ЧЕБЫШЕВСКИЙ СБОРНИК
Том 21. Выпуск 1.

УДК 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-145-164

О специальных свойствах некоторых квазиметрик

Е. И. Деза, Б. Мханна

Деза Елена Ивановна — доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: elena.deza@gmail.com
Мханна Батуль — аспирант кафедры теоретической информатики и дискретной математики, Московский педагогический государственный университет (г. Москва).
e-mail: batoolmhanna77@gmail.com

Аннотация

В статье рассмотрены свойства квазиметрики среднего времени первого прохода — обобщенной метрической структуры, тесно связанной с эргодическими однородными цепями Маркова.

Во введении представлена история вопроса, дан обзор основных идей и результатов работы.

В первом разделе собраны основные понятия теории *цепей Маркова* — последовательностей случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующихся тем, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого. Точнее, математическая модель некоторого случайного процесса представляет собой марковскую цепь, если распределение вероятностей параметров процесса в следующий момент времени зависит только от параметров процесса в предыдущий момент.

Во втором разделе собраны базовые определения, необходимые для рассмотрения роли графовых моделей в представлении и исследовании эргодических однородных цепей Маркова. Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги — переходам между ними. Процесс будет эргодическим, если построенный взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице. С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова: если вершина i имеет степень k, то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

В третьем разделе дано определение среднего времени первого прохода для однородной эргодической цепи Маркова. Представлены несколько способов построения соответствующей матрицы M. Подробно проанализирован алгоритм нахождения среднего времени первого прохода с помощью использования сходящихся деревьев ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Описана родственная рекуррентная процедура.

В четвертом разделе матрица среднего времени первого прохода рассмотрена как *квазиметрика m среднего времени первого прохода* на множестве вершин $V = \{1, 2, ..., n\}$ ориентированного графа, соответствующего матрице перехода эргодической однородной цепи Маркова: $m(i, j)$ — ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на орграфе Г, начинающегося с i, для достижения j в первый раз. Эта квазиметрика обладает рядом важных теоретических и прикладных свойств. В частности, квазиметрика среднего времени первого прохода для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G, в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину, является *взвешиваемой квазиметрикой*,

т.е. существует *весовая функция* $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$ имеет место сотношение $m(i,j) + w_i = m(j,i) + w_j$. Менее изучены, но не менее интересны связи квазиметрики среднего времени первого прохода с другими метрическими структурами на графах, в частности, с *α-метрикой леса* и ее вариациями.

Наконец, в пятом разделе рассмотрены примеры построения и исследования квазиметрики среднего времени первого прохода. Помимо иллюстрации "графовой" процедуры построения матрицы M, представлены рекуррентные алгоритмы исследования и проанализированы получающиеся при этом обобщенные метрические структуры.

Ключевые слова: цепь Маркова, среднее время первого прохода, остовной входящий корневой лес ориентированного графа, квазиметрика, квазиметрика среднего времени первого прохода, метрика леса.

Библиография: 25 названий.

Для цитирования:
Е. И. Деза, Б. Мханна. О специальных свойствах некоторых квазиметрик // Чебышевский сборник, 2020, т. 21, вып. 1, с. 145–164.

CHEBYSHEVSKII SBORNIK
Vol. 21. No. 1.

UDC 519.1 DOI 10.22405/2226-8383-2020-21-1-145-164

On special properties of some quasi-metrics

E. I. Deza, B. Mhanna

Deza Elena Ivanovna — doctor of pedagogical Sciences, candidate of physical and mathematical Sciences, associate Professor, Professor of the Department of theoretical Informatics and discrete mathematics, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: elena.deza@gmail.com
Mhanna Batul — graduate student of the Department of Theoretical Informatics and Discrete Mathematics, Moscow State Pedagogical University (Moscow).
e-mail: batoolmhanna77@gmail.com

Abstract

In this paper we consider some questions of the theory and practice of mean first passage time quasi-metric, a generalized metric structure closely related to ergodic homogeneous Markov chains.

The introduction considers the history of the problem and provides an overview of the main ideas and results presented in the article.

The first section gives the basic concepts of the theory of Markov chains. In fact, a *Markov chain* is a mathematical model of some random process describing a sequence of possible events in which the probability of each event depends only on the state attained in the previous event.

The second section collects the basic definitions needed to consider the role of graph models in the presentation and study of ergodic homogeneous Markov chains. The Markov chain can be depicted as an oriented weighted graph of transitions whose vertices correspond to the states of the chain and the arcs correspond to the transitions between them. The process will be ergodic if this weighted oriented graph is weakly connected, and the largest common divisor of the lengths of all its cycles is equal to 1. On the other hand, any connected graph can be used as a basis for building a model of the simplest Markov chain: if a vertex i has degree k, all incident edges are converted into arcs with the weights $\frac{1}{k}$.

In the third section the definition of the mean first passage time for an ergodic homogeneous Markov chain is given. There are several ways to build the corresponding matrix. The algorithm of finding the mean first passage time is analyzed in detail by using converging trees of the oriented graph, related to the transition matrix of the ergodic homogeneous Markov chain. Related recurrent procedure is described.

In the fourth section, a mean first passage time is analyzed as the *quasi-metric* m of *mean first passage time* on the vertices $V = \{1, 2, ..., n\}$ of the oriented graph corresponding to the transition matrix of a given ergodic homogeneous Markov chain: $m(i, j)$ is the expected number of steps (arcs) for random wandering on the oriented graph Γ, starting at i, to reach j for the first time. In particular, the quasi-metric of mean first passage time for the *simple random walking* on a connected unweighted graph G, in which there is an equal probability of moving from any vertex to any adjacent vertex, is a *weighted quasi-metric*, i.e., there exists a *weight function* $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, such that $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$ for all $i, j \in V$.

We consider also some connections of the mean first passage time quasi-metric to other metric structures on graphs (in particular to *α-metric forest* and its relatives), which are less studied, but not less interesting.

Finally, the fifth section deals with examples of the construction of mean first passage time quasi-metrics. In addition to illustrating the "graphical" procedure of building the matrix M, recurrent research algorithms are presented and the resulting generalized metric structures are analyzed.

Keywords: Markov chain, mean first passage time, spanning rooted forest of an oriented graph, quasi-metric, mean first passage time quasi-metric, forest metric.

Bibliography: 25 titles.

For citation:
E. I. Deza, B. Mhanna, 2020, "On special properties of some quasi-metrics" , *Chebyshevskii sbornik*, vol. 21, no. 1, pp. 145–164.

1. Введение

Рассмотрим последовательность одинаковых случайных испытаний, в которой вероятность исхода следующего испытания зависит только от исхода испытания, непосредственно предшествующего ему. Такая случайная последовательность называется *цепью Маркова*.

Другими словами, *цепь Маркова* — последовательность случайных событий с конечным или счетным числом исходов, характеризующаяся тем свойством, что, говоря нестрого, при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого.

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги — переходам между ними. Вес дуги (i, j), связывающей вершины s_i и s_j, будет равен вероятности p_{ij} перехода из первого состояния во второе.

Процесс будет эргодическим, если построенный взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице.

С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный орграф по следующему закону: если вершина i имеет степень k, то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$.

Важной характеристикой эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$ является *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j, определяемое как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ — математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geqslant 1 : X_p = j \mid X_0 = i\}$.

Матрицу M можно получить, пользуясь исследованием ориентированного графа, связанного с матрицей перехода эргодической однородной цепи Маркова. Именно, имеет место следующий результат ([7, 10]).

Пусть $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$. Пусть Γ — взвешенный орграф без петель, вершины которого равны $1, 2, ..., n$, а веса дуг равны соответствующим вероятностям перехода в T. Тогда среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в цепи Маркова может быть представлено как

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если} \quad i \neq j, \\ q, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} — суммарный вес входящих лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, q_j — суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ, а $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$.

Если в определении среднего времени первого прохода использовать требование $p \geqslant 0$ вместо требования $p \geq 1$, то среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в цепи Маркова может быть получено как $m_{ij} = f_{ij}/q_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$. В этом случае можно говорить о *квазиметрике среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, ..., n\}$, такой, что $m(i, j) = m_{ij}$ — ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ, начинающегося с i, для достижения j в первый раз; это 0 для $i = j$.

Эта квазиметрика обладает рядом важных теоретических и прикладных свойств. Так, она удовлетворяет *геодезическому свойству*: равенство $m(i, j) = m(i, k) + m(k, j)$ выполняется тогда и только тогда, когда все пути в Γ от i до j проходят через k.

Квазиметрика среднего времени первого прохода для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G, в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину, является *взвешиваемой квазиметрикой*, т. е. существует *весовая функция* $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$ имеет место сотношение $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$. В качестве взвешиваемой квазиметрики, m обладает *ослабленным свойством симметрии*: $m(i, j) + m(j, k) + m(k, i) = m(i, k) + m(k, j) + m(j, i)$.

Менее изучены, но не менее интересны связи квазиметрики среднего времени первого прохода с другими метрическими структурами на графах, в частности, с *α-метрикой леса* и ее вариациями. Особый интерес представляет попытка переноса ряда классических рекуррентных процедур, связанных с указанными метрическими структурами, на ориентированный случай.

2. Основные понятия теории цепей Маркова

Пусть $\langle \Omega, F, \Pr \rangle$ — вероятностное пространство. При изложение теории марковских цепей принято рассмотривать дискретные случайные величины, областью значений которых является некоторое конечное множество $E = \{s_1, \ldots, s_k\}$.

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ называется *простой цепью Маркова* (с дискретным временем), если

$$\Pr(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \Pr(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n).$$

Область значений случайных величин X_n называется *пространством состояний* цепи, а номер n — номером шага.

Матрица $P[n]$, где $p_{ij}[n] = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$, называется *матрицей переходных вероятностей на n-ом шаге*; вектор $p = (p_1, p_2, \ldots p_n)$, где $p_i = \Pr(X_0 = i)$, называется *начальным распределением* цепи Маркова.

Цепь Маркова называется *однородной*, если матрица переходных вероятностей не зависит от номера шага, то есть $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{ij}[n] = p_{ij}$. В дальнейшем будем предполагать, что мы имеем дело с однородными цепями Маркова.

Таким образом, последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ образует однородную цепь Маркова, если для любых номеров n, а также произвольных $i, j, i_1, \ldots, i_{n-2}$ справедливо равенство

$$\Pr(\xi_n = s_i \mid \xi_1 = s_{i_1}, \xi_2 = s_{i_2}, \ldots, \xi_{n-2} = s_{n-2}, \xi_{n-1} = s_j) = \Pr(\xi_n = s_i \mid \xi_{n-1} = s_j) = p_{ij}.$$

Из определения и формулы полной вероятности следует, что $p_{ij} \geq 0$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} p_{ij} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Матрицы, обладающие такими свойствами, называются *стохастичесхими*.

В соответствии с определением марковской цепи и формулой полной вероятности, вероятность $p_{ij}(n) = \Pr(\xi_{n+m} = s_i \mid \xi_m = s_j)$ перехода за n шагов из состояния s_j в состояние s_i вычисляется по рекуррентной формуле $p_{ij}(n) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_{il} p_{lj}(n-1)$, $p_{ij}(1) = p_{ij}$. Марковская цепь называется *неразложимой*, если для любых $i, j = 1, \ldots, k$ найдётся такое n, что $p_{ij}(n) > 0$.

Число $d > 1$ называется *периодом состояния* s_i, если d есть наибольший общий делитель таких чисел n, что $p_{ij}(n) > 0$, т.е. число d — период состояния s_i, если в состояние s_i можно вернуться только за кратное d число шагов. Нетрудно показать, что все состояния неразложимой марковской цепи имеют одинаковый период.

Если все состояния марковской цепи имеют период $d > 1$, то марковская цепь называется *периодической*. В противном случае марковская цепь называется *непериодической*.

Если марковская цепь неразложима и непериодична, то найдётся такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что $p_{ij}(n) > 0$ для всех $n \geq n_0$ и $i, j = 1, \ldots, k$.

Эргодическая теорема утверждает, что марковская цепь является неразложимой и непериодической тогда и только тогда, когда для каждого $i = 1, \ldots, k$ существует предел $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} p_{ij}(n) = \pi_i > 0$, не зависящий от j. Величины π_i называются *стационарными* или *финальными вероятностями* состояний цепи Маркова, а вектор π – вектором стационарных вероятностей или, чаще в англоязычной специальной литературе, (нормализированным) вектором Перрона.

Нетрудно убелиться в том, что для вектора $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ стационарных вероятностей цепи Маркова имеют место соотношения $\pi = P \cdot \pi$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} \pi_i = 1$. [2], [3], [5]

3. Представления цепей Маркова графовыми моделями

Для обсуждения возможности представления цепей Маркова с помощью графовых моделей, вспомним некоторые базовые понятия теории орграфов. [4], [7], [10]

Ориентированный граф (*орграф*) — граф, ребрам которого присвоено направление. Направленные ребра называются *дугами*. Граф, ни одному ребру которого не присвоено направление, называется *неориентированным*. Орграф называется (реберно) *взвешенным*, если каждой дуге присвоено некоторое числовое значение — *вес*.

Орграф называется *слабо связным*, если соответствующий неориентированный граф связен. *Слабой компонентой* орграфа называется любой его максимальный слабосвязный подграф.

Вес взвешенного орграфа определяется произведением весов его дуг; вес любого орграфа, который не имеет дуг, равен 1. Вес множества орграфов — это сумма весов его членов.

Сходящееся дерево — слабосвязный орграф, в котором одна вершина, называемая *корнем*, имеет нулевое значение для входящей степени, а оставшиеся вершины имеют для входящей степени значение 1.

Входящий лес орграфа Γ — остовной подграф орграфа Γ, все слабые компоненты которого являются сходящимися деревьями. Говорят, что входящий лес *сходятся к корням* его сходящихся деревьев. Входящий лес F орграфа Γ называется *максимальным входящим лесом орграфа* Γ, если Γ не имеет входящего леса с большим числом дуг, чем в F.

Размерность входящего леса орграфа Γ — число слабых компонент в любом максимальном входящем лесе. Очевидно, что каждый максимальный входящий лес орграфа Γ имеет $n-d$ дуг, где d — размерность входящего леса орграфа Γ. *Подмаксимальный входящий лес орграфа* Γ — это лес в Γ, имеющий $d+1$ слабые компоненты; как следствие, он имеет $n-d-1$ дугу.

Марковская цепь может быть изображена в виде ориентированного взвешенного графа переходов, вершины которого соответствуют состояниям цепи, а дуги — переходам между ними. Вес дуги (i,j), связывающей вершины s_i и s_j, будет равен вероятности p_{ij} перехода из первого состояния во второе.

Очевидно, что для $i \neq j$ имеет место равенство $p_{ij} = -\ell_{ij}$, где $L = ((\ell_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — *матрица Лапласа* (*матрица Кирхгоффа*) взвешенного орграфа Γ, т. е., по определению, $l_{ij} = -w_{ij}$ для $i \neq j$, и $l_{ii} = -\sum_{j\neq i} l_{ij}$. Другими словами, матрица Лапласа L орграфа Γ удовлетворяет соотношению $L = I - P$.

Процесс будет эргодическим, если построенный взвешенный орграф является слабо связным, и наибольший общий делитель длин всех его циклов равен единице.

С другой стороны, любой связный граф может служить базой для построения модели простейшей цепи Маркова. Для этого достаточно превратить его во взвешенный орграф по следующему закону: если вершина i имеет степень k, то все выходящие из нее ребра превращаются в дуги с весами $\frac{1}{k}$. Другими словами, любое ребро (i,j) превращается в дугу, соответствующую переходу с вероятностью $p_{ij} = \frac{1}{k}$.

4. Среднее время первого прохода для цепей Маркова

Пусть $T = ((t_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица перехода эргодической однородной цепи Маркова с состояниями $1, 2, ..., n$.

Определим *среднее время первого прохода* из состояния i в состояние j как

$$m_{ij} = E(F_{ij}) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(F_{ij} = k),$$

где $E(\cdot)$ — математическое ожидание, а $F_{ij} = \min\{p \geqslant 1 : X_p = j \,|\, X_0 = i\}$. По [23] (теорема 3.3), матрица $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет следующее представление:

$$M = (I - L^{\#} + JL^{\#}_{dg})\Pi^{-1},$$

где I — единичная $n\times n$ матрица, J — $n\times n$ матрица, состоящая из одних единиц, $L = I - T$, $L^{\#}$ — *обратная матрица*, полученная применением операции группового обращения из матрицы L, $L^{\#}_{dg}$ — диагональная матрица, полученная заменой всех недиагональных элементов матрицы $L^{\#}$ нулями, $\Pi = diag(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — диагональная матрица с элементами $\pi_1, \ldots, \pi_n$, и $(\pi_1, ..., \pi_n) = \pi$ — *нормализованный левый вектор Перрона* матрицы T, т.е. вектор из $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий условиям $\pi T = \pi$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$.

В развернутой форме мы получаем следующую формулу ([23, 6]):

$$m_{ij} = \begin{cases} \pi_j^{-1}, & \text{если } i = j, \\ \pi_j^{-1}(L_{jj}^{\#} - L_{ij}^{\#}), & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Замечание 1. Если вместо вспомогательного требования $p \geqslant 1$ в определении среднего времени первого прохода используется вспомогательное требование $p \geqslant 0$ ([6]), то $m_{jj} = 0$, и

$$m_{ij} = \pi_j^{-1}(L_{jj}^{\#} - L_{ij}^{\#}),\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Рассмотрим взвешенный орграф Γ, который соответствует цепи Маркова с матрицей перехода T.

По [9] (предложение 15), для любого взвешенного орграфа Γ и его матрицы Лапласа L выполняется соотношение

$$L^{\#} = \sigma_{n-d}^{-1}\left(Q_{n-d-1} - \frac{\sigma_{n-d-1}}{\sigma_{n-d}} Q_{n-d}\right),$$

где σ_k — суммарный вес входящих лесов с k дугами (так что σ_{n-d} и σ_{n-d-1} являются суммарными весами максимальных и подмаксимальных входящих лесов орграфа Γ, соответственно), Q_k — матрица, в которой ij-элемент q_{ij}^k $(i, j = 1, 2, ..., n)$ представляет собой суммарный вес входящих лесов, имеющих k дуг, у которых вершина i принадлежат дереву, которое сходится к вершине j.

Поскольку рассматриваемая цепь Маркова эргодична, то соответствующий орграф Γ слабосвязен и, следовательно, имеет остовные сходящиеся деревья. Таким образом, размерность d максимального входящего леса орграфа Γ равна 1, и каждый максимальный входящий лес, сходящийся к j, является остовным сходящимся деревом, которое содержит i. Другими словами, jj- и ij-элементы матрицы $Q_{n-d} = Q_{n-1} = ((q_{ij}^{(n-1)}))$ одинаковы, а разности между ними равны нулю: $q_{jj}^{(n-1)} - q_{ij}^{(n-1)}$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Что касается матрицы $Q_{n-d-1} = Q_{n-2} = ((q_{ij}^{(n-2)}))$, разности вида $q_{jj}^{(n-2)} - q_{ij}^{(n-2)} \stackrel{\text{def}}{=} f_{ij}$ между ее jj- и ij-элементами равны весам входящих лесов орграфа Γ, которые состоят ровно из двух деревьев, сходятся к j и имеют i и j в разных деревьях.

Таким образом, мы получаем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sigma_{n-1}\,\pi_j}$, если $i \neq j$.

Поскольку (см., например, [21, 22, 24]) $\pi_j = \frac{q_j}{\sigma_{n-1}}$, где q_j — суммарный вес деревьев, сходящихся к j в Γ (так что $\sum_{k=1}^{n} q_k = \sigma_{n-1}$), то мы получаем ([7, 10]) следующее "графовое" представление для среднего времени первого прохода:

$$m_{ij} = q_j^{-1} \cdot \begin{cases} f_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ q, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где f_{ij} — суммарный вес входящих лесов орграфа Γ, состоящих из двух деревьев, и имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, q_j — суммарный вес остовных деревьев, сходящихся к j в Γ, а $q = \sum_{k=1}^{n} q_k$.

Замечание 2. Если в определении среднего времени первого прохода использовать требование $p \geqslant 0$, то среднее время первого прохода из состояния i в состояние j в цепи Маркова может быть представлено следующим образом: $m_{ij} = f_{ij}/q_j$, $i, j = 1, 2, ..., n$.

Заметим, что f_{ij} и q_j можно вычислить и с помощью элементарной матричной алгебры, а именно, с помощью следующей рекуррентной процедуры ([9], утверждение 4): для $k = 0, 1 \cdots n-1$ имеет место формула $\sigma_{k+1} = \frac{\operatorname{tr}(LQ_k)}{k+1}$, $Q_{k+1} = -LQ_k + \sigma_{k+1} I$, где $\sigma_0 = 1$, и $Q_0 = I$.

5. Квазиметрика среднего времени первого прохода

Если в определении среднего времени первого прохода использовать требование $p \geqslant 0$, то можно перейти к исследованию соответствующей квазиметрики ([18, 25, 1, 16]) на множестве вершин орграфа Γ, соответствующего цепи Маркова с матрицей перехода T.

В этом случае мы говорим о *квазиметрике среднего времени первого прохода* m на $V = \{1, 2, ..., n\}$, такой, что $m(i, j) = m_{ij}$ - ожидаемое количество шагов (дуг) для случайного блуждания на Γ, начинающегося с i, для достижения j в первый раз; это 0 для $i = j$.

На самом деле, мы можем проверить все аксиомы *квазиметрики*: для всех $i, j, k \in V$ $m(i, j) \geq 0$, $m(i, j) > 0$ тогда и только тогда, когда $i \neq j$, и $m(i, j) \leq m(i, k) + m(k, j)$ ([19], теорема 6.2.1).

Более того, ([19], теорема 6.2.1) эта квазиметрика обладает свойством *аддитивности точки-разреза* ([8]), или, что то же, *геодезическим свойством* ([20]): $m(i, j) = m(i, k) + m(k, j)$ тогда и только тогда, когда все пути в Γ от i до j проходят через k.

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V определяется теперь как

$$c(i, j) = m(i, j) + m(j, i).$$

Простейший пример квазиметрики среднего времени первого прохода может быть получен для *простого случайного блуждания* по связному невзвешенному графу G, в котором из любой вершины графа существует равная вероятность перемещения в любую соседнюю вершину.

В этом случае квазиметрика m является *взвешиваемой квазиметрикой* (см. [14, 15, 17] и [16], глава 16), т.е. существует *весовая функция* $w : V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, такая, что для всех $i, j \in V$ имеет место сотношение $m(i, j) + w_i = m(j, i) + w_j$. В качестве взвешиваемой квазиметрики, m обладает *ослабленным свойством симметрии*: для любых $i, j, k \in V$

$$m(i, j) + m(j, k) + m(k, i) = m(i, k) + m(k, j) + m(j, i).$$

Метрика коммутирующего времени первого прохода c на V имеет теперь форму $c(i, j) = m(i, j) + m(j, i) = 2m(i, j) + w_i - w_j$, в то время как $m(i, j) = \frac{c(i,j) - w_i + w_j}{2}$.

Кроме того, функция p, $p(i, j) = m(i, j) + w_i = \frac{c(i,j) + w_i + w_j}{2}$, является *частичной метрикой* на V ([14]), т.е. для всех $i, j, k \in V$ имеют место следующие соотношения: $p(i, j) \geq 0$; $p(i, j) \geq p(i, i)$ (*саморасстояния малы*); $p(i, i) = p(j, j) = p(i, j) \Rightarrow i = j$; $p(i, j) = p(j, i)$ (*симметрия*); $p(i, j) \leq p(i, k) + p(k, j) - p(k, k)$ (*острое неравенство треугольника*).

Квазиметрика среднего времени первого прохода m тесно связана и с другими метрическими структурами на графах.

При $\alpha > 0$ связный взвешенный неориентированный граф (в общем случае даже *мультиграф*, допускается использование параллельных ребер) $G = (V, E; w)$ с положительной реберной весовой функцией $w = (w(e))_{e \in E}$ обладает *α-метрикой леса* $forest^{\alpha}$. [13] Ее значение между вершинами u и v определяется как

$$forest^{\alpha}(u, v) = \frac{1}{2}(q_{uu} + q_{vv} - q_{uv} - q_{vu})$$

для $((g_{ij})) = (I + \alpha L)^{-1}$, где I — тождественная $|V| \times |V|$ матрица, и $L = ((l_{il}))$ — матрица Лапласа орграфа Γ.

Особую роль в построенном семействе метрик играет *метрика леса* $forest$ ([11]): это случай $\alpha = 1$ для α-метрики леса.

С α-метрикой леса тесно связана *нормализованная α-метрика леса*

$$\rho^{\alpha}(u, v) = \alpha(q_{uu} + q_{vv} - q_{uv} - q_{vu});$$

она пропорциональна α-метрике леса, но в ряде случаев более удобна для приложений.

Эти метрические структуры обладают рядом интересных и полезных свойств.

Так, можно показать ([12]), что увеличенная в два раза α-метрика леса на G является *метрикой сопротивления* для связного взвешенного (мульти)графа $G' = (V', E'; w')$. Здесь множество вершин $V' = V \cup \{0\}$, множество ребер $E' = E \cup \{u0 : u \in V\}$), а весовая функция удовлетворяет следующим условиям: $w'(e) = \alpha w(e)$ для всех $e \in E$, и $w'(u0) = 1$ для всех $u \in V$.

Известно ([12]), что для $\alpha \to 0$ мы получаем из d^α *дискретную метрику* d^0:

$$d^0(i,i) = 0,\ d^0(i,j) = 1 \ \text{ при } i \neq j.$$

Из метрики ρ^α при стремлении α к нулю получается *недискретная полуметрика* $\rho^0(i,j) \equiv 0$.

Для $\alpha \to +\infty$ мы получаем (в случае связного графа) из d^α *дискретную полуметрику* $d^0(i,j) \equiv 0$. Из метрики ρ^α при неограниченном росте α получается хорошо известная *метрика сопротивления* ρ: $\rho_{ij} = l^+_{ii} + l^+_{jj} - l^+_{ij} - l^+_{ji}$, где $L^+ = ((l^+_{ij}))$ - *преобразование Мура-Пенроуза* матрицы Лапласа L.

С точки зрения вопросов, рассматриваемых в нашей статье, очень интересна связь метрики леса с рекуррентной процедурой, родственной описанной выше рекуррентной схеме получения матрицы $((f_{ij}))$. Именно, матрица $\overline{Q} = (1+L)^{-1}$, используемая для построения метрики леса, может быть получена ([9]) как

$$\overline{Q} = \sigma^{-1} Q, \ \text{ где } \ \sigma = \sum_{k=0}^{n-d} \sigma_k,\ Q = \sum_{k=0}^{n-d} Q_k,$$

причем σ_k — общий вес остовных корневых лесов с k дугами (так что σ_{n-d} и σ_{n-d-1} являются суммарными весами максимальных и подмаксимальных остовных корневых лесов графа G, соответственно), а Q_k — матрица, ij-элемент которой $(i,j = 1,...,n)$ есть суммарный вес лесов, имеющих k компонент и вершину i, принадлежащую дереву с корнем j. (Соответствующие определения для неориентированного случая представлены в работе [9]; впрочем, заинтересованный читатель легко получит их самостоятельно.)

В случае орграфов мы можем получить аналогичное построение. На самом деле, мы можем попытаться использовать рекуррентную процедуру построения матрицы среднего времени первого прохода в качестве основы для построения *q-метрики леса $qforest$* на Γ.

Аналогично, матрица $\overline{Q}(\alpha) = (1+\alpha L)^{-1}$, используемая при построении α-метрики леса, может быть получена ([9]) как

$$\overline{Q}(\alpha) = \sigma^{-1}(\alpha) Q(\alpha), \ \text{ где } \ \sigma(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-d} \sigma_k \alpha^k,\ Q(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-d} Q_k \alpha^k.$$

В случае орграфов мы можем попытаться использовать рекуррентную процедуру построения матрицы среднего времени первого прохода в качестве основы для построения (q,α)-*метрики леса $qforest^\alpha$* (и *нормализованной* (q,α)-*метрики леса* $q\rho^\alpha$) на Γ.

В следующем параграфе мы рассматриваем такие построения на конкретных примерах и изучаем свойства полученных конструкций.

6. Примеры квазиметрики среднего времени первого прохода

6.1. Пример 1.

Рассмотрим простейший симметричный случай случайного блуждания. Пусть

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Другими словами, мы рассматриваем простое случайное блуждание на простом цикле с тремя вершинами, то есть на неориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{12, 23, 31\}$. Поскольку $d(1) = d(2) = d(3) = 2$, то, следуя описанной выше схеме, мы получаем орграф Γ на трех вершинах с весами дуг $w_{ik} = 1/2$, $i, k = 1, 2, 3$, $i \neq k$ (рис. 1).

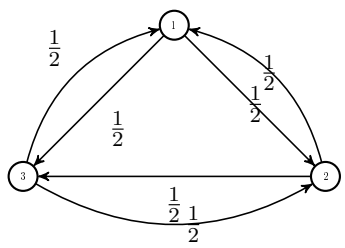

Рис.1. Орграф Γ на трех вершинах.

Пользуясь определением q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), и рассматривая 9 сходящихся деревьев орграфа Γ (рис. 2), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3) = (3/4, 3/4, 3/4)$. Так как $q = \sum_{i=1}^{3} q_i = 9/4$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^{3} q_i} = (1/3, 1/3, 1/3)$. Этот вектор совпадает с π, нормированным левым вектором Перрона для T.

На рис. 3 представлены все 6 "2-деревьевых" лесов орграфа Γ (каждый имеет ровно две дуги). Вспоминая, что f_{ij} определяется как общий вес всех таких лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j, получаем:

$$((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & \sum w(F_i), i = 1, 4, 6 & \sum w(F_i), i = 2, 3, 5 \\ \sum w(F_i), i = 1, 3, 4 & 0 & \sum w(F_i), i = 2, 5, 6 \\ \sum w(F_i), i = 1, 2, 3 & \sum w(F_i), i = 4, 5, 6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

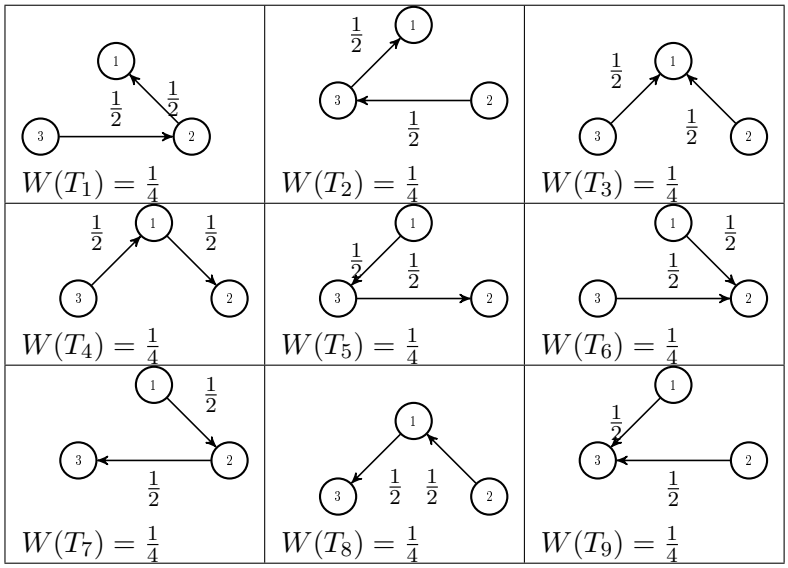

Рис. 2. Сходящиеся деревья орграфа Г.

Пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3}{q_i}$, получим $M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

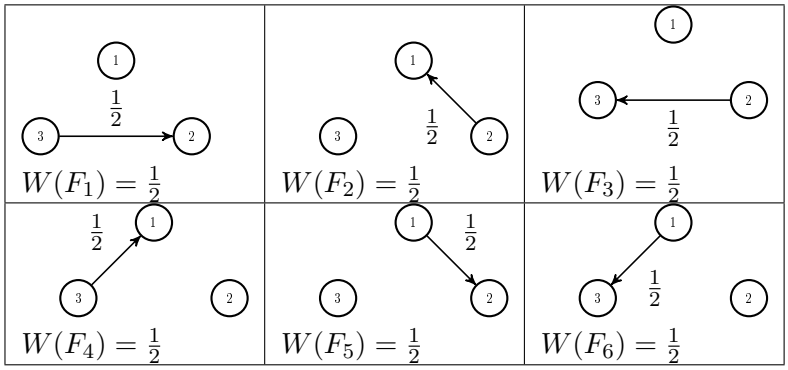

Рис. 3. Леса орграфа Г, состоящие из двух деревьев.

Мы можем получить те же результаты, пользуясь рекуррентной процедурой. Начиная с $Q_0 = I$ и $\sigma_0 = 1$ и используя матрицу $L = I - T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$, мы имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_0)}{1} = 3,\ Q_1 = -LQ_0 + \sigma_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_1)}{2} = 9/4,\ Q_2 = -LQ_1 + \sigma_2 I = \begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 & 3/4 \end{bmatrix}.$$

Обозначая $Q_1 = ((q_{ij}^{(1)}))$, находим $f_{ij} = q_{jj}^{(1)} - q_{ij}^{(1)}$, $i, j = 1, 2, 3$: $((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$.

Следуя дальнейшей процедуре, мы вновь получим матрицу M, и, избавляясь от диагональных

членов, квазиметрику среднего времени первого прохода $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. В нашем простейшем симметричном случае данная квазиметрика является метрикой. Более того, она совпадает с удвоенной дискретной метрикой.

6.2. Пример 2.

Рассмотрим более интересный пример простого случайного блуждания. Пусть

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Другими словами, мы рассматриваем простое случайное блуждание на неориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = \{1, 2, 3, 4\}$, и $E = \{12, 13, 23, 34\}$.

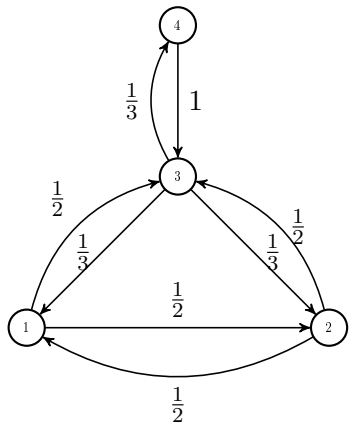

Рис.4. Орграф Г на четырех вершинах.

Поскольку $d(1) = d(2) = 2$, $d(3) = 3$ и $d(4) = 1$, мы получаем новый орграф Г (рис. 4) на вершинах 1, 2, 3, 4 с весами дуг $w_{1k} = 0.5$, $k = 2, 3$, $w_{2k} = 0.5$, $k = 1, 3$, $w_{3k} = 1/3$, $k = 1, 2, 4$, и $w_{43} = 1$.

По определению q_i (общий вес деревьев, сходящихся к i), используя 12 сходящихся деревьев орграфа Г (рис. 5), найдем вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = 0.25\big(2, 2, 3, 1\big)$. Так как $q = \sum_{k=1}^{4} q_i = 2$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_5, \tilde{q}_6) = \frac{q}{\sum_{k=1}^{6} q_i} = 0.125(2, 2, 3, 1)$. Этот вектор совпадает с π, нормированным левым вектором Перрона для T.

На рис. 6 представлены все 19 "2-деревьевых" лесов орграфа Г (каждый имеет две дуги).

Величина f_{ij} определяется как общий вес всех таких лесов, у которых i содержится в одном дереве, а второе дерево сходится к j. Следовательно,

$$((f_{ij})) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \sum w(F_i), i = 6, 8, 9, 10 & \sum w(F_1), i = 2, 4, 7 & \sum w(F_i), i = 1, 3, 5, 11 - 19 \\ \sum w(F_i), i = 5, 6, 7, 8 & 0 & \sum w(F_i), i = 2, 4, 10 & \sum w(F_i), i = 1, 3, 9, 11 - 19 \\ \sum w(F_i), i = 3 - 7 & \sum w(F_i), i = 1, 2, 8 - 10 & 0 & \sum w(F_i), i = 11 - 19 \\ \sum w(F_i), i = 3 - 7, 12, 15 & \sum w(F_i), i = 1, 8, 9, 10, 13, 14 & \sum w(F_i), i = 11, 16, 19 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 3/2 & 9/4 \\ 4/3 & 0 & 3/2 & 9/4 \\ 5/3 & 5/3 & 0 & 7/4 \\ 13/6 & 13/6 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

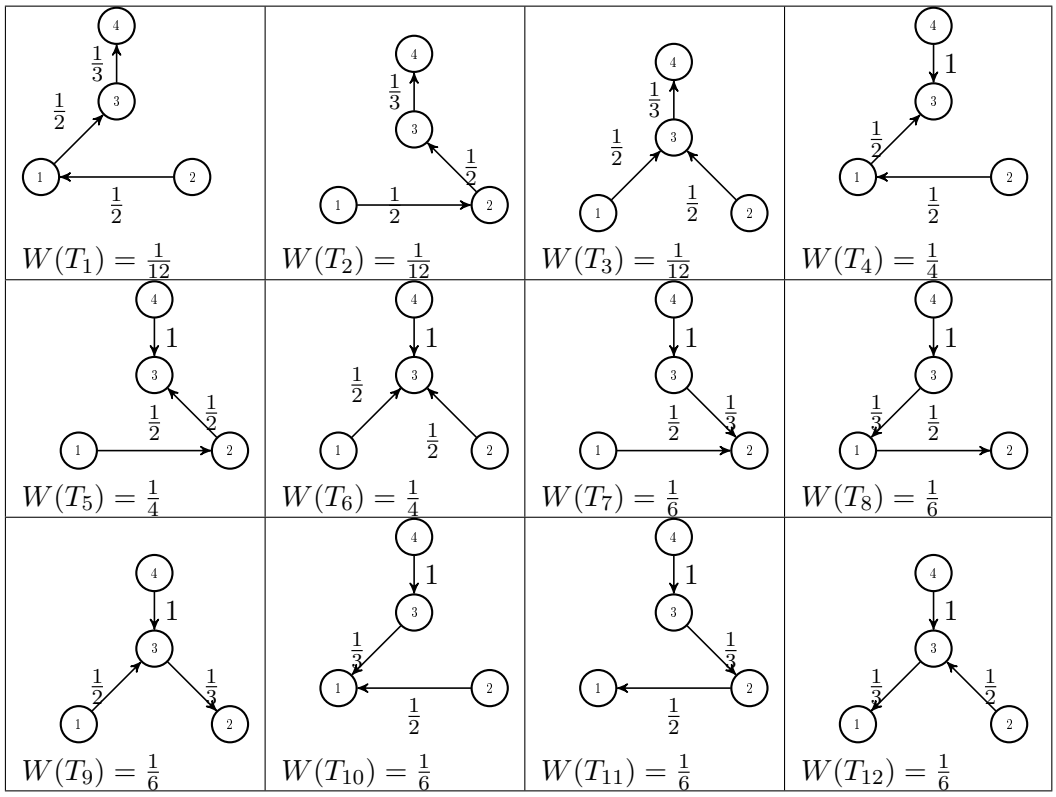

Рис. 5. Сходящиеся деревья орграфа Г.

Отсюда, пользуясь тем, что $m_{ij} = \frac{f_{ij}}{q_j}$, $m_{ii} = \frac{q_1+q_2+q_3+q_4}{q_i}$, получим:

$$M = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 27 \\ 8 & 12 & 6 & 27 \\ 10 & 10 & 8 & 21 \\ 13 & 13 & 3 & 24 \end{bmatrix}.$$

Мы можем получить те же результаты, пользуясь рекуррентной процедурой. Начиная с $Q_0 = I$ и $\sigma_0 = 1$ и используя матрицу

$$L = I - T = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

мы имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_0)}{1} = 4,\ Q_1 = -LQ_0 + \sigma_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 3 & 0.5 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_1)}{2} = 61/12,\ Q_2 = -LQ_1 + \sigma_2 I = \begin{bmatrix} 5/2 & 7/6 & 5/4 & 1/6 \\ 7/6 & 5/2 & 5/4 & 1/6 \\ 5/6 & 5/6 & 11/4 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 2 & 29/12 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_2)}{3} = 2,\ Q_3 = -LQ_2 + \sigma_3 I = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

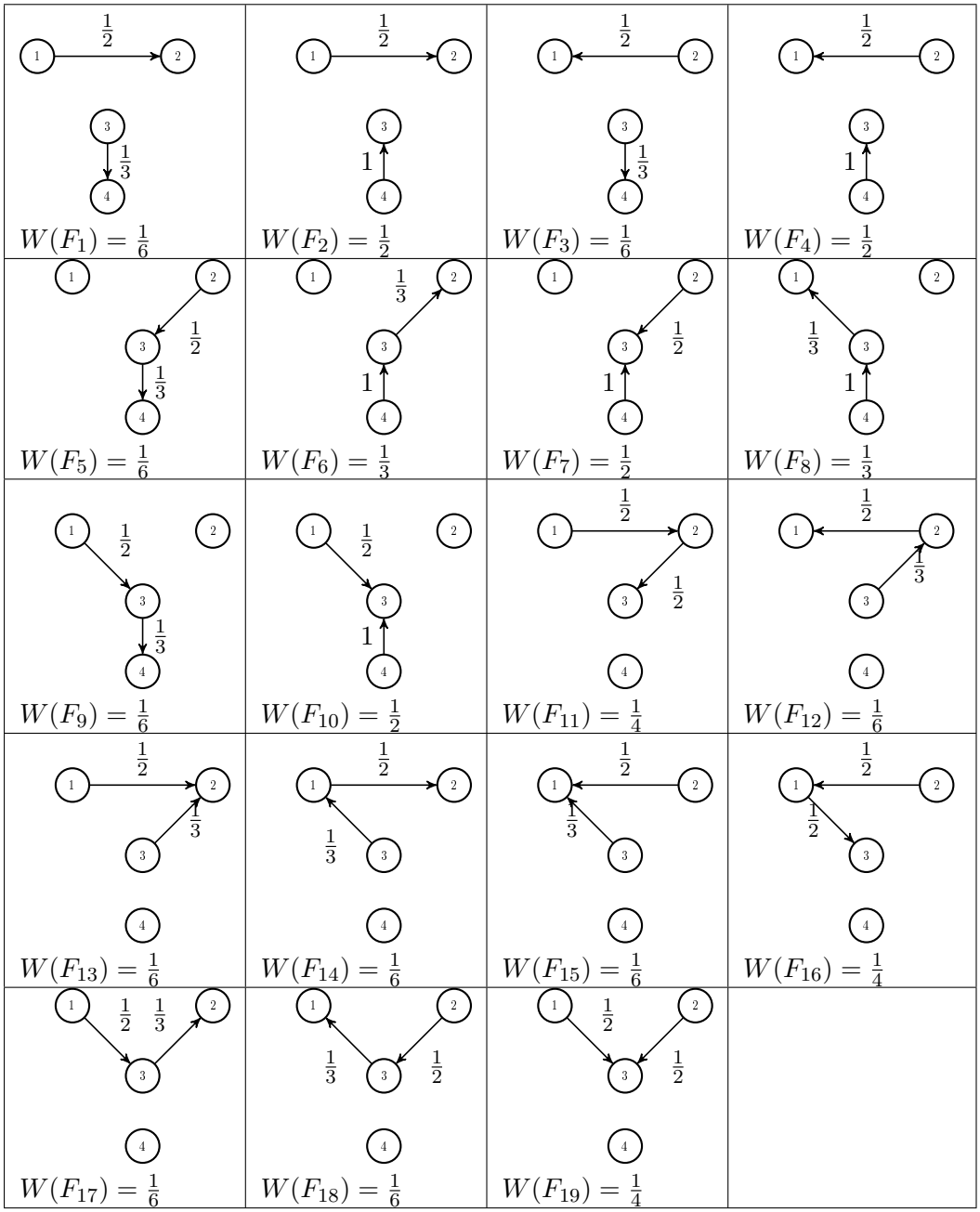

Рис.6. Леса орграфа Г, состоящие из двух деревьев.

Обозначая $Q_2 = ((q_{ij}^{(2)}))$, получаем, что $f_{ij} = q_{jj}^{(2)} - q_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, \ldots, 4$, и, следовательно,

$$((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 4/3 & 3/2 & 9/4 \\ 4/3 & 0 & 3/2 & 9/4 \\ 5/3 & 5/3 & 0 & 7/4 \\ 13/6 & 13/6 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{и} \quad M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 12 & 8 & 6 & 27 \\ 8 & 12 & 6 & 27 \\ 10 & 10 & 8 & 21 \\ 13 & 13 & 3 & 24 \end{bmatrix}.$$

Диагональ матрицы Q_3 вновь дает вектор $(1/2, 1/2, 3/4, 1/4)$.

Нетрудно убедиться в том, что нами получена (все ориентированные неравенства треугольника выполнены) квазиметрика

$$\overline{M} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 8 & 6 & 27 \\ 8 & 0 & 6 & 27 \\ 10 & 10 & 0 & 21 \\ 13 & 13 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

обладающая ослабленным свойством симметрии $m_{ij} + m_{jk} + m_{ki} = m_{ik} + m_{kj} + m_{ji}$ и свойством аддитивности точки-разреза: если все пути от i к j идут через k, то $m_{ik} + m_{kj} = m_{ij}$. Более того, это взвешенная квазиметрика: $m_{ij} + w_i = m_{ji} + wj$ для некоторой весовой функции w. Ее (неотрицательная и определенная с точностью до сдвига) весовая функция определяется вектором $w = \frac{1}{3}\big(4, 4, 0, 18\big)$. Соответствующая метрика коммутирующего времени первого прохода c, $c_{ij} = m(i,j) + m(j,i)$, и частичная метрика p, $p(i,j) = \frac{c(i,j)+w_i+w_j}{2}$, задаются матрицами

$$C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 16 & 16 & 40 \\ 16 & 0 & 16 & 40 \\ 16 & 16 & 0 & 24 \\ 40 & 40 & 24 & 0 \end{bmatrix}; \quad P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 12 & 16 & 31 \\ 12 & 4 & 16 & 31 \\ 16 & 16 & 0 & 38 \\ 31 & 31 & 38 & 18 \end{bmatrix}.$$

Для любой весовой функции w такой, что $m(i,j) \le w_j$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, т.е. начиная с $w = \frac{1}{3}(13, 13, 9, 27)$, функции m, c, p сильны на соответствующем уровне: m — сильная взвешенная квазиметрика, c — сильная взвешенная метрика, и p — сильная частичная метрика ([14]).

Более того, в этом случае функция $c' : V' \times V' \to \mathbb{R}$, где $V' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $c'(0,0) = 0$, $c'(0,i) = c'(i,0) = w_i$, $c'(i,j) = c(i,j)$, если $i, j = 1, 2, 3, 4$, является метрикой на V'; в случае $w = \frac{1}{3}(13, 13, 9, 27)$ ее матрица имеет вид

$$C' = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 13 & 13 & 9 & 27 \\ 13 & 0 & 16 & 16 & 40 \\ 13 & 16 & 0 & 16 & 40 \\ 9 & 16 & 16 & 0 & 24 \\ 27 & 40 & 40 & 24 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя результаты проведенной выше рекуррентной процедуры, мы получим матрицу $Q = ((q_{ij})) = \frac{\sum_{i=0}^{3} Q_i}{\sum_{i=0}^{3} \sigma_i}$:

$$Q = \frac{Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3}{\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \frac{12}{145}\begin{bmatrix} 7 & 13/6 & 5/2 & 5/12 \\ 13/6 & 7 & 5/2 & 5/12 \\ 5/3 & 5/3 & 15/2 & 5/4 \\ 5/6 & 5/6 & 15/4 & 20/3 \end{bmatrix}.$$

Симметричная матрица $D = ((q_{ii} + q_{jj} - q_{ij} - q_{ji}))$, получаемая из $Q = ((q_{ij}))$, соответствует метрике леса для неориентированного случая. Она имеет вид

$$D = \frac{12}{145}\begin{bmatrix} 0 & 29/3 & 31/3 & 149/12 \\ 29/3 & 0 & 31/3 & 149/12 \\ 31/3 & 31/3 & 0 & 53/6 \\ 149/12 & 149/12 & 53/6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что для этой матрицы выполняются соотношения $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, то есть функция $D : V \times V \to \mathbb{R}$, определенная по закону $D(i, j) = D_{ij}$, является метрикой.

6.3. Пример 3.

Рассмотрим пример, не сводящийся к простому случайному блужданию. Пусть ([7])

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Весовой орграф Г, соответствующий нашей цепи Маркова, показан на рис. 7.

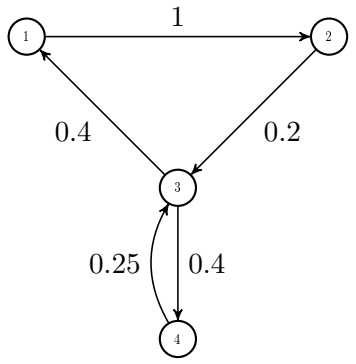

Рис.7. Весовой орграф Г, соответствующий матрице T.

Вычисляя q_i как общий вес деревьев, сходящихся к i, находим вектор $(q_1, q_2, q_3, q_4) = (0.02, 0.1, 0.05, 0.08)$. Поскольку $\sum_{k=1}^{4} q_i = 0.25$, то $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, \tilde{q}_4) = \frac{q}{\sum_{k=1}^{4} q_i} = (0.08, 0.4, 0.2, 0.32)$. Этот вектор π, нормированный левый вектор Перрона для T.

Определяя f_{ij} как общий вес "2-деревьевых" лесов орграфа Г, имеющих одно дерево, содержащее i, а другое дерево, сходящееся к j, получим, что

$$((f_{ij})) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.3 & 1.16 \\ 0.23 & 0 & 0.25 & 1.08 \\ 0.13 & 0.75 & 0 & 0.68 \\ 0.21 & 1.15 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ и } M = \begin{bmatrix} 12.5 & 1 & 6 & 14.5 \\ 11.5 & 2.5 & 5 & 13.5 \\ 6.5 & 7.5 & 5 & 8.5 \\ 10.5 & 11.5 & 4 & 3.125 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь рекуррентной процедурой для вычисления f_{ij} и q_j, начиная с $Q_0 = I$, $\sigma_0 = 1$, мы имеем:

$$\sigma_1 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_0)}{1} = 2.25, Q_1 = \begin{bmatrix} 1.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.05 & 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1.45 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0.25 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_2 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_1)}{2} = 1.56, Q_2 = \begin{bmatrix} 0.31 & 1.05 & 0.2 & 0 \\ 0.08 & 1.15 & 0.25 & 0.08 \\ 0.18 & 0.4 & 0.5 & 0.48 \\ 0.1 & 0 & 0.3 & 1.16 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_3 = \frac{\mathrm{tr}(LQ_2)}{3} = 0.25, Q_3 = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.1 & 0.05 & 0.08 \\ 0.02 & 0.1 & 0.05 & 0.08 \\ 0.02 & 0.1 & 0.05 & 0.08 \\ 0.02 & 0.1 & 0.05 & 0.08 \end{bmatrix}.$$

Вычисляя f_{ij} по формуле $f_{ij} = q_{jj}^{(2)} - q_{ij}^{(2)}$, $i, j = 1, 2, ..., 4$, мы придходим к тем же результатам. При этом (см. диагональ матрицы Q_3) мы вновь получаем вектор $(0.02, 0.1, 0.05, 0.08)$.

Непосредственная проверка показывает, что в данном случае соответствующая квазиметрика среднего времени первого прохода не будет взвешиваемой.

Используя описанную выше рекуррентную процедуру, мы можем получить и матрицу $Q = \frac{1}{\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}(Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3)$:

$$Q = \frac{1}{5.06} \begin{bmatrix} 2.58 & 2.15 & 0.255 & 0.08 \\ 0.1 & 0.43 & 0.5 & 0.16 \\ 0.6 & 0.5 & 3 & 0.96 \\ 0.12 & 0.01 & 0.6 & 4.24 \end{bmatrix}.$$

Симметричная матрица $D = ((q_{ii} + q_{jj} - q_{ij} - q_{ji}))$, получаемая из $Q = ((q_{ij}))$, соответствует метрике леса для неориентированного случая. Она имеет вид

$$D = \frac{1}{5.06} \begin{bmatrix} 0 & 0.76 & 4.725 & 6.63 \\ 0.76 & 0 & 2.43 & 4.5 \\ 4.725 & 2.43 & 0 & 5.68 \\ 6.63 & 4.5 & 5.68 & 0 \end{bmatrix}.$$

К сожалению, в данном общем случае эта матрица метрику не определяет, поскольку неравенство треугольника нарушается (например, $d_{32} + d_{21} < d_{31}$). Однако следует заметить, что неравенство треугольника нарушено только на парах, содержащих 12. Это связано с тем, что вероятность перехода из вершины 1 в вершину 2 в соответствующем орграфе равна 1, то есть слишком велика.

7. Заключение

В статье представлены материалы, связанные с поведением специальной квазиметрики, тесно связанной со стохастическими дискретными процессами. Помимо короткого обзора теоретических оснований проблематики, подробно рассмотрены и проиллюстрированы на примерах "графовый" и рекуррентный алгоритмы построения квазиметрики среднего времени первого прохода; прокомментированы особые свойства этой квазиметрики в случае простого случайного блуждания по связному неориентированному графу. Осуществлена попытка рекуррентного построения и анализа других обобщенных структур, в ом числе симметричных, связанных с теорией цепей Маркова.

В этой связи интерес представляет задача построения и исследования свойств конусов и многогранников рассматриваемых обобщенных (квази)метрик, заданных на малом числе точек; ее можно реализовать в рамках классической схемы схеме (см., например, [15], [17]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М. М., Деза Е. И., Дютур Сикирич М. Полиэдральные конструкции, связанные с квази-метриками // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, выпуск 2. С. 79 — 92.

2. Кудряшов Б. Д. Теория информации: Учебник для вузов. — СПБ.: Петир, 2009.

3. Потапов В. Н. Теория информации. Кодирование дискретных вероятностныхисточников. — Новосибирск: НГУ, 1999.

4. Харари Ф. Теория графов. — М.: УРСС, 2003.

5. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. — М.: ИЛ, 1963.

6. Catral M., Neumann M., Xu H. Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices // Linear Algebra and its Applications. 2005. Vol. 409. P. 32–50.

7. Chebotarev P. A graph theoretic interpretation of the mean first passage times // arXivpreprintarXiv:math.PR/0701359. 2007.

8. Chebotarev P. Studying new classes of graph metrics / in F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013) // Lecture Notes in Computer Science. 2013. LNCS 8085. P. 207–214.

9. Chebotarev P., Agaev R. Forest matrices around the Laplacian matrix // Linear Algebra and its Applications. 2002. Vol. 356. P. 253–274.

10. Chebotarev P., Deza E. Hitting time quasi-metric and its forest representation // Optimization Letters. 2020.Vol. 14. P. 291–307. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2

11. Chebotarev P. Y., Shamis E. V. On proximity measures for graph vertices // Automation and Remote Control. 1998. Vol. 59. P. 1443—1459.

12. Chebotarev P., Shamis E. Matrix forest theorems // arXiv:0602575v1. 2006.

13. Chebotarev P., Shamis E. The forest metric for graph verticies // arXiv:060257v1. 2006.

14. Deza E., Deza M., Dutour Sikirić Generalizations of Finite Metrics and Cuts. — World Scientific, 2016.

15. Deza M., Deza E. Cones of partial metrics // Contributions to Discrete Mathematics. 2011. Vol. 6. P. 26–47.

16. Deza M. M., Deza E. Encyclopedia of Distances. — Springer: Berlin-Heidelberg, 2016.

17. Deza M., Deza E., Vidali J. Cones of weighted and partial metrics / in Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010 // Advances in Algebraic Structures. 2012. P. 177–197.

18. Hausdorff F. Grundzuge der Mengenlehre. — Walter de Gruyter: Berlin, 1927.

19. Kirkland S. J., Neumann M. Group inverses of M-matrices and their applications. — CRC Press, 2012.

20. Klein D., Zhu H. Distances and volumina for graphs // Journal of Mathematical Chemistry. 1998. Vol. 23. P. 179–195.

21. Leighton T., Rivest R. L. The Markov chain tree theorem // Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass. 1983.

22. Leighton T., Rivest R. L. Estimating a probability using finite memory // IEEE Transactions on Information Theory. 1986. Vol. 32. P. 733–742.

23. Meyer Jr., C. D. The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains // SIAM Review. 1975. Vol. 17. P. 443–464.

24. Wentzell A. D., Freidlin M. I. On small random perturbations of dynamical systems // Russian Mathematical Surveys. 1970. Vol. 25. P. 1–55.

25. Wilson W. On quasi-metric spaces // American Journal of Mathematics. 1931. Vol. 53. P. 675–684.

REFERENCES

1. Deza, M.M., Deza, E.I., Dutour Sikirić, M. 2015, "Polyhedral structures associated with quasi-metrics", *Chebyshevskii sbornik*, Vol. 16 (2), P. 79–92.

2. Kudryashov, B.D. 2009, "Information Theory", *StPb.: Petir.*

3. Potapov, V.N. 1999, "Information Theory. Coding of discrete probabilistic sources", *Novosibirsk: NSU center.*

4. Harari, F. 2003, "Graph Theory", *M.: URSS.*

5. Shannon, K. 1963, "Works on Information theory and Cybernetics", *M.: IL.*

6. Catral, M., Neumann, M., Xu J. 2005, "Proximity in group inverses of M-matrices and inverses of diagonally dominant M-matrices", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 409, P. 32–50.

7. Chebotarev, P. 2007, "A graph theoretic interpretation of the mean first passage times", *arXiv preprint arXiv:math.PR/0701359.*

8. Chebotarev, P. 2013, "Studying new classes of graph metrics", in *F. Nielsen and F. Barbaresco, editors, Proceedings of the SEE Conference "Geometric Science of Information" (GSI-2013)*, *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS 8085, P. 207–214.

9. Chebotarev, P., Agaev, R. 2002, "Forest matrices around the Laplacian matrix", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 356, P. 253–274.

10. Chebotarev, P., Deza, E. 2020, "Hitting time quasi-metric and its forest representation", *Optimization Letters*, Vol. 14, P. 291-–307. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1314-2

11. Chebotarev,P.Y., Shamis E.V. 1998, "On proximity measures for graph vertices", *Automation and Remote Control*, Vol. 59, P. 1443—1459.

12. Chebotarev,P., Shamis E. 2006, "Matrix forest theorems", *arXiv:0602575v1.*

13. Chebotarev, P., Shamis, E. 2006, "The forest metric for graph verticies", *arXiv:060257v1.*

14. Deza, E., Deza, M., Dutour Sikirić, M. 2016, "Generalizations of Finite Metrics and Cuts," *World Scientific.*

15. Deza, M., Deza, E. 2011, "Cones of partial metrics", *Contributions to Discrete Mathematics*, Vol. 6, P. 26–47.

16. Deza, M. M., Deza, E. 2016, "Encyclopedia of Distances," *Springer, Berlin - Heidelberg.*

17. Deza, M., Deza, E., Vidali, J. 2012, "Cones of weighted and partial metrics", in *Proceedings of the Internat. Conference on Algebra 2010: Advances in Algebraic Structures*, P. 177–197.

18. Hausdorff, F. 1927, "Grundzuge der Mengenlehre," *Walter de Gruyter, Berlin.*

19. Kirkland, S. J., Neumann, M. 2012, "Group inverses of M-matrices and their applications," *CRC Press.*

20. Klein, D., Zhu, H. 1998, "Distances and volumina for graphs", *Journal of Mathematical Chemistry*, Vol. 23, P. 179–195.

21. Leighton, T., Rivest, R.L. 1983, "The Markov chain tree theorem", *Computer Science Technical Report MIT/LCS/TM-249, Laboratory of Computer Science, MIT, Cambridge, Mass.*

22. Leighton, T., Rivest, R.L. 1986, "Estimating a probability using finite memory", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 32, P. 733–742.

23. Meyer, Jr., C. D. 1975, "The role of the group generalized inverse in the theory of finite Markov chains", *SIAM Review*, Vol. 17, P. 443–464.

24. Wentzell, A. D., Freidlin, M.I. 1970, "On small random perturbations of dynamical systems", *Russian Mathematical Surveys*, Vol. 25, P. 1–55.

25. Wilson, W. 1931, "On quasi-metric spaces", *American Journal of Mathematics*, Vol. 53, P. 675-684.

Получено 15.01.2020 г.
Принято в печать 20.03.2020 г.