ с экспоненциальной последовательностью простых чисел PE типа q решается обратная задача, то есть нахождение асимптотики для функции распределения элементов моноида $M(PE)$, исходя из асимптотики распределения простых чисел последовательности простых чисел PE типа q.

Для решения этой задачи вводится понятие произвольной экспоненциальной последовательности натуральных чисел типа q и рассматривается моноид, порожденный этой последовательностью. С помощью двух гомоморфизмов таких моноидов задача о распределении плотности сводится к аддитивной задаче Ингама.

Показано, что для этого класса моноидов понятие степенной плотности не работает. Введено новое понятие C логарифмической θ-степенной плотности.

Показано, что любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C=\pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta=\frac{1}{2}$.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, ряд Дирихле, дзета-функция моноида натуральных чисел, эйлерово произведение, экспоненциальная последовательность простых, C логарифмическая θ-степенная плотность.

Библиография: 28 названий.

Для цитирования:

Н. Н. Добровольский, И. Ю. Реброва, Н. М. Добровольский. Обратная задача для моноида с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сборник. 2020. Т. 21, вып. 1, С. 165–185.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №19-41-710004_р_а.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK

Vol. 21. No. 1.

UDC 511.3 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-165-185

Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of primes[2]

N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii

Dobrovol'skii Nikolai Nikolaevich — candidate of physical and mathematical sciences, associate Professor of the department of applied mathematics and computer science, Tula State University; associate Professor of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: nikolai.dobrovolsky@gmail.com
Rebrova Irina Yuryevna — candidate of physical and mathematical Sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, physics and computer science, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: i_rebrova@mail.ru
Dobrovol'skii Nikolai Mihailovich — doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the department of algebra, mathematical analysis and geometry, Tula State L. N. Tolstoy Pedagogical University, Tula.
e-mail: dobrovol@tsput.ru

Abstract

In this paper, for an arbitrary monoid $M(PE)$ with an exponential sequence of primes PE of type q, the inverse problem is solved, that is, finding the asymptotic for the distribution function of elements of the monoid $M(PE)$, based on the asymptotic distribution of primes of the sequence of primes PE of type q.

To solve this problem, we introduce the concept of an arbitrary exponential sequence of natural numbers of the type q and consider the monoid generated by this sequence. Using two homomorphisms of such monoids, the density distribution problem is reduced to the additive Ingham problem.

It is shown that the concept of power density does not work for this class of monoids. A new concept of C logarithmic θ-power density is introduced.

It is shown that any monoid $M(PE)$ for an arbitrary exponential sequence of primes PE of type q has C logarithmic θ-power density with $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ and $\theta = \frac{1}{2}$.

Keywords: Riemann zeta function, Dirichlet series, zeta function of the monoid of natural numbers, Euler product, exponential sequence of primes, C logarithmic θ-power density.

Bibliography: 28 titles.

For citation:
N. N. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, N. M. Dobrovol'skii, 2020, "Inverse problem for a monoid with an exponential sequence of Prime numbers", *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 165–185.

Посвящается 80-летию академика РАН,
профессора Владимира Петровича Платонова

[2]Acknowledgments: The reported study was funded by RFBR, project number 19-41-710004_r_a.

1. Введение

В работе [14] дано следующее определение экспоненциальной последовательности простых чисел.

Определение 1. *Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ называется экспоненциальной типа q, если выполняются соотношения $q \leqslant p_1 < q^2$, $q^\nu < p_\nu < q^{\nu+1}$ $(\nu \geqslant 2)$.*

В силу постулата Бертрана, доказанного П. Л. Чебышёвым (см. [26]), для любого $q \geqslant 2$ существует бесконечно много экспоненциальных последовательностей простых чисел типа q.

В работе [14] было дано определение

Определение 2. *Для любого множества A натуральных чисел дзета-функция $\zeta(A|\alpha)$ определяется равенством*

$$\zeta(A|\alpha) = \sum_{x \in A} \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha = \sigma + it,\, \sigma > \sigma_A). \tag{1}$$

Если множество A конечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ на всей комплексной α-плоскости. Если множество A бесконечное, то равенство (1) задает дзета-функцию $\zeta(A|\alpha)$ только при $\sigma > \sigma_A$, при этом обязательно в точке $\alpha = \sigma_A$ будет полюс первого порядка и $0 \leqslant \sigma_A \leqslant 1$, так как это следует из свойств дзета-ряда для дзета-функции $\zeta(\alpha)$ (см. [24], [26]). Отметим, что при $\sigma > \sigma_A$ ряд абсолютно сходится, а при $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > \sigma_A$ ряд равномерно сходится.

Пусть $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q и $M(PE)$ — моноид натуральных чисел, образованный с помощью PE. В работе [14] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q дзета-ряд для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$ абсолютно сходится для любого α в полуплоскости $\sigma > 0$ и равномерно в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0$ для любого $\sigma_0 > 0$.*

В работе [18] была высказана гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функции $\zeta(M(PE))|\alpha)$, которая была доказана в работе [17]. Тем самым было установлено, что для этой дзета-функции её область голоморфности совпадает с правой полуплоскостью $\sigma > 0$.

В работе [15] доказана теорема о количестве простых элементов в моноиде $M(A)$, не превосходящих x, которое будем обозначать через $\pi_{P(M)}(x)$. В общем случае это непростая задача, однако для случая любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q и моноида $M(PE)$ можно дать удовлетворительный ответ.

Теорема 2. *Для любого $q \geqslant 2$ и любой экспоненциальной последовательности простых чисел $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ типа q для количества простых элементов в моноиде $M(PE)$, не превосходящих x, справедливо равенство*

$$\pi_{PE}(x) = \frac{\ln x}{\ln q} - \theta_{PE}(x),$$

где $0 \leqslant \theta_{PE}(x) = \left\{\frac{\ln x}{\ln q} - \frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} + \left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\} < 2$ *при* $q^n \leqslant x < q^{n+1}$.

В работе [16] было дано определение σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел.

Определение 3. *Последовательность $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел называется σ-последовательностью, если*

$$\mathbb{P}_\sigma = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\}$$

и найдется N_σ такое, что для любого $n > N_\sigma$ выполняются неравенства

$$n^\sigma \leqslant p_n < (n+1)^\sigma. \tag{2}$$

Нам потребуется теорема Ингама о простых числах в следующей формулировке (см. [25], стр. 66).

Теорема 3. *Существует $X_I > 1$ такое, что для любого $x > X_I$ найдется простое число p_x, для которого выполнены неравенства*

$$x^3 \leqslant p_x \leqslant (x+1)^3. \tag{3}$$

Из этой теоремы сразу следует следующее утверждение.

Пусть $\sigma > 3$ и $X_{I,\sigma} = X_I^{\frac{3}{\sigma}}$, тогда для любого $x > X_{I,\sigma}$ найдется простое число $p_{x,\sigma}$, для которого выполнены неравенства

$$x^\sigma \leqslant p_{x,\sigma} \leqslant (x+1)^\sigma. \tag{4}$$

Из следствия из теоремы Ингама следует, что σ-последовательности простых чисел существуют для любого $\sigma \geqslant 3$.

Остановимся на вопросе о распределении простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел. Обозначим количество простых чисел в σ-последовательности $\mathbb{P}_\sigma$ простых чисел, не превосходящих x через $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$. В работе [16] доказана следующая теорема.

Теорема 4. *При $x > N_\sigma : \sigma$ для функции $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$ справедливы равенства*

$$\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x) = x^{\frac{1}{\sigma}} + \theta(x), \tag{5}$$

где $-2 < \theta(x) < -1$.

Теоремы 2 и 4 непосредственно связаны с тематикой работ Б. М. Бредихина [2]–[10]. Следуя этим работам, определим функции $\nu_{M(PE)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE)}(x) = \sum_{n\in M(PE),\, n\leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x) = \sum_{n\in M(\mathbb{P}_\sigma),\, n\leqslant x} 1.$$

Целью данной и следующих работ будет решение обратной задачи для функций $\nu_{M(PE)}(x)$ и $\nu_{M(\mathbb{P}_\sigma)}(x)$, т. е. нахождение асимптотики для этих функций, зная асимптотики для функций $\pi_{PE}(x)$ и $\pi_{\mathbb{P}_\sigma}(x)$.

2. Вспомогательные леммы

Пусть M — произвольный моноид натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы, $P(M)$ — множество его простых элементов и функции $\nu_M(x)$, $\pi_{P(M)}(x)$ заданы равенствами

$$\nu_M(x) = \sum_{n\in M,\, n\leqslant x} 1, \qquad \pi_{P(M)}(x) = \sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x} 1.$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\nu_M(x)\ln x = \int\limits_1^x \nu_M(u)\frac{du}{u} + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right)\ln q. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через $\Pi_M(x)$ произведение всех элементов из моноида M, непревосходящих x:

$$\Pi_M(x) = \prod_{n\in M,\, n\leqslant x} n,$$

тогда, в силу однозначности разложения на простые элементы в моноиде M, получим

$$\Pi_M(x) = \prod_{q\in P(M),\, q\leqslant x} q^{\beta_{M,q}(x)},$$

где $\beta_{M,q}(x)$ — показатель степени, с которым простой элемент q входит в произведение $\Pi_M(x)$.

По аналогии с формулой для факториала имеем:

$$\beta_{M,q}(x) = \sum_{k\geqslant 1}\nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right).$$

Отсюда после логарифмирования получим

$$\sum_{n\in M,\, n\leqslant x}\ln n = \sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x}\sum_{k\geqslant 1}\nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right)\ln q. \tag{7}$$

Применяя теорему Абеля (см. [26], стр. 106) при $M = \{1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\}$, $a_n = 1$, $\varphi(x) = \ln x$, $A(x) = \sum_{\lambda_n\leqslant x} a_n = \nu_M(x)$ к левой части последнего равенства, получим

$$\sum_{n\in M,\, n\leqslant x}\ln n = \nu_M(x)\ln x - \int\limits_1^x \nu_M(t)\frac{dt}{t}. \tag{8}$$

Заменяя левую часть в (8) на правую часть из (7), получим утверждение леммы

$$\nu_M(x)\ln x = \int\limits_1^x \nu_M(u)\frac{du}{u} + \sum_{k\geqslant 1}\sum_{q\in P(M),\, q\leqslant x} \nu_M\left(\frac{x}{q^k}\right)\ln q.$$

□

Лемма 2. *Пусть $q \geqslant 2$ и $PE = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*[3]

$$\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1} = \exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1} + \frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2 p_1^k} - O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right), \tag{9}$$

где $x \geqslant p_1 > 1$.

[3] Здесь и далее, как обычно, $\exp(x) = e^x$.

Доказательство. Действительно,

$$\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}=\exp\left(\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}\right).$$

Применяя к внутренней сумме по p_j теорему Абеля, получим

$$\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}=\frac{\pi_{PE}(x)}{kx^k}+\int\limits_{p_1}^{x}\frac{\pi_{PE}(t)}{t^{k+1}}dt.$$

Применим теорему 2, получим

$$\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}=\frac{\frac{\ln x}{\ln q}-\theta_{PE}(x)}{kx^k}+\int\limits_{p_1}^{x}\frac{\frac{\ln t}{\ln q}-\theta_{PE}(t)}{t^{k+1}}dt.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k\geqslant 1}\sum_{p_j\leqslant x}\frac{1}{kp_j^k}=\left(\frac{\ln x}{\ln q}-\theta_{PE}(x)\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}-\frac{\ln x}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}+$$
$$+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{p_1^k}-\frac{1}{x^k}\right)-\theta_1\ln\frac{1-\frac{1}{p_1}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-$$
$$-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)+\frac{1}{x}\right)\to\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\ (x\to\infty),$$

где $0\leqslant\theta_1<2$. □

Лемма 3. *Пусть $q\geqslant 2$ и $PE=\{p_1,p_2,\ldots,p_n,\ldots\}$ — экспоненциальная последовательность простых чисел типа q. Справедливо неравенство*

$$\nu_{M(PE)}(x)\leqslant x\exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right),\qquad(10)$$

где $x\geqslant p_1>1$.

Доказательство. Действительно,

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}\leqslant\prod_{p_j\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p_j}\right)^{-1}.$$

Отсюда и из леммы 2 следует, что

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}\leqslant\exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right).$$

По теореме Абеля

$$\sum_{n\in M(PE),\,n\leqslant x}\frac{1}{n}=\frac{\nu_{M(PE)}(x)}{x}+\int\limits_{1}^{x}\frac{\nu_{M(PE)}(t)}{t^2}dt.$$

Следовательно,

$$\nu_{M(PE)}(x) \leqslant x \exp\left(\frac{\ln p_1}{\ln q}\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)^{-1}+\frac{1}{\ln q}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2p_1^k}-O\left(\ln\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\right)\right).$$

□

Мы видим, что в данном случае подход Б. М. Бредихина не работает, так как мы заведомо имеем случай для моноида $M(PE)$, когда отсутствует степенная θ-плотность, так как при степенной плотности невозможна асимптотическая формула из теоремы 2. Далее мы будем опираться на аддитивную теорему Ингама, но нам удастся получить только две асимптотические оценки сверху и снизу.

3. О двух гомоморфизмах моноида с экспоненциальной последовательностью простых

Пусть G — произвольная свободная коммутативная мультипликативная полугруппа с нейтральным элементом e и со счетным числом образующих элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$, множество которох будем обозначать через $\Omega(G)$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, обладающий тем свойством, что в полугруппе G имеется только конечное число элементов g с $N(g) \leqslant x$ для любого вещественного x. Обозначим через M его образ. Это будет мультипликативный моноид натуральных чисел $M = N(G)$. Вслед за Б. М. Бредихиным (см. [2]), рассмотрим дзета-функцию полугруппы G

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g\in G}\frac{1}{N^\alpha(g)}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_G,$$

где σ_G — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции полугруппы G.

В силу мультипликативности гомоморфизма имеет место разложение в эйлерово произведение

$$\zeta_G(\alpha) = P_G(\alpha) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{N^\alpha(\omega_\nu)}\right)^{-1}$$

в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_G$.

Рассмотрим дзета-функцию моноида $M = N(G)$

$$\zeta(M|\alpha) = \sum_{n\in M}\frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha = \sigma + it, \quad \sigma > \sigma_M,$$

где σ_M — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле для дзета-функции моноида $M = N(G)$.

Вообще говоря, $\zeta_G(\alpha) \neq \zeta(M|\alpha)$. Дело в том, что

$$\zeta_G(\alpha) = \sum_{g\in G}\frac{1}{N^\alpha(g)} = \sum_{n\in M}\frac{|N^{-1}(n)|}{n^\alpha},$$

где $N^{-1}(n) = \{g \in G | N(g) = n\}$ — прообраз натурального числа n при гомоморфизме $N(g)$ полугруппы G в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел, а $|N^{-1}(n)|$ — количество элементов в этом прообразе, которое конечно в силу ограничений на гомоморфизм $N(g)$.

Таким образом, равенство дзета-функций возможно только в случае изоморфизма G и $M = N(G)$.

Следующее важное обстоятельство связано с тем, что $P(M)$ — множество простых элементов мультипликативного моноида M, вообще говоря, не совпадает с образом множества образующих элементов полугруппы G: $P(M) \subset N(\Omega(G))$.

Напомним, что если через $P(M|\alpha)$ обозначается эйлерово произведение:

$$P(M|\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^{\alpha}}\right)^{-1},$$

тогда для произвольного моноида M натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы справедливо равенство

$$\zeta(M|\alpha) = P(M|\alpha).$$

Таким образом, возможны следующие ситуации:

$$\zeta(M|\alpha) \neq P(M|\alpha), \quad P(M|\alpha) \neq P_G(\alpha) = \prod_{r\in P(M)} \left(1 - \frac{1}{r^{\alpha}}\right)^{-|N^{-1}(r)|}.$$

Рассмотрим в качестве G мультипликативный моноид $M(PE)$, порожденный экспоненциальной системой простых чисел PE типа q, где $q \geqslant 2$ — любое натуральное число. Определим два гомоморфизма мультипликативного моноида $M(PE)$ в мультипликативный моноид $\mathbb{N}$ натуральных чисел:

$$N_1 : M(PE) \to \mathbb{N} : N_1\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} j_\nu\beta_\nu},$$

$$N_2 : M(PE) \to \mathbb{N} : N_2\left(\prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}\right) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} (j_\nu+1)\beta_\nu}.$$

Обозначим через $M_1(q)$ образ мультипликативного моноида $M(PE)$ при гомоморфизме N_1, а через $M_2(q)$ при гомоморфизме N_2. Непосредственно из определения следует, что

$$M_1(q) = \{1, q, q^2, \ldots\}, \quad M_2(q) = \{1, q^2, q^3, \ldots\}.$$

Отсюда сразу следует, что $P(M_1(q)) = \{q\}$ и $P(M_2(q)) = \{q^2, q^3\}$.

Определим функции $\nu_{M(PE),1}(x)$ и $\nu_{M(PE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(PE),1}(x) = \sum_{n\in M(PE),\, N_1(n)\leqslant x} 1, \qquad \nu_{M(PE),2}(x) = \sum_{n\in M(PE),\, N_2(n)\leqslant x} 1.$$

Лемма 4. *Справедливы неравенства:*
для любого $n \in M(PE)$ имеем $N_1(n) \leqslant n \leqslant N_2(n)$,

$$\nu_{M(PE),2}(x) \leqslant \nu_{M(PE)}(x) \leqslant \nu_{M(PE),1}(x).$$

Доказательство. Пусть $n = \prod_{\nu=1}^{n} p_{j_\nu}^{\beta_\nu}$, тогда, так как $q^{j_\nu} \leqslant p_{j_\nu} \leqslant q^{j_\nu+1}$, имеем неравенства

$$N_1(n) = q^{\sum_{\nu=1}^{n} j_\nu\beta_\nu} \leqslant n \leqslant q^{\sum_{\nu=1}^{n} (j_\nu+1)\beta_\nu} = N_2(n).$$

Отсюда сразу вытекает двустороннее неравенство для функции $\nu_{M(PE)}(x)$. □

Обозначим через $p_1(n)$ количество решений в неотрицательных целых числах x_1, x_2, ..., x_r, ... диофантова уравнения

$$n = 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \ldots + r \cdot x_r + \ldots,$$

а через $p_2(n)$ количество решений диофантова уравнения

$$n = 2 \cdot x_2 + \ldots + r \cdot x_r + \ldots.$$

Положим

$$P_1(x) = \sum_{n \leqslant x} p_1(n), \quad P_2(x) = \sum_{n \leqslant x} p_2(n).$$

Лемма 5. *Справедливы равенства*

$$\nu_{M(PE),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right), \quad \nu_{M(PE),2}(x) = P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $N_1(n) = q^m$, то $m = \sum_{\nu=1}^{n} j_\nu \beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $n \in M(PE)$, таких что $N_1(n) = q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(n) = q^m \leqslant x$ следует, что $m \leqslant \frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично. □

4. Об экспоненциальных последовательностях

Дадим следующее определение.

Определение 4. *Пусть $q \geqslant 2$ — произвольное натуральное число, тогда бесконечная последовательность натуральных чисел $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < \ldots$ называется экспоненциальной последовательностью типа q, если выполняются соотношения $q \leqslant q_1 < q^2$, $q^\nu \leqslant q_\nu < q^{\nu+1}$ ($\nu \geqslant 2$).*

Таким образом, минимальной экспоненциальной последовательностью натуральных чисел типа q будет геометрическая прогрессия $\{q, q^2, \ldots, q^n, \ldots\}$ со знаменателем q, а максимальной — сдвинутая геометрическая прогрессия $\{q^2 - 1, q^3 - 1, \ldots, q^n - 1, \ldots\}$ со знаменателем q. Если QE — произвольная экспоненциальная последовательность натуральных чисел типа q, то через $M(QE)$ будем обозначать минимальный мультипликативный моноид натуральных чисел, порождённый последовательностью QE. Таким образом,

$$M(QE) = \left\{ n = \prod_{\nu=1}^{m} q_{j_\nu}^{\beta_\nu} \,\middle|\, \beta_\nu > 0 \, (\nu = 1, \ldots, m), m \geqslant 0 \right\}.$$

Нетрудно задать гомоморфизм N произвольной коммутативной свободной полугруппы G с нейтральным элементом e и системой образующих $\Omega(G)$ в мультипликативный моноид $M(QE)$, положив

$$N(e) = 1, \quad N(\omega_\nu) = q_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Тогда для любого $g \in G$ имеем:

$$g = \prod_{\nu=1}^{m} \omega_{j_\nu}^{\beta_\nu}, \quad N(g) = \prod_{\nu=1}^{m} q_{j_\nu}^{\beta_\nu}.$$

Если $M(QE)$ моноид с однозначным разложением на образующие элементы, то по аналогии со случаем мультипликативного моноида $M(PE)$ можно определить два гомоморфизма N_1 и N_2 мультипликативного моноида QE в мультипликативные моноиды $M_1(q)$ и $M_2(q)$, соответственно.

Определим функции $\nu_{M(QE),1}(x)$ и $\nu_{M(QE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu_{M(QE),1}(x)=\sum_{n\in M(QE),\,N_1(n)\leqslant x}1,\qquad \nu_{M(QE),2}(x)=\sum_{n\in M(QE),\,N_2(n)\leqslant x}1,$$

а функции $\nu^*_{M(QE),1}(x)$ и $\nu^*_{M(QE),2}(x)$ с помощью равенств:

$$\nu^*_{M(QE),1}(x)=\sum_{g\in G,\,N_1(N(g))\leqslant x}1,\qquad \nu^*_{M(QE),2}(x)=\sum_{g\in G,\,N_2(N(g))\leqslant x}1.$$

Необходимо различать две функции $\nu_{M(QE)}(x)$ и $\nu^*_{M(QE)}(x)$, которые задаются равенствами

$$\nu_{M(QE)}(x)=\sum_{n\in M(QE),\,n\leqslant x}1,\qquad \nu^*_{M(QE)}(x)=\sum_{g\in g,\,N(g)\leqslant x}1.$$

Ясно, что $\nu_{M(QE)}(x)\leqslant\nu^*_{M(QE)}(x)$, так как при гомоморфизме $N(g)$ некоторые элементы могут "склеиваться". Таким образом, $\nu^*_{M(QE)}(x)$ подсчитывает элементы в $M(QE)$ с учетом кратности, а $\nu_{M(QE)}(x)$ — без учёта кратности.

Лемма 6. *Справедливы неравенства:*
для любого $n\in M(QE)$ имеем $N_1(n)\leqslant n\leqslant N_2(n)$,

$$\nu_{M(QE),2}(x)\leqslant\nu_{M(QE)}(x)\leqslant\nu_{M(QE),1}(x),\quad \nu^*_{M(QE),2}(x)\leqslant\nu^*_{M(QE)}(x)\leqslant\nu^*_{M(QE),1}(x).$$

Доказательство. Дословно повторяет доказательство леммы 4. □
Аналогом леммы 5 будет следующая лемма.

Лемма 7. *Справедливы равенства*

$$\nu^*_{M(PE),1}(x)=P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right),\quad \nu^*_{M(PE),2}(x)=P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right).$$

Доказательство. Действительно, если $N_1(N(g))=q^m$, то $m=\sum_{\nu=1}^{n}j_\nu\beta_\nu$. Отсюда следует, что количество $g\in G$, таких что $N_1(N(g))=q^m$, в точности равно $p_1(m)$. Так как из $N_1(N(g))=q^m\leqslant x$ следует, что $m\leqslant\frac{\ln x}{\ln q}$, то первое равенство доказано. Второе равенство доказывается аналогично. □

Обозначим через $\mathbb{PE}_q$ множество всех экспоненциальных последовательностей простых типа q, а через $\mathbb{QE}_q$ множество всех экспоненциальных последовательностей типа q.

Лемма 8. *Для мощностей множеств $\mathbb{PE}_q$ и $\mathbb{QE}_q$ справедливо равенство*

$$|\mathbb{PE}_q|=|\mathbb{QE}_q|=\mathfrak{c}.$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим множество Δ всех бесконечных последовательностей из 0 и 1. Как известно, его мощность — континуум: $|\Delta|=\mathfrak{c}$. Каждой последовательности $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\ldots)\in\Delta$ поставим в соответствие экспоненциальную последовательность QE_ε типа q, заданную равенством

$$QE_\varepsilon=\{q+\varepsilon_1,q^2+\varepsilon_2,\ldots,q^n+\varepsilon_n,\ldots\}.$$

Так как все такие последовательности различные, то мощность множества всех экспоненциальных последовательностей типа q — континуум.

Из асимптотического закона распределения простых чисел вытекает, что для любого натурального $q \geqslant 2$ найдутся две экспоненциальные последовательности простых типа q, пусть это

$$PE_1 = \{p_{1,1} < p_{1,2} < \ldots < p_{1,n} < \ldots\}, \quad PE_2 = \{p_{2,1} < p_{2,2} < \ldots < p_{2,n} < \ldots\},$$

такие, что начиная с некоторого номера n_0 имеем $p_{1,n} \neq p_{2,n}$ при $n \geqslant n_0$. Каждой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in \Delta$ поставим в соответствие экспоненциальную последовательность простых PE_ε типа q, заданную равенством

$$PE_\varepsilon = \{\varepsilon_1 p_{1,1} + (1-\varepsilon_1)p_{2,1}, \varepsilon_2 p_{1,2} + (1-\varepsilon_2)p_{2,2}, \ldots, \varepsilon_n p_{1,n} + (1-\varepsilon_n)p_{2,n}, \ldots\}.$$

Так как любые две такие последовательности различные, если существует $n \geqslant n_0$ такое, что элементы ε для этого номера различные, то мощность множества всех экспоненциальных последовательностей простых типа q — континуум. □

Для дальнейшего нам потребуется экспоненциальная последовательность $QE_1(q,a)$ типа q, заданная равенством

$$QE_1(q,a) = \left\{q + q\left\{\frac{a}{q}\right\}, q^2 + q^2\left\{\frac{a}{q^2}\right\}, \ldots, q^n + q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\}, \ldots\right\},$$

и последовательность $QE_2(q,a)$ типа q, заданная равенством

$$QE_2(q,a) = \left\{q^2 - q\left\{\frac{a}{q}\right\}, q^3 - q^2\left\{\frac{a}{q^2}\right\}, \ldots, q^{n+1} - q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\}, \ldots\right\},$$

Заметим, что при $n > \frac{\ln a}{\ln q}$ справедливо равенство $q^n + q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\} = q^n + a$ и равенство $q^{n+1} - q^n\left\{\frac{a}{q^n}\right\} = q^{n+1} - a$.

5. Следствия из аддитивной теоремы Ингама

Нам потребуется следующая аддитивная теорема Ингама (см. [23], стр. 180).

Теорема 5. *Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ — данная последовательность вещественных чисел, причём*

$$N(u) = Bu^\beta + R(u), \quad B > 0, \quad \beta > 0,$$

где $N(u)$ — количество чисел λ_ν, не превосходящих u, и

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = b \ln u + c + o(1)$$

при $u \to \infty$. Для вещественного l пусть будет $p(l)$ — количество решений уравнения

$$l = r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \ldots$$

в целых $r_\nu \geqslant 0$.

Обозначим для вещественного u и $h > 0$

$$P(u) = \sum_{l<u} p(l),$$

где суммирование ведется по дискретному множеству чисел l, для которых $p(l) \neq 0$, и

$$P_h(u) = \frac{P(u) - P(u-h)}{h}.$$

Тогда при $u \to \infty$

$$P(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b+\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b+\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta+1}, \quad M = (B\beta\Gamma(\beta+1)\zeta(\beta+1))^{\frac{1}{\beta}}.$$

Также

$$P_h(u) \sim \left(\frac{1-\alpha}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^c M^{-\left(b-\frac{1}{2}\right)\alpha} u^{\left(b-\frac{1}{2}\right)(1-\alpha)-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{\alpha}(Mu)^\alpha},$$

где h — такая положительная константа, что $P_h(u)$ есть неубывающая функция u (если h принадлежит к данной последовательности λ_ν, то это условие выполняется).

Следствие 1. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_1(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(PE),1}(x) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, тогда $N(u) = [u]$, $R(u) = [u] - u$, $B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и (см. [23], стр. 181)

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_1(x) \sim \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}} x^{-\frac{1}{2}} e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2x}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(PE),1}(x) = P_1\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{2\frac{\ln x}{\ln q}}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 2. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$P_2(x) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}, \quad \nu_{M(PE),2}(x) \sim \frac{\ln q}{4\sqrt{3}\ln x} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu = \nu + 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, $f(u) = [u] - 1$, тогда

$$N(u) = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ f(u), & \text{при } u \geqslant 1, \end{cases} \qquad R(u) = \begin{cases} -u, & \text{при } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ f(u) - u, & \text{при } u \geqslant 1, \end{cases}$$

$B = \beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $M = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v} dv = -\frac{3}{2}\ln u - \frac{1}{2}\ln 2\pi + o(1).$$

Таким образом, $b=-\frac{3}{2}$, $c=-\frac{1}{2}\ln 2\pi$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P_2(x)\sim\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\ln 2\pi}{2}}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-1}e^{2\left(\frac{\pi^2}{6}x\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4\sqrt{3}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}x}}.$$

Отсюда следует, что

$$\nu_{M(PE),2}(x)=P_2\left(\frac{\ln x}{\ln q}\right)\sim\frac{\ln q}{4\sqrt{3}\ln x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 3. *При $x\to\infty$ справедливы соотношения*

$$\nu_{M(QE_1(q,1))}(x)\sim\frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2\ln x}}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu=\ln(q^\nu+1)=\nu\ln q+\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)$ $(\nu=1,2,\ldots)$, тогда

$$N(u)=\frac{u}{\ln q}+R(u)=\begin{cases}0, & \text{при } 0\leqslant u<\lambda_1,\\ \nu, & \text{при } \lambda_\nu\leqslant u<\lambda_{\nu+1},\end{cases}\qquad R(u)=\begin{cases}-\frac{u}{\ln q}, & \text{при } 0\leqslant u<\lambda_1,\\ \nu-\frac{u}{\ln q}, & \text{при } \lambda_\nu\leqslant u<\lambda_{\nu+1},\end{cases}$$

$B=\frac{1}{\ln q}$, $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $M=\frac{\zeta(2)}{\ln q}=\frac{\pi^2}{6\ln q}$ и при $\lambda_n\leqslant u<\lambda_{n+1}$

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{u}{\ln q}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\ln\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}+n\ln\frac{u}{\lambda_n}=-\frac{u}{\ln q}-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\lambda_\nu+n\ln u=$$

$$=n\ln u-\frac{u}{\ln q}-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\ln\nu+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)\right).$$

Заметим, что $u=n\ln q+\theta(u)$, $\ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right)\leqslant\theta(u)<\ln q+\ln\left(1+\frac{1}{q^{n+1}}\right)$, $\ln u=\ln n+\ln\ln q+$ $+\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$,

$$\ln n+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^n}\right)}{n\ln q}\right)\leqslant\ln u<\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^{n+1}}\right)}{(n+1)\ln q}\right).\quad(11)$$

Применим формулу Стирлинга

$$\sum_{\nu=1}^{n}\ln\nu=\frac{1}{2}(\ln 2\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{1}{12n+\theta_n},$$

где $0<\theta_n<1$. Получим

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=n\ln n+n\ln\ln q+n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)-n-\frac{\theta(u)}{\ln q}-$$

$$-\left(\frac{1}{2}(\ln 2\pi+\ln n)+n\ln n-n+\frac{1}{12n+\theta_n}\right)-n\ln\ln q-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)=$$

$$=n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)-\frac{\theta(u)}{\ln q}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{\ln n}{2}-\frac{1}{12n+\theta_n}-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right).$$

Так как $n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)-\frac{\theta(u)}{\ln q}=O\left(\frac{\theta^2(u)}{n\ln^2 q}\right)$, $\frac{\ln n}{2}=\frac{\ln u}{2}-\frac{\ln\ln q}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$, сходится ряд

$$c(q)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)$$

и для остаточного ряда справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\right)=O\left(\frac{1}{nq^n}\right),$$

то справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{\ln u}{2}+\frac{\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c(q)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c(q)$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P(x)\sim\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\ln\ln q}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}-c(q)}x^{-\frac{1}{2}}e^{2\left(\frac{\pi^2}{6\ln q}x\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2x}}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}x}}.$$

Отсюда следует, что, так как для $q_\nu=q^\nu+1$ неравенство

$$\prod_{\nu=1}^{m}q_{j_\nu}^{\beta_\nu}\leqslant x$$

равносильно неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{j_\nu}\beta_\nu\leqslant\ln x,$$

то $\nu_{M(QE_1(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)$ и

$$\nu_{M(QE_1(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)\sim\frac{\sqrt{\ln q}}{2\pi e^{c(q)}\sqrt{2\ln x}}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Следствие 4. *При $x\to\infty$ справедливы соотношения*

$$\nu_{M(QE_2(q,1))}(x)\sim\frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

Доказательство. Положим $\lambda_\nu=\ln\left(q^{\nu+1}-1\right)=(\nu+1)\ln q+\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)$ $(\nu=1,2,\ldots)$, тогда

$$N(u)=\frac{u}{\ln q}+R(u)=\begin{cases}0, & \text{при } 0\leqslant u<\lambda_1,\\ \nu, & \text{при } \lambda_\nu\leqslant u<\lambda_{\nu+1},\end{cases}\qquad R(u)=\begin{cases}-\frac{u}{\ln q}, & \text{при } 0\leqslant u<\lambda_1,\\ \nu-\frac{u}{\ln q}, & \text{при } \lambda_\nu\leqslant u<\lambda_{\nu+1},\end{cases}$$

$B=\frac{1}{\ln q}$, $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $M=\frac{\zeta(2)}{\ln q}=\frac{\pi^2}{6\ln q}$ и при $\lambda_n\leqslant u<\lambda_{n+1}$

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{u}{\ln q}+\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu\ln\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}+n\ln\frac{u}{\lambda_n}=-\frac{u}{\ln q}-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\lambda_\nu+n\ln u=$$

$$=n\ln u-\frac{u}{\ln q}-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\ln(\nu+1)+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)\right).$$

Заметим, что $u=(n+1)\ln q+\theta(u)$, $\ln\left(1-\frac{1}{q^{n+1}}\right)\leqslant\theta(u)<\ln q+\ln\left(1-\frac{1}{q^{n+2}}\right)$, $\ln u=\ln(n+1)+$ $+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right)$,

$$\ln(n+1)+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{n+1}}\right)}{(n+1)\ln q}\right)\leqslant\ln u<\ln(n+1)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\ln\ln q+\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{n+2}}\right)}{(n+2)\ln q}\right).$$

Применим формулу Стирлинга

$$\sum_{\nu=1}^{n}\ln(\nu+1)=\frac{1}{2}\left(\ln 2\pi+\ln(n+1)\right)+(n+1)\ln(n+1)-(n+1)+\frac{1}{12(n+1)+\theta_{n+1}},$$

где $0<\theta_{n+1}<1$. Получим

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=n\ln(n+1)+n\ln\ln q+n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right)-(n+1)-\frac{\theta(u)}{\ln q}-$$
$$-\left(\frac{1}{2}\left(\ln 2\pi+\ln(n+1)\right)+(n+1)\ln(n+1)-(n+1)+\frac{1}{12(n+1)+\theta_{n+1}}\right)-n\ln\ln q-$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)=n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right)-\frac{\theta(u)}{\ln q}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\frac{3\ln(n+1)}{2}-$$
$$-\frac{1}{12(n+1)+\theta_{n+1}}-\sum_{\nu=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right).$$

Так как $n\ln\left(1+\frac{\theta(u)}{(n+1)\ln q}\right)-\frac{\theta(u)}{\ln q}=O\left(\frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$, $\frac{3\ln(n+1)}{2}=\frac{3\ln u}{2}-\frac{3\ln\ln q}{2}+O\left(\frac{1}{n}\right)$, сходится ряд

$$c_1(q)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)$$

и для остаточного ряда справедливо асимптотическое равенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{(\nu+1)\ln q}\right)=O\left(\frac{1}{nq^n}\right),$$

то справедливо асимптотическое равенство

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{3\ln u}{2}+\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c_1(q)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, $b=-\frac{3}{2}$, $c=\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi-c_1(q)$. Поэтому по аддитивной теореме Ингама получим

$$P(x)\sim\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{\frac{3\ln\ln q}{2}-\frac{\ln 2\pi}{2}-c_1(q)}x^{-1}e^{2\left(\frac{\pi^2}{6\ln q}x\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}x}}.$$

Отсюда следует, что, так как для $q_\nu=q^{\nu+1}-1$ неравенство

$$\prod_{\nu=1}^{m}q_{j_\nu}^{\beta_\nu}\leqslant x$$

равносильно неравенству

$$\sum_{\nu=1}^{m}\lambda_{j_\nu}\beta_\nu\leqslant\ln x,$$

то $\nu_{M(QE_2(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)$ и

$$\nu_{M(QE_2(q,1))}(x)=P\left(\ln x\right)\sim\frac{\sqrt{\ln^3 q}}{2\pi e^{c_1(q)}\sqrt{2}x}e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}}.$$

□

Перейдём к изучению более сложного случая поведения функции $\nu_{M(PE)}(x)$.

Через λ_ν обозначим $\ln p_\nu$, где простые числа p_ν образуют экспоненциальную систему PE типа q. Ясно, что величина $N(u)$ выражается через величину $\pi_{PE}(x)$ по следующей формуле

$$N(u)=\pi_{PE}\left(e^u\right).$$

Действительно, $\lambda_\nu<u$ тогда и только тогда, когда $p_\nu=e^{\lambda_\nu}<e^u$.

Из теоремы 2 получаем, что

$$N(u)=\frac{u}{\ln q}+R(u),\quad R(u)=-\left\{\frac{u}{\ln q}-\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}-\left\{\frac{\ln p_n}{\ln q}\right\}$$

при $n\ln q\leqslant u<(n+1)\ln q$. Следовательно, $B=\frac{1}{\ln q}$, $\beta=1$. Нам необходимо изучить поведение интеграла $\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv$. Сложность заключается в том, что $\nu\ln q\leqslant\lambda_\nu<(\nu+1)\ln q$ и более тесных границ для произвольной экспоненциальной последовательности простых задать нельзя. Анализируя доказательства предыдущих следствий, мы видим, что существенную роль играет поведение величин $\delta_\nu=\frac{\lambda_\nu-\nu\ln q}{\nu\ln q}$, $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q^\nu}\right)}{\nu\ln q}\leqslant\delta_\nu\leqslant\frac{\ln q+\ln\left(1-\frac{1}{q^{\nu+1}}\right)}{\nu\ln q}$ и суммы

$$S_n(PE,q)=\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\delta_\nu),\quad c(q)-O\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant S_n(PE,q)\leqslant\ln n+O\left(1\right).$$

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{\ln u}{2}+\frac{\ln\ln q}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\pi+O\left(\frac{1}{n}\right)-S_n(PE,q).$$

Доказательство. Рассмотрим поведение функции $R(v)$ на различных интервалах изменения.

При $0\leqslant v<\lambda_1=\ln p_1$ имеем $N(v)=0$,

$$R(v)=\begin{cases}-\frac{v}{\ln q}, & \text{при } 0\leqslant v<\ln q,\\ -1-\left\{\frac{v}{\ln q}\right\}=-\frac{v}{\ln q}, & \text{при } \ln q\leqslant v<\lambda_1,\end{cases}\qquad\int\limits_0^u\frac{R(v)}{v}dv=-\frac{u}{\ln q}.$$

При $\lambda_n\leqslant v<\lambda_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ имеем $N(v)=n$, $R(v)=-\frac{v}{\ln q}+n$. Отсюда следует, что при $\lambda_n \leqslant u < \lambda_{n+1}$ имеем:

$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\lambda_1}{\ln q} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} \frac{R(v)}{v}dv + \int\limits_{\lambda_n}^{u} \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\lambda_1}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}{\ln q} - \nu \ln\frac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\right) -$$
$$-\left(\frac{u-\lambda_n}{\ln q} - n\ln\frac{u}{\lambda_\nu}\right) = -\frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}\ln\lambda_\nu + n\ln u = n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}(\ln\nu + \ln\ln q) -$$
$$-\sum_{\nu=1}^{n}\ln(1+\delta_\nu) = F(u) - S_n(PE,q), \quad F(u) = n\ln u - \frac{u}{\ln q} - \sum_{\nu=1}^{n}(\ln\nu + \ln\ln q).$$

Заметим, что $u = n\ln q + \theta(u)$, $0 < \lambda_n - n\ln q \leqslant \theta(u) < \lambda_{n+1} - n\ln q < \ln q$, $\ln u = \ln n + \ln\ln q + \ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n\ln q}\right)$, поэтому как и при доказательстве следствия 3 получим

$$F(u) = n\ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} - \frac{1}{2}\ln 2\pi - \frac{\ln n}{2} - \frac{1}{12n+\theta_n}.$$

Так как $n\ln\left(1 + \frac{\theta(u)}{n\ln q}\right) - \frac{\theta(u)}{\ln q} = O\left(\frac{\theta^2(u)}{n\ln^2 q}\right)$, $\frac{\ln n}{2} = \frac{\ln u}{2} - \frac{\ln\ln q}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, то

$$F(u) = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln\ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\int\limits_0^u \frac{R(v)}{v}dv = -\frac{\ln u}{2} + \frac{\ln\ln q}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) - S_n(PE,q).$$

□

Из доказанной леммы следует, что мы не можем непосредственно применить аддитивную теорему Ингама для получения асимптотики величины $\nu_{M(PE)}(x)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q.

Следствие 5. *При $x \to \infty$ справедливы соотношения*

$$\ln\nu_{M(PE)}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4

$$\nu_{M(PE),2}(x) \leqslant \nu_{M(PE)}(x) \leqslant \nu_{M(PE),1}(x).$$

Следовательно,

$$\ln\nu_{M(PE),2}(x) \leqslant \ln\nu_{M(PE)}(x) \leqslant \ln\nu_{M(PE),1}(x).$$

Из следствия 1 вытекает, что

$$\ln\nu_{M(PE),1}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}.$$

Из следствия 2 вытекает, что

$$\ln\nu_{M(PE),2}(x) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{\ln x}{\ln q}}.$$

Объединяя оба доказанных соотношения, получаем утверждение следствия. □

6. Заключение

В работе [6] и ряде последующих Б. М. Бредихин работал с понятием степенной плотности последовательности. Из следствий 1–5 видно, что это понятие не работает в случае моноидов, образованных произвольной экспоненциальной последовательностью простых. Естественно дать новое определение.

Определение 5. *Последовательность M натуральных чисел имеет C логарифмическую θ-степенную плотность, если для функции $\nu_M(x)$, заданной равенством*

$$\nu_M(x) = \sum_{n\in M,\, n\leqslant x} 1,$$

справедливо равенство

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \nu_M(x)}{\ln^\theta x} = C, \quad C > 0, \quad \theta > 0.$$

Из следствия 5 следует, что любой моноид $M(PE)$ для произвольной экспоненциальной последовательности простых PE типа q имеет C логарифмическую θ-степенную плотность с $C = \pi\sqrt{\frac{2}{3\ln q}}$ и $\theta = \frac{1}{2}$.

В заключение авторы выражают свою благодарность профессору В. Н. Чубарикову за полезные обсуждения и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Бомбьери, А. Гош Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна // УМН, 2011. Т. 66, вып. 2(398). С. 15–66.

2. Б. М. Бредихин, “Остаточный член в асимптотической формуле для функции $\nu_G(x)$”, Изв. вузов. Матем., 1960, 6, 40–49.

3. Б. М. Бредихин, “Элементарное решение обратных задач о базисах свободных полугрупп”, Матем. сб., 50(92):2 (1960), 221–232.

4. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Докл. АН СССР, 118:5 (1958), 855–857.

5. Б. М. Бредихин, “О степенных плотностях некоторых подмножеств свободных полугрупп”, Изв. вузов. Матем., 1958, 3, 24–30.

6. Б. М. Бредихин, “Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями”, Матем. сб., 46(88):2 (1958), 143–158.

7. Б. М. Бредихин, “Пример конечного гомоморфизма с ограниченной сумматорной функцией”, УМН, 11:4(70) (1956), 119–122.

8. Б. М. Бредихин , Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда, т. I, Москва, Изд. АН СССР (1956), 3.

9. Б. М. Бредихин , О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп, ДАН 94 (1954), 609 — 612.

10. Б. М. Бредихин , О характерах числовых полугрупп с достаточно редкой базой, ДАН 90 (1953), 707 — 710.

11. Воронин С. М., Карацуба А. А. Дзета-функция Римана. — М.: Физ-матлит, 1994. — 376 с.

12. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. — 618 с.

13. Демидов С. С., Морозова Е. А., Чубариков В. Н., Реброва И. Ю., Балаба И. Н., Добровольский Н. Н., Добровольский Н. М., Добровольская Л. П., Родионов А. В., Пихтилькова О. А. Теоретико-числовой метод в приближенном анализе // Чебышевский сб. 2017. — Т. 18, вып. 4. — С. 6–85.

14. Н. Н. Добровольский Дзета-функция моноидов натуральных чисел с однозначным разложением на простые множители // Чебышевский сб. 2017. Т. 18, вып. 4. С. 187–207.

15. Добровольский Н. Н. О моноидах натуральных чисел с однозначным разложением на простые элементы // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 79–105.

16. Добровольский Н. Н. Дзета-функция моноидов с заданной абсциссой абсолютной сходимости // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 142–150.

17. Добровольский Н. Н. Одна модельная дзета-функция моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. — Т. 20, вып. 1, С. 148–163.

18. Добровольский Н. Н., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М., Балаба И. Н., Реброва И. Ю. Гипотеза о "заградительном ряде" для дзета-функций моноидов с экспоненциальной последовательностью простых // Чебышевский сб. 2018. — Т. 19, вып. 1. — С. 106–123.

19. Н. Н. Добровольский, М. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Н. Балаба, И. Ю. Реброва. Алгебра рядов Дирихле моноида натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1, С. 180–196.

20. Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский, И. Ю. Реброва, А. В. Родионов. Моноиды натуральных чисел в теоретико-числовом методе в приближенном анализе // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 1. С. 164–179.

21. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О количестве простых элементов в некоторых моноидах натуральных чисел // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 2. — С. 123–141.

22. Добровольский Н. Н., Калинина А. О., Добровольский М. Н., Добровольский Н. М. О моноиде квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2018. — Т. 19, вып. 3. — С. 95–108.

23. А. Г. Постников Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Наука, 1971. — 416 с.

24. Е. К. Титчмарш Теория дзета-функции Римана. — М.: И-Л, 1952. — 407 с.

25. Э. Трост Простые числа — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1959. — 136 с.

26. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. — М.: Мир, 1974. — 188 с.

27. Чудаков Н. Г. Введение в теорию L-функций Дирихле. — М. – Л.: ОГИЗ, 1947. — 204 с.

28. H. Davenport, H. Heilbronn On the zeros of certain Dirichlet series // J. London Math. Soc. 1936. Vol. 11. P. 181–185.

REFERENCES

1. Bombieria E., Ghoshb A., 2011, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Uspekhi Mat. Nauk*, 66:2(398) pp. 15–66.

2. Bredikhin, B.M., 1960, “The remainder term in the asymptotic formula for the function $\nu_G(x)$”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 6, pp. 40–49.

3. Bredikhin, B.M., 1960, “An elementary solution of inverse problems on bases of free semigroups”, matematicheskiy sbornik, 50(92):2, pp. 221–232.

4. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, Doklady Akademii nauk SSSR, 118:5, pp. 855–857.

5. Bredikhin, B.M., 1958, “On power densities of some subsets of free semigroups”, Izvestiya vuzov Matematika, no. 3, pp. 24–30.

6. Bredikhin, B.M., 1958, “Free numerical semigroups with power densities”, matematicheskiy sbornik, 46(88):2, pp. 143–158.

7. Bredikhin, B.M., 1956, “An example of a finite homomorphism with a bounded adder function”, UMN, 11:4(70), pp. 119–122.

8. Bredikhin, B.M., 1956, “Some questions of the theory of characters of commutative semigroups”, Trudy 3-go Vsesoyuznogo matematicheskogo s’yezda, vol. 1, Moskva, izdatel’stvo akademii nauk SSSR, no. 3.

9. Bredikhin, B.M., 1954, “On adder functions of characters of numerical semigroups”, DAN 94, pp. 609 – 612.

10. Bredikhin, B.M., 1953, “On the characters of numerical semigroups with a rather rare base”, DAN 90, pp. 707–710.

11. Voronin S. M., Karacuba A. A., 1994, *Dzeta-funkcija Rimana*, Izd-vo Fiz-matlit, Moskva, 376 p.

12. Gurvic A., Kurant R., 1968, *Teorija funkcij*, Izd-vo Nauka, Moskva, 618 p.

13. Demidov S. S., Morozova E. A., Chubarikov V. N., Rebrov I. Yu., Balaba I. N., Dobrovol’skii N. N., Dobrovol’skii N. M., Dobrovol’skaya L. P., Rodionov A. V., Pikhtil’kova O. A., 2017, "Number-theoretic method in approximate analysis" *Chebyshevskii Sbornik* vol. 18, № 4. pp. 6–85.

14. Dobrovolsky N. N., 2017, "The zeta-function is the monoid of natural numbers with unique factorization" , *Chebyshevskii Sbornik*, vol 18, № 4 pp. 188–208.

15. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "On monoids of natural numbers with unique factorization into prime elements" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 79–105.

16. N. N. Dobrovol’skii, 2018, "The zeta function of monoids with a given abscissa of absolute convergence" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 142–150.

17. N. N. Dobrovol’skii, M. N. Dobrovol’skii, N. M. Dobrovol’skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2018, "About «zagrobelna the series» for the zeta function of monoids with exponential sequence of simple" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 1, pp. 106–123.

18. N. N. Dobrovol'skii, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. N. Balaba, I. Yu. Rebrova, 2019, "Dirichlet series algebra of a monoid of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 180–196.

19. N. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii, I. Yu. Rebrova, A. V. Rodionov, 2019, "Monoids of natural numbers in the numerical-theoretical method in the approximate analysis" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 20, no. 1, pp. 164–179.

20. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the number of prime elements in certain monoids of natural numbers" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 2, pp. 123–141.

21. N. N. Dobrovol'skii, A. O. Kalinina, M. N. Dobrovol'skii, N. M. Dobrovol'skii 2018, "On the monoid of quadratic residues" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 19, no. 3, pp. 95–108.

22. Dobrovolskaya L. P., Dobrovolsky M. N., Dobrovol'skii N. M., Dobrovolsky N. N., 2014, "On Hyperbolic Zeta Function of Lattices" , *In: Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications*, Vol. 211. pp. 23–62. DOI:10.1007/978-3-319-03146-0_2.

23. Postnikov, A. G., 1971, *Introduction to analytical number theory* Izd-vo "Nauka" , Moskva, 416 p.

24. Titchmarsh E. K., 1952, *Teorija dzeta-funkcii Rimana* Izd-vo I-L, Moskva, 407 p.

25. Trost E., 1959, "Prime numbers" , *Izd-vo Fiz-matlit, Moskva*, 136 p.

26. Chandrasekharan K., 1974, *Vvedenie v analiticheskuju teoriju chisel*, Izd-vo Mir, Moskva, 188 p.

27. Chudakov N. G., 1947, *Introduction to the theory of L-Dirichlet functions* — M.-L.: OGIZ, — 204 p.

28. Davenport H., Heilbronn H., 1936, "On the zeros of certain Dirichlet series" , *J. London Math. Soc.* Vol. 11. pp. 181–185.

Получено 18.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.